前回のまとめ…

- どんな問題・データも0/1の文字列で表現できる
  - 問題やプログラムそのものもデータ化できる
- 「問題を解く」＝「プログラムを作る」＝「アルゴリズムを設計する」
- どんなプログラムも標準形に直せる
  - 標準形
    - 全体は while loop
    - while の中は基本的な代入文か if 文が1つだけ
    - 最後に halt 文が1つある

Summary of the last class…

- Any problem/data can be represented by a binary (0/1) string
  - That means any problem/program can be seen as a binary data!
- "Solve a problem"＝"make a program"＝"design an algorithm"
- Any program can be rewritten in the "*standard form*"
  - *Standard form*
    - consists of one *while* loop
    - in the *while* loop, each statement contains one basic *assignment* statement or *if* statement
    - has one *halt* statement at the last of the program

単純プログラム：下の要素のみで構成されるプログラム
データ型：Σ上の文字列型(Σ型, Σ*型)
基本演算：文字列型の基本演算
実行文：　代入文, if文(case文), while文, halt文

定理2.7. どんなプログラムもそれと同値な単純プログラムに書換えることができる. しかも次のような標準形プログラムに書き直せる

```
prog プログラム名(input ...) ;
var pc: Σ*; ... Σ; ... Σ*; %pcの値は自然数の2進表記
begin
  pc:=1;
  while pc != 0 do
     case pc of
       1: (文) ;      各(文)の形は
       2: (文) ;        ・if 比較文 then pc:=k1 else pc:=k2 end-if
        :               ・代入文; pc:=k;
       k: (文) ;      のいずれか
     end-case
   end-while;
  halt(c)
end.
```


Simple program：a program consisting only of the following elements.
data type: string type on Σ (Σ type, Σ* type)
elementary operations: elementary operations on strings
execution statements: substitution, if (case), while, halt

Theorem 2.7 Any program can be rewritten into its equivalent simple program of the following form:

```
prog  Program name(input ...) ;
var pc: Σ*; ... Σ; ... Σ*; % value of pc is a binary representation of an integer
begin
  pc:=1;
  while pc != 0 do
     case pc of
       1: (statement) ;   each statement is one of the two:
       2: (statement) ;     ・if comparison then pc:=k1 else pc:=k2 end-if
        :                   ・substitution; pc:=k;
       k: (statement) ;
     end-case
   end-while;
  halt(c)
end.
```


定理2.8. すべての計算可能関数に対し,
それを計算する標準形プログラムが存在する.

プログラムカウンタの働きを考えてみよう.

更なる制約(テキスト101ページ)
「各文は高々定数時間で実行できるものだけ」
u, u': Σ型の変数,　v,v': Σ*型の変数
c: Σ型の定数,　s: Σ*型の定数
(代入文)
(1) u:=c;　(2) u:=u';
(3) u:=head(v);　(4) u:=tail(v);
(5) v:=s;　~~(6) v:=v';~~ ?
(7) v:= right(v);　(8) v:=left(v);
(9) v:=u # v;　(10) v:=v # u;
(比較文)
(11) u=c　(12) v=s

計算可能関数＝
プログラムが作れる関数

Theorem2.8 For every computable function, there is a program in the standard form.

Consider a behavior of program counter.

Further constraints(refer to 101 page of the textbook)
"each statement must be implemented in constant time"
u, u': variables of Σ type,　v,v': variables of Σ* type
c: constant of Σ type,　s: constant of Σ* type
(Substitution)
(1) u:=c;　(2) u:=u';
(3) u:=head(v);　(4) u:=tail(v);
(5) v:=s;　~~(6) v:=v';~~ ?
(7) v:= right(v);　(8) v:=left(v);
(9) v:=u # v;　(10) v:=v # u;
(Comparison)
(11) u=c　(12) v=s

Computable function＝
There exists a program

1/13

2. 計算可能性入門

計算とは何か？
- 「計算できる」ことと「計算できない」ことの違い
  - 「計算」の基本要素(前回)
  - 「計算できない」ことの証明…対角線論法(今回)

