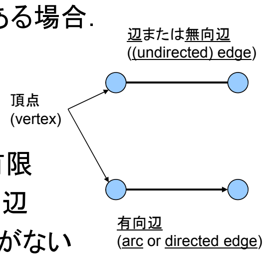
I118 グラフとオートマトン理論
Graphs and Automata

担当: 上原 隆平(Ryuhei UEHARA)
uehara@jaist.ac.jp
http://www.jaist.ac.jp/~uehara/

6. グラフ
Graphs

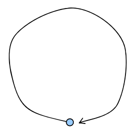
6.1 グラフの基本概念

- グラフの直感的定義: いくつかの(頂)点とそれらを結ぶ線分(辺あるいは枝)からなる図形.
- <u>有向辺</u> … 辺に方向がある場合.
- <u>グラフ</u> $G = (V, E)$
  - V … 頂点の集合
  - E … 辺の集合
- <u>有限グラフ</u> … V, E が有限
- <u>有向グラフ</u> … 辺が有向辺
- <u>無向グラフ</u> … 辺に向きがない

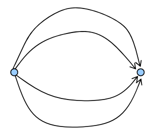


6.2 グラフにおける辺

- **<u>自己閉路(self-loop)</u>**
  両端点が同一の辺.
- **<u>多重辺</u>** (並列辺) **(multiple edge)**
  両端点を共有する複数の辺.
- **<u>多重グラフ(multiple graph)</u>**
  自己閉路または多重辺を持つグラフ.
- **<u>単純グラフ(simple graph)</u>**
  自己閉路も多重辺も持たないグラフ.



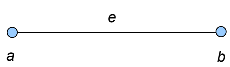
self-loop



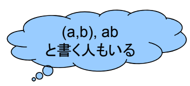
multi-edges

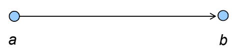
6.3 辺の接続

- グラフ $G = (V, E)$ の辺 $e \in E$ の両端点が a, $b \in V$ であるとき, 辺 e は頂点 a, b に**<u>接続している(incident)</u>**, あるいは a, b を**<u>端点(endpoint)としている</u>**という.
  - またこのとき, a, b は**<u>隣接している(adjacent)</u>**という.



- 辺 $e = (a, b)$
  - 有向グラフの場合
    - 辺 (a, b) … a から b への方向を持つ辺. 辺 (a, b) は, 頂点 a, b に, それぞれ**<u>正, 負の向きに接続している</u>**という.
    - a … **<u>始点</u>**, b … **<u>終点</u>**.
  - 無向グラフの場合
    - $\{a, b\}$, $\{b, a\}$ は同一の辺を意味する(順序対ではない).



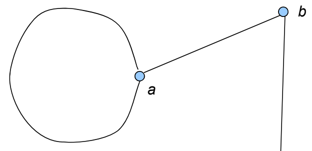


  - グラフに多重辺がない場合, $E \subseteq V \times V$ とできる.

6.4 次数(degree)

- (頂点の) 次数(degree)$\delta : V \to N$
  - 無向グラフにおける頂点 *a* の**次数** … *a* に接続している辺の数.
  - 有向グラフの場合
    - **正の次数(出次数)**: δ^+
      ある頂点に正の向きに接続している辺の数.（出て行く辺の数）
    - **負の次数（入次数）**: δ^-
      ある頂点に負の向きに接続している辺の数.（入ってくる辺の数）
    - 有向グラフにおける次数 $\delta(a) = \delta^+(a) + \delta^-(a)$

無向グラフにおける次数の例

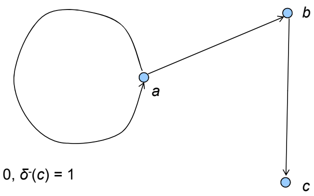


δ(*c*) = 1

δ(*b*) = 2

δ(*a*) = 3　←注意！自己閉路の場合は，二重にカウントする

有向グラフにおける次数の例



$\delta^+(c) = 0$, $\delta^-(c) = 1$

$\delta^+(b) = 1$, $\delta^-(b) = 1$

$\delta^+(a) = 2$, $\delta^-(a) = 1$　←注意！

- 次数に関する重要な公式

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

  - 有向グラフの場合，さらに以下が成立

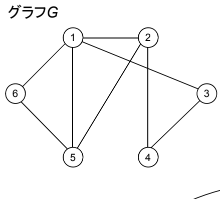
$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v) = |E|$$

6.5 グラフの同型(Graph Isomorphism)

- 直感的な説明 … グラフ *G*, *G*' とが同型であるとは，*G*の頂点の名前を辺の関係を維持したままで *G*' のものに変更できる場合.
- 二つのグラフ *G* = (*V*, *E*), *G*' = (*V*', *E*') が**同型(isomorphic)**であるとは，ある全単射 $\varphi : V \to V'$ が存在して，以下の条件を満たすことを言う. $\{a,b\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(a), \varphi(b)\} \in E'$

