I118 グラフとオートマトン理論
Graphs and Automata

担当: 上原 隆平(Ryuhei UEHARA)
uehara@jaist.ac.jp
http://www.jaist.ac.jp/~uehara/

1. 命題，論理 (Propositions, Logic)

1.1 命題変数とその記法

- **命題(Proposition)**: **真** (**True**, ***T***) か**偽** (**False**, ***F***) か，いずれかの{文，主張，言説}
- **命題変数(variable)** … 命題を集合 $V = \{T, F\}$ 上の変数と見なす
- 論理記号(symbols)
  - **論理的同値(equivalence)** ⇔
    命題 p, q の真偽が常に一致 $p \Leftrightarrow q$
  - **否定(NOT)** ￢
  - **論理和(OR)** ∨
  - **論理積(AND)** ∧
  - **含意(implication)** →

命題の例:
× 田町の駅前には
おいしい定食屋がある。
○ 田町の駅から100m以内に
ラーメン屋が2件以上ある。

1.2 基本的な論理演算 – 真理値表

1. NOT ￢

p	$\neg p$
T	F
F	T

2. AND ∧

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3. OR ∨

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. Implication →

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

※ $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ に注意

※ 次の式はド・モルガンの法則として知られている

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

[Ex] 上記の式を確かめよ
(Check the equivalence)

1.3 限定記号と述語

- **述語**，**命題関数** $P(x)$ … 変数 x の値に依存して，真偽値が決まる
  - 例:

$$\mathrm{prime}(n) = \begin{cases} T & n\text{が素数のとき} \\ F & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 限定記号
  - **全称記号** ∀
    すべての x について $P(x)$ … $\forall x P(x)$
    (For all x, $P(x)$ holds)
  - **存在記号** ∃
    ある x について $P(x)$ … $\exists x P(x)$
    (For some x, $P(x)$ holds)

限定記号は前から適用

否定すると反転する:
$\neg \forall x P(x) = \exists x \neg P(x)$
$\neg \exists x P(x) = \forall x \neg P(x)$

1.4 論理式の例

[Ex] それぞれの論理式を確かめよ。
Check them.

R: すべての実数の集合

- $(\forall x \in R)(\forall y \in R)\left[x^2 + y^2 \geq 2xy\right] \cdots \text{True}$
- $(\exists x \in R)(\forall y \in R)\left[x + y = 0\right] \cdots \text{False}$
- $(\forall x \in R)(\exists y \in R)\left[x + y = 0\right] \cdots \text{True}$

- $(\forall x \in \{T, F\})(\exists y \in \{T, F\})\left[x \vee y = F\right] \cdots \text{False}$
- $\neg(\forall x \in \{T, F\})(\exists y \in \{T, F\})\left[x \vee y = F\right]$
  $= (\exists x \in \{T, F\})(\forall y \in \{T, F\})\neg\left[x \vee y = F\right]$
  $= (\exists x \in \{T, F\})(\forall y \in \{T, F\})\left[\neg x \wedge \neg y = F\right]$
  $= (\exists x \in \{T, F\})(\forall y \in \{T, F\})\left[x \wedge y = F\right] \cdots \text{True}$

2. 集合
Sets

2.1 集合の基本

集合の集合も集合。

- **集合** … 明確に区別できるものの集まり
- **要素** (あるいは**元**)
  - aが集合Aの要素であるとき $a \in A$
  - aが集合Aの要素でないとき $a \notin A$
- **空集合**… 要素のない集合 φ
- 対象全体からなる集合 … **全体集合**U
- $|A|$ … A が有限集合のとき, A の要素の個数

2.2 いくつかの重要な集合

- N … (0を含む)自然数全体の集合 (0を含まない定義もある)
- Z … 整数全体の集合
- Q … 有理数全体の集合
- R … 実数全体の集合
- C … 複素数全体の集合

[参考] 濃度 (基数)

- 背景:自然数の集合も実数の集合も無限集合である. しかし, 明らかに自然数よりも実数の方が「多い」ように思われる
- 集合の濃度, およびその大小について
- 集合 A と集合 B の間に全単射が存在するとき,

$$|A| = |B|$$

とする. $|A|$ を集合 A の**濃度**という.