2.1. 帰納的関数論概観
帰納的関数論(recursive function theory)
① “計算”とは何かについての研究
② 計算不可能性の証明
③ 計算不可能な関数のクラスの構造的研究
④ 他の数学との関連分野

1/13

Chapter 2: Introduction to Computability

What “Computation” is…
- Difference between “computable” and “incomputable”
  - Basic factor of a “computation” (Done)
  - Proof of “incomputable”…diagonalization (Today)

2.1. Studies on recursive functions
recursive function theory
(1) studies on what is "computation"
(2) proof of incomputability
(3) structural studies on a class of incomputable functions
(4) related mathematics fields

2/13

2. 計算可能性入門

① 計算とは何かについての研究
「何をもって計算可能な関数というか？」

・クリーネが定義した帰納的関数(recursive function)
・チューリングが考えたチューリング機械(Turing machine)

➔帰納的関数全体＝チューリング機械で計算可能な関数全体

計算可能性の定義…チャーチの提唱(Church’s Thesis)

2/13

Chapter 2: Introduction to Computability

(1) Studies on what is computation.
"When do we call a function computable?“

・recursive function theory by Kleene
・Turing machine theory by Turing

➔the whole set of recursive functions
＝the whole set of functions computable by Turing machines

Church's Thesis on the definition of “computability”

3/13

② 計算不可能性の証明
・計算可能性の証明ではプログラムを作ればよい
・計算不可能性の証明では
どんなプログラムも作れないことの証明:
「対角線論法」
「帰納的還元性」

難しい

③ 計算不可能な関数のクラスの構造的研究
難しさに応じて階層化されたクラス
➔構造的研究

④ 他の数学との関連分野
数理論理学(mathematical logic)など

3/13

(2) Proof of incomputability
・Proof of computability is easy: just give a program
・to prove incomputability
must prove that no program exists…
proof tools: diagonalization
recursive reducibility

Difficult!

(3) Structural studies on a class of incomputable functions
hierarchical class depending of hardness
➔structural studies

(4) Related mathematics fields
mathematical logic

4/13

2. 計算可能性入門

2.4. 計算不可能性の証明と対角線論法

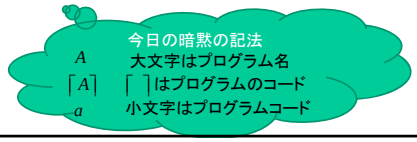
停止問題(停止性判定問題)

入力: プログラム A とそれへの入力 x

出力: Aへ x を与えて実行させると(いつかは)停止するか？

ここでは1入力プログラムの停止問題のみ考えるが，この結果を多入力の場合に拡張することは可能．

(注意)プログラムもΣ^*上にコード化可能．
つまり，A も x もΣ^*上の文字列と考えることができる．



4/13

Chapter 2: Introduction to Computability

2.4. Incomputability Proof and Diagonalization

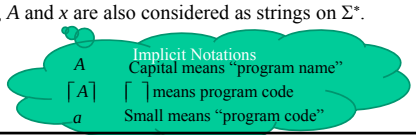
Halting Problem(Problem of deciding whether it halts)

Input: a program A and an input x to it.

Output: Whether does it stop if x is given to A?

Here we only consider the problem only for one-input programs, but we can generalize the argument into the cases of multiple inputs.

(Remark) Programs are also encoded into strings on Σ^*.
That is, A and x are also considered as strings on Σ^*.



