I216 計算量の理論と離散数学 Report

2010 年度 1-1 期 (4〜5 月)

担当: 上原 隆平 (uehara@jaist.ac.jp)

出題 (Propose): 4 月 15 日 (木) (April 15 (Thu))

提出 (Deadline): 4 月 22 日 (木) 講義開始時 9:20 (April 22 (Thu), 9:20)

注意 (Note): レポートには氏名，学生番号，問題，解答を，すべて手書きで書くこと．(Do not forget to handwrite your name, student ID, problems, and answers on your report.)

以下の問題に答えよ．(Answer the following problems.)

Problem 1 (3 points): 文字列 x に対して，長さ優先辞書式順序における x の出現順序を $lo(x)$，通常の辞書式順序における x の出現順序を $oo(x)$ と書くことにする．例えば $lo(\epsilon) = oo(\epsilon) = 1$，$lo(0) = oo(0) = 2$，$lo(1) = 3$，$oo(00) = 3$ である．またある数 n が有限であることを $n < \infty$ と書くことにする．このとき以下の記述が正しいか誤りかを判定せよ．誤りである場合は反例を示せ．ただし以下の記述中，x は文字列，n は正整数である．(For any given string x, we denote by $lo(x)$ and $oo(x)$ the indices of x in the pseudo-lexicographical ordering with length preferred and the usual lexicographical ordering, respectively. For example, we have $lo(\epsilon) = oo(\epsilon) = 1$, $lo(0) = oo(0) = 2$, $lo(1) = 3$, and $oo(00) = 3$. We also denote by $n < \infty$ when a number n is finite. Now, declare if each of the followings is true or false. If it is false, show a counterexample. In the followings, x denotes a string and n denotes a positive integer.)

$$\forall x \, \exists n \, [\ |x| < \infty \to lo(x) < n\ ] \tag{1}$$

$$\exists n \, \forall x \, [\ |x| < \infty \to lo(x) < n\ ] \tag{2}$$

$$\overset{\infty}{\forall} x \, [\ |x| < \infty \to oo(x) < \infty\ ] \tag{3}$$

$$\overset{\infty}{\exists} x \, [\ |x| < \infty \to oo(x) < \infty\ ] \tag{4}$$

Problem 2 (3 points): 自然数の集合 N は可算無限集合である．N の部分集合の集合 2^N は非可算無限集合であることを対角線論法で証明せよ．(The set N of natural numbers is enumerable. Now, prove that the set 2^N of subsets of N is *not* enumerable by diagonalization.) (Hint: For $S = \{1, 2, 3\}$, we have $2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.)

Problem 3 (4 points): 以下の式は正しいか．正しければ証明し，間違っていれば反証せよ．必要ならロピタルの定理を使ってもよい．(Determine if each of the following equations is correct or wrong. If it is correnct, prove it. If it is wrong, disprove it. You can use l'Hospital's rule if you need it.)

1. $3n^3 + 4n^2 = O(n^2 + n)$
2. $3n^2 + 3n = O(n^8 + 2)$
3. $n = O(\log n)$
4. $\log n = O(n)$
5. $n^8 = O(2^n)$