[Ex]
偶数は整数より
"多い"のか？

[参考] 有限／無限集合の濃度

- n 個の要素を持つ有限集合の濃度 … n
- 自然数の集合の濃度 ($|N|$) … $\aleph_0$ (アレフゼロ)
  - 濃度が $\aleph_0$ であるような集合 … **可算無限**
  - 有限または可算無限であるような集合 … **可算**
  - 可算でない集合 … **非可算**
- 実数の集合の濃度 ($|R|$) … $\aleph$

[参考] 濃度の大小

- 集合 A, B について, B の部分集合 S で, $|S| = |A|$ となるものが存在するとき,

$$|A| \le |B|$$

さらに $|A| \ne |B|$ であるとき,

$$|A| < |B|$$

- 対角線論法により R は非可算であることが示せるので (証明は教科書を参照), 結局, 濃度について

$$0 < 1 < 2 < \cdots < n < \cdots < \aleph_0 < \aleph$$

連続体仮説: ここに他の「無限」はあるのか？

2.3 集合の定義法・記法(1)

- $A=\{1,2,3,4\}$ … **外延的定義**・記法
- $A=\{\underbrace{x \mid x\text{は4以下の正整数}}_{P(x)}\}$ …**内包的定義**・記法
- 例：空集合の定義

$$\phi=\{\ \}\cdots\text{外延的記法}$$

$$\phi=\{x \mid x\in R,\ x^2+1=0\}\cdots\text{内包的記法 (その1)}$$

$$=\{x \mid x\neq x\}\cdots\text{内包的記法 (その2)}$$

13/19

2.3 集合の定義法・記法(2)

- **部分集合**
  - 2つの集合 A と B とが与えられ，A のすべての要素が B の要素でもあるとき．

$$A\subseteq B$$

  - 例：任意の集合A について，　$\phi\subseteq A$
    （理由は各自考えてみよ）
- 集合 A と B とが等しい　$A=B$
  - A と B とが同じ要素からなるとき．このとき，$A\subseteq B$ かつ $B\subseteq A$ である．

14/19

2.3 集合の定義法・記法(3)

- **族(Family)**
  - 集合 I が与えられ，任意の $i\in I$ において要素 x_i を考えることができるとき，

$$\{x_i\}_{i\in I}$$

を**族(Family)**とよび，I を**添字集合** (index set) という．

通常、「族」や「クラス」は**集合の集合**を表す。

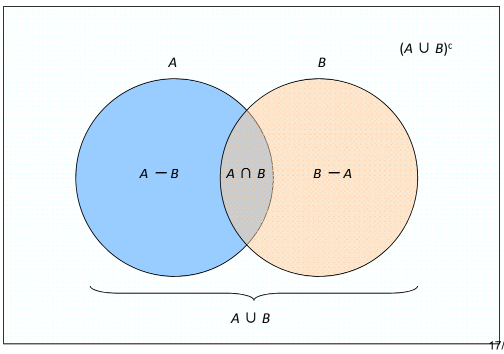
15/19

2.4 集合の演算(1)

- 和集合　$A\cup B=\{x \mid x\in A\vee x\in B\}$
- 積集合　$A\cap B=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}$
- 差集合　$A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$
- 補集合　$A^c=\{x \mid x\notin A\}$

16/19

2.4 ベン図 (Venn diagram)



17/19

2.4 集合の演算(2)

- **順序対** … 順序を考慮に入れた二つの要素
- **直積** … 順序対の集合

$$A\times B=\{(a,b) \mid a\in A\wedge b\in B\}$$

- **べき集合** … ある集合のすべての部分集合の集合．$P(A),\ 2^A$　などと書く．
  - 例：$A=\{1, 2, 3\}$ のとき，

$$2^A=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

（空集合が含まれることに注意！）

18/19

2.5 直和分割

- 集合の族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が**<u>互いに素</u>**
  - … $i \neq j$ のとき $A_i \cap A_j = \phi$ となるとき
  - このとき, $A = \cup_{i \in I} A_i$ を**<u>直和</u>**といい, $\{A_i\}_{i \in I}$ を A の**<u>直和分割</u>**という

例:
A={1,2,a} のとき、
2^A={φ,{1},{2},{a},{1,2},{1,a},{2,a},{1,2,a}}
A_i=2^Aのi番目の要素とおけば、{A_3, A_6} は
A の直和分解。

19/19