5/13

各 $a, x \in \Sigma^*$ に対し，

IsProgram(a)
⇔ [aは1入力の文法的に正しい標準形プログラムのコード]

eval(a, x)
$\equiv \begin{cases} f\_a(x), & \text{IsProgram}(a)\text{のとき}, \\ ?, & \text{その他のとき}. \end{cases}$

$f\_a(x)$: コード a が表すプログラムAに入力 x を加えたときの出力の値．($f_a(x)$は部分関数)

定理2.16: IsProgram と eval はプログラムで実現可能．

IsProgram : コンパイラ(lint)
eval(a, x) : コード a が表すプログラムに x を入力したときの実行をシミュレートすればよい．
つまり，インタープリタ．(エミュレータ)

詳細は4.3節

5/13

for $a, x \in \Sigma^*$

IsProgram(a)
⇔ [a is a one-input grammatically correct standard program]

eval(a, x)
$\equiv \begin{cases} f\_a(x), & \text{if IsProgram}(a), \\ ?, & \text{otherwise.} \end{cases}$

$f\_a(x)$: output value when an input x is given to the program A represented by the code a

Theorem2.16: IsProgram and eval are computable (programmable).

IsProgram : compiler(lint program)
eval(a, x) : it suffices to simulate the behavior of the program for a code a with an input x, i.e. interpreter or emulator

refer to Section 4.3 for detail

6/13

述語Haltの定義

コードaが表現するプログラム

各 $a, x \in \Sigma^*$ に対し
Halt(a, x)
⇔ [IsProgram(a) ∧ [入力 x に対し$\lfloor a \rfloor$ は停止する．]]

例2.1 ループを含んでいても停止性を簡単に判定できる場合．

```
prog B(input w: Σ*): Boolean;
label LOOP;
begin
  if w≠ε then LOOP: goto LOOP
          else halt(0) end-if
end.
```

実際のプログラムは標準形でかかれていると仮定

・Halt($\lceil B \rceil$, ε): 入力εに対しプログラム B は停止．
・任意の $x \in \Sigma^* - \{\varepsilon\}$に対し，¬Halt($\lceil B \rceil$, x)

Bの停止性は容易に判定できる

(注意) eval($\lceil B \rceil, \varepsilon$) = 0 だが，$x \neq \varepsilon$ に対しては
eval($\lceil B \rceil, x$) = ⊥ (未定義)

6/13

Definition of a predicate Halt

Program described by code a

for $a, x \in \Sigma^*$
Halt(a, x)
⇔ [IsProgram(a) ∧ [$\lfloor a \rfloor$ stops for an input x]]

Ex.2.1 Halting is sometimes easily checked even with loops

```
prog B(input w: Σ*): Boolean;
label LOOP;
begin
  if w≠ε then LOOP: goto LOOP
          else halt(0) end-if
end.
```

Assume that the program is written in the standard form

・Halt($\lceil B \rceil$, ε): program B stops for an input ε

・¬Halt($\lceil B \rceil$, x) for any $x \in \Sigma^* - \{\varepsilon\}$
Thus, we can easily check whether B halts or not.

(Remark) eval($\lceil B \rceil, \varepsilon$) = 0 but, for $x \neq \varepsilon$
eval($\lceil B \rceil, x$) = ⊥ (undefined)

7/13

定理2.17 Haltは計算不可能

（証明）

背理法：Haltが計算可能だと仮定して矛盾を導く．
Haltが計算可能➔Haltを計算するプログラムHが存在する．
そのHを用いて，次のようなプログラムXを作る．

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
 label LOOP;
 begin
    if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                else halt(0) end-if
 end.
```

実際には標準形で書かれていると仮定．

プログラム⌊w⌋にwを入力したとき停止するかどうかを
プログラムHを呼び出して判定し，
答が *true* なら無限ループに入り，
答が *false* なら0を出力して停止する，というプログラム

H：プログラム，Halt：述語

7/13

Theorem 2.17: Halt is incomputable.

(Proof)

By contradiction: Assume that Halt is computable.
Halt is computable➔There is a program H to compute Halt.
Using the H, we obtain the following program X.

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
 label LOOP;
 begin
    if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                else halt(0) end-if
 end.
```

Assume that it is written in the standard form

Using the function H we check whether the program ⌊w⌋ stops for an input *w*. If the answer is "HALT" then the program X enters infinite loop, and if it is "DO NOT HALT" then it stops.

