I118 グラフとオートマトン理論
Graphs and Automata

担当: 上原 隆平(Ryuhei UEHARA)

uehara@jaist.ac.jp

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/

5. 集合と計数
(Set and Counting)

5.1 基本公式

$$1.\ |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$2.\ |A \times B| = |A| \times |B|$$

$$3.\ |2^A| = 2^{|A|}$$

[参考] 包除原理（inclusion exclusion principle）

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|A_i\right| - \sum_{i_1<i_2} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2}\right|$$

$$+ \sum_{i_1<i_2<i_3} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right| - \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right|$$

5.2 数え上げ

- ボール投げの問題 (balls and bins) を題材とする
  - 占有問題 (occupancy problem) とも呼ばれ，応用上きわめて重要
- ボールの数(# of balls) … n 個
- 箱の数(# of bins) … k 個

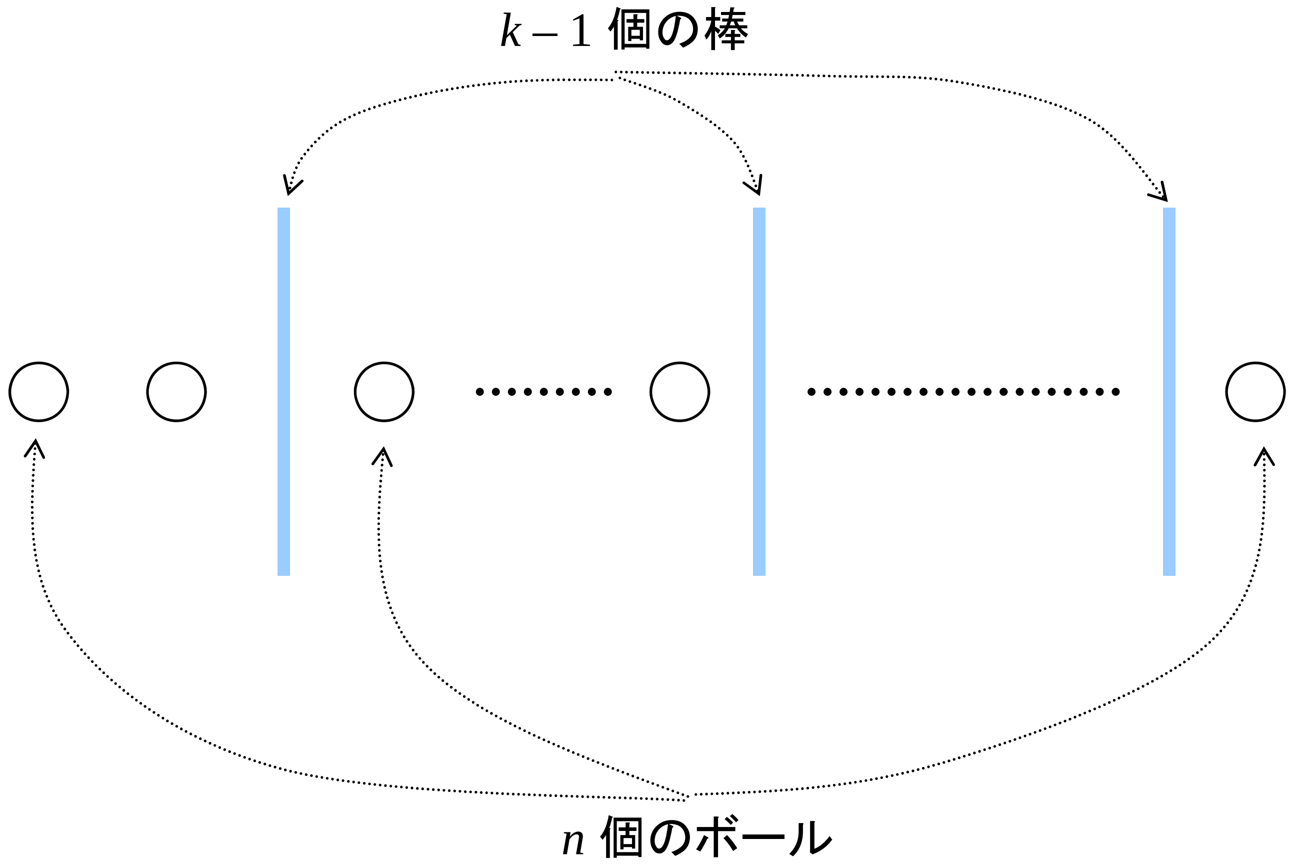
例1

- n 個の区別できないボールを，1からkまで番号付けられた箱に入れる方法は何通りあるか（$k \leqq n$）．ただし，空箱は許さないものとする．

- 答

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

例1の解説



$n-1$ 個のすきまに, $k-1$ 個の棒を入れる場合の数と同じ

例2

- 1からnまで番号付けられたボールを，k 個の区別できない箱に入れる方法は何通りあるか（$k \leqq n$）．ただし，空箱は許さないものとする．

S_k^n … (第2種の)スターリング数

- 答
  - $k = 1$, $k = n$ のとき $S_1^n = S_n^n = 1$
  - $1 < k < n$ のとき

$$S_k^n = S_{k-1}^{n-1} + kS_k^{n-1}$$

(*n*番のボールが1つだけ)
+
(*n*番のボールが他と同じ)

例3

- ボールにも箱にも番号が付いていない場合は？
  ただし，$k \leqq n$で，空箱は許さない．
  P_k^n … n の k 部分への分割数, partition
- P_k^n は，
  $$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$
  を満たす整数列 $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ の総数
  ただし，$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$
- 答
  - $k = 1, k = n$ のとき　$P_1^n = P_n^n = 1$
  - $n > k$ のときは，
  $$P_k^n = P_1^{n-k} + P_2^{n-k} + \cdots + P_k^{n-k}$$

$n>k$　なら
$P_k^n = 0$

はじめにk個のボールを
一つづつk個の箱に
入れておく。
あとは残りのn-k個の
ボールを
- 1個の箱に入れる場合
  …
- k個の箱に入れる場合

を考える。

例4

- 最後のケース．ボールも箱も区別できる場合は？
ただし，空箱は許さない．

- 答．S_k^n を使えば簡単． $k!S_k^n$

演習: 例1に $n!$ をかけるのではだめか？だめならなぜか?

より進んだ話題…

- それぞれの問題で空き箱を許したケースは、より難しい(場合もある)。
  - 例えば例1（n個の区別できないボールをk個の番号付けられたビンに入れる場合）で空き箱を許した場合は

$$\binom{n+k-1}{k}$$

通り。

おまけ

- こうした数列の解析には
  - 母関数(generating function)
  - たたみ込み(convolution)

  と呼ばれるテクニックが有効。

「理系にとって最強の萌え!」
だそうです。

間違いなくバイブル