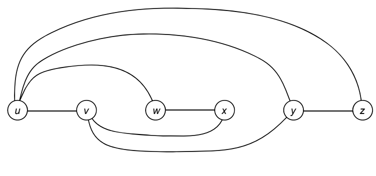
同型グラフの例

グラフ*G*



$\varphi(1) = u$
$\varphi(2) = v$
$\varphi(3) = w$
$\varphi(4) = x$
$\varphi(5) = y$
$\varphi(6) = z$

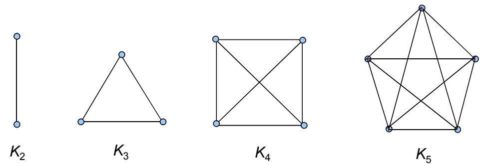
グラフ*G*'



6.6 いろいろなグラフ

- **<u>完全グラフ(Complete graph)</u>**
  異なるどの二つの頂点の間にもただ1個の辺がある単純グラフ.
- **<u>部分グラフ(subgraph)</u>**
  グラフ $G' = (V', E')$ がグラフ $G = (V, E)$ の<u>部分グラフ</u>であるとは, $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ が成立することをいう.

いくつかの完全グラフ

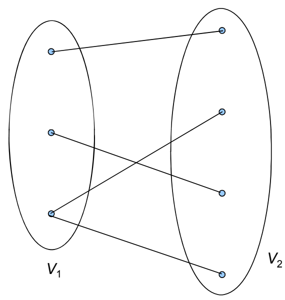


- **<u>誘導されたグラフ((vertex) induced subgraph)</u>**
  単純グラフ $G = (V, E)$ と $V' \subseteq V$ が与えられたとする. このとき, <u>V' に誘導された G のグラフ</u> $G' = (V', E')$ は以下で与えられる.

$$G' = (V', E \cap (V' \times V'))$$

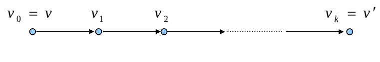
- **<u>2部グラフ(bipartite graph)</u>**
  グラフ$G = (V, E)$が2部グラフであるとは, $V_1, V_2 \subseteq V$ が存在して, 以下の二つの条件を満たす.
  - $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \phi$
  - 任意の辺は, 一方の端点を V_1 に持ち, 他方の端点を V_2 に持つ.

2部グラフの例

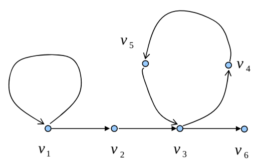


6.7 経路(path)

- グラフ $G = (V, E)$, $v, v' \in V$ において, v から v' への長さ k ($\geqq 1$) の**<u>経路(path)</u>** とは, 頂点の列 $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ で,
  $v_0 = v$, $v_k = v'$, $(v_{i-1}, v_i) \in E$ $(i = 1, \ldots, k)$
  を満たすものを言う.



経路の例



$$(v_1, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_6)$$

- **単純な経路(simple path)** … $v_0, v_1, \cdots, v_k$ がすべて異なる.
- **閉路(cycle)** … $v = v'$ であるような経路 (少なくとも一つの辺を持つ)
- **単純な閉路(simple cycle)** … $v_1, v_2, \cdots, v_k$ がすべて異なる.

- $v = v'$ であるか, v から v' への経路が存在するとき, v' は v から**到達可能(reachable)**であるという.
- 閉路がないグラフ … **アサイクリック(acyclic)**
- 特に, 閉路がない有向グラフ DAG (directed acyclic graph)

6.8 連結性(connectivity)

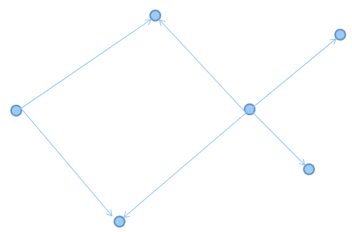
- 頂点 u, v が $u = v$ であるか, ある頂点の列 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ が存在して以下の条件を満たすとき, u, v は**連結可能**であるという
  - $u = v_0, v = v_k$
  - $\forall i \in \{1, \dots, k\}\left[(v_{i-1}, v_i) \in E \vee (v_i, v_{i-1}) \in E\right]$

どの2つの頂点も連結可能であるようなグラフは**連結(connected)**であるという.

6.9 連結成分(connected component)

- $u \sim v$ … 2つの頂点 u, v が連結可能であるとき.
- 「$\sim$」は明らかに同値関係
- ここで,
  - $\sim$ におけるVの同値類 $V_1, V_2, \cdots, V_k$
  - 始点および終点が $V_i \ (1 \le i \le k)$ に含まれる辺の集合を E_i
- $G_i = (V_i, E_i)$ … **連結成分**

連結グラフの例



すべての頂点の間に経路があるわけではないが,
すべての頂点の組は連結可能, グラフは連結である.

6.10 有向グラフにおける強連結性 (strong connectivity)

- $u \leftrightarrow v$ … 二つの頂点 u, v がたがいに到達可能であるとき.
- $\leftrightarrow$ は同値関係.
  - $\leftrightarrow$ におけるVの同値類 $V_1, V_2, \cdots, V_k$
  - 始点および終点が $V_i \ (1 \le i \le k)$ に含まれる辺の集合を E_i
- $G_i = (V_i, E_i)$ … **強連結成分**

強連結成分の例