H: program or function, Halt: predicate

8/13

$x = \lceil X \rceil$とし，x を
プログラムXに入力
(i) 無限ループに入ってしまう，or
(ii) 0を出力して停止．

X(w)
プログラム⌊w⌋にwを入力したとき停止するか
どうかをプログラムHを呼び出して判定し，
答が *true* なら無限ループに入り，
答が *false* なら0を出力して停止する

(i) を仮定すると…
- プログラムがループに入るから，H (x, x)= *true*
- つまり X(x) は停止する⇒仮定に矛盾

(ii) を仮定すると…
- プログラムが終了するから，H (x, x)=*false*
- つまり X(x) は停止しない⇒仮定に矛盾

どちらの場合も矛盾を生じる。
したがって「Haltは計算可能」という仮定は誤り．
証明終

H：プログラム
Halt：述語

8/13

Let $x = \lceil X \rceil$ and input x to the program X
(i) enters an infinite loop, or
(ii) stops normally with the output 0.

Case (i)
- Since it enters infinite loop, ¬Halt(x, x)
- at the if statement in the program X we have H (x , x)=false
  So, halt(0) is executed (normal termination) : contradiction

Case (ii)
- Since it stops, Halt(x, x) is true.
- at the if statement in the program X we have H (x, x)=true
  So, it enters an infinite loop: contradiction

In either case we have a contradiction.
That is, the assumption that "Halt is computable" is wrong.
End of proof

H: program or function, Halt: predicate

9/13

定理2.17の別証明（対角線論法による）

証明：
計算可能な（1引数の）関数全体の集合をF_1とする．
プログラムのコードはΣ*の元だから，"文法的に正しいプログラムのコード"
を小さい順に
$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$
と（長さ優先の辞書式順序で）並べることができる．
よってF_1の関数を $f\_a_1, f\_a_2, \ldots, f\_a_k, \ldots$ と並べることができ、以下の表をえる。

	a_1	a_2	a_3	…	a_k
f_a_1	1	ε	00		0
f_a_2	0	⊥	1		ε
f_a_3	0	11	0		11
:	.....				
:	.....				
f_a_k	ε	ε	1		0

$f_a_i(a_j)$の値

9/13

Another proof of Theorem 2.17 (by diagonalization)

Proof:
Let F_1 be a set of all computable functions (with one argument) .
Since each program code is in Σ*, we can enumerate all grammatically correct program codes
$a_1, a_2, \ldots, a_k \ldots$
in the psuedo-lexicographical order. *Thus, we can also enumerate all the functions in* F_1:
$f\_a_1, f\_a_2, \ldots, f\_a_k, \ldots$
that gives the following table:

	a_1	a_2	a_3	…	a_k
f_a_1	1	ε	00		0
f_a_2	0	⊥	1		ε
f_a_3	0	11	0		11
:	.....				
:	.....				
f_a_k	ε	ε	1		0

The value of $f\_a_i(a_j)$

10/13

定理2.17の別証明（対角線論法による）

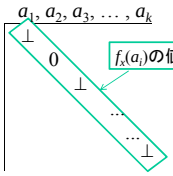
証明：
ここで Halt が計算可能なら、それを計算するプログラム H が存在する。
そして H を使うと以下の関数 f_x が計算可能であることがわかる。

$f_x(a) = \perp$, Halt(a, a)のとき
$= 0$, その他のとき

先の表と照らし合わせると…

	a_1	a_2	a_3	…	a_k
f_a_1	①	ε	00		0
f_a_2	0	⊥	1		ε
f_a_3	0	11	0		11
:					
:					
f_a_k	ε	ε	1		0

f_a_iの値



どんな整数 i に対しても以下が成立：
$f\_a_i(a_i) \neq f_x(a_i)$
よって f_x は F_1 の中に現れない！

よって $f_x(a)$ は F_1 の要素ではない。つまり Halt は計算可能ではない。

10/13

Another proof of Theorem 2.17 (by diagonalization)

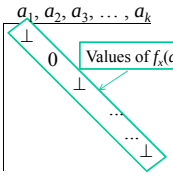
Proof:
If Halt is computable, there exists a program H that computes Halt.
Using H, we can compute the following function f_x.

$f_x(a) = \perp$, if Halt(a, a)
$= 0$, otherwise

Comparing to the table…

	a_1	a_2	a_3	…	a_k
f_a_1	①	ε	00		0
f_a_2	0	⊥	1		ε
f_a_3	0	11	0		11
:					
:					
f_a_k	ε	ε	1		0

Values of f_a_i



For any integer i, we have:
$f\_a_i(a_i) \neq f_x(a_i)$
Thus f_x does not appear in F_1!

Hence $f_x(a)$ is not an element in F_1. Therefore, Halt is not computable.

11/13

[関数]の個数は[計算できる関数]の個数よりも``多い''

対角線論法：
ある要素が無限集合に属さないことを示すための論法。
ある関数の集合 G が与えられたとき，その集合に属さない関数 g を構成する方法を与えている。
こうして構成した g は、対角成分がつねに異なるため、関数集合 G には属さない。

11/13

The number of *functions* is "greater" than the number of *computable functions*.

Diagonalization
Given a set G of functions, construct a function g which does not belong to G.

12/13

対角線論法

可算無限集合： 自然数全体の集合との間に1対1対応がある集合のこと.
可算集合：有限または可算無限である集合のこと.
つまり，1つずつ要素を取り出してきて，もれなく書き並べられるもの

例1. 正の偶数全体の集合Eは可算無限である.
自然数全体の集合Nの要素 i と，Eの要素 $2i$ を対とする1対1対応がある.
例2. 整数全体の集合Zは可算無限である.
1対1対応がある．または，Z={0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...}と列挙できる.
例3. 有理数全体の集合は可算無限である.（なぜか？）

定理：実数全体の集合Rは非可算である.

12/13

Diagonalization

Enumerable infinite set： **a set with one-to-one correspondence with the set of all natural numbers**
Enumerable set: finite or enumerable infinite set.
that is, a set whose elements are enumerable one by one.

Ex.1. The set E of all even positive integers is enumerable infinite.
one-to-one correspondence between an element i of the set of all natural numbers and an element $2i$ of the set E
Ex.2. The set Z of all integers is enumerable infinite.
We can enumerate them as Z={0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...}.
Ex.3. The set R of all rational numbers is enumerable infinite.（Why?）

Theorem: The set R of all real numbers is not enumerable.

定理：実数全体の集合Rは非可算である． 13/13

0以上1未満の実数全体の集合Sが非可算であることを対角線論法で証明する．
可算であると仮定すると，すべての要素を書き並べることができる：

$0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$
$0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$
$0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}\cdots$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots$　ただし，$a_{ij} \in \{0,1, \ldots , 9\}$

$0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$
$0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$
$0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}\cdots$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots\ a_{kk}$

上の並びで対角線上にある数に注目し，新たな無限小数
$x = 0.b_1b_2b_3\ldots$
を作る．ここで，
if a_{kk}=1 then $b_k = 2$ else b_k=1
としてb_kを定める．
このように作られた無限小数は明らかに0と1の間の実数である．
しかし，作り方から，上に列挙したどの要素とも等しくない（対角線の所で必ず異なる）．
つまり，xはSに属さないことになり，矛盾である．
したがって，Sが可算であるという仮定に誤りがある．

Theorem: The set *R* of all real numbers is not enumerable. 13/13

Using the diagonalization we prove that the set S of all real numbers between 0 and 1 is not enumerable. By contradiction, we assume that it is enumerable:

$0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$
$0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$
$0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}\cdots$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots$　where $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots , 9\}$

$0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$
$0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$
$0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}\cdots$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots\ a_{kk}$

Define a new real number x by collecting those digits in the diagonal
$x = 0.b_1b_2b_3\ldots$
where b_k is defined by
if a_{kk}=1 then $b_k = 2$ else b_k=1

The number x defined above is obviously between 0 and 1, but it is different from any number listed above since it is different at its diagonal position.
That is, x does not belong to S, which is a contradiction.
Therefore, our assumption that S is enumerable is wrong.