

2. 有限オートマトン(2): (テキスト2.3.5~2.3.7,2.5)

前回の復習

- DFA $A_D=(Q_D,\Sigma,\delta_D,q_D,F_D)$ によって受理される言語

$$L(A_D)=\{w \mid \delta_D^\wedge(q_D,w) \in F_D\}$$

$$\delta_D: Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

次の状態はいつでも一意的に決まる

- NFA $A_N=(Q_N,\Sigma,\delta_N,q_N,F_N)$ によって受理される言語

$$L(A_N)=\{w \mid \delta_N^\wedge(q_N,w) \cap F_N \neq \Phi\}$$

$$\delta_N: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$$

次の状態は一意的に決まらず、複数の状態の集合となる

2. 有限オートマトン(2)

2.3.5. 決定性と非決定性の有限オートマトンの等価性

定理: NFAで受理できる言語のクラスと、DFAで受理できる言語のクラスは一致する。

○
○
○
おまけ: ‘集合の集合’ のことは特に**クラス(Class)**または**族(Family)**と呼ぶ。

2. 有限オートマトン(2)

2.3.5. 決定性と非決定性の有限オートマトンの等価性

証明: NFAで受理できる言語のクラス N と、DFAで受理できる言語のクラス D が一致することを示す。

- $D \subseteq N$ は定義より明らかなので、 $N \subseteq D$ を示せばよい。
- 任意の言語 $L \in N$ が $L \in D$ となることを示せばよい。

ある言語 L が $L \in N$ であったとする。このとき、 L を受理する NFA $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_L と同じ言語を受理する DFA A_L' を構成する。

2. 有限オートマトン(2)

証明: NFAで受理できる言語のクラス N と、DFAで受理できる言語のクラス D が一致することを示す。

$L \in N$ を受理する NFA $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。
 A_L と同じ言語を受理する DFA A_L' を構成する。

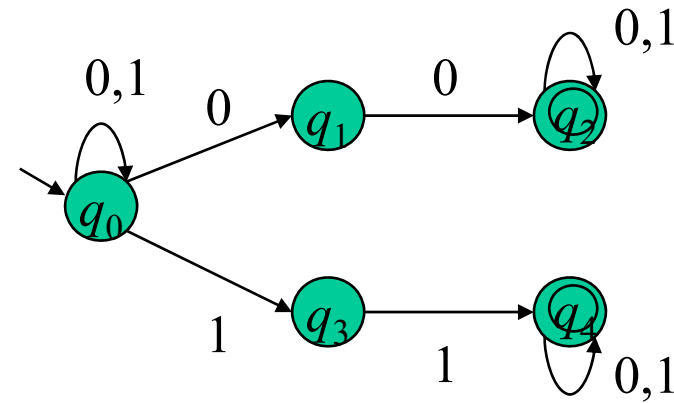
証明の直感的アイデア:

- DFAは**状態がいつも1つだけ**決まっている。
 - NFAは**状態の集合**が入力に応じて変化する。
- NFAの**状態の集合**をDFAの**1つの集合**とみなす!!
サブセット構成(Subset construction)

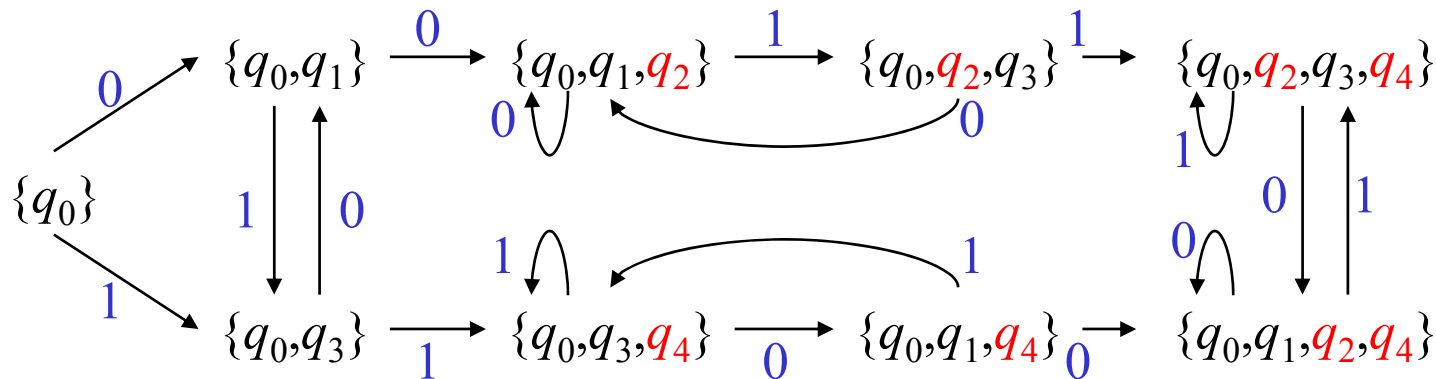
2. 有限オートマトン(2)

例:

δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$	Φ
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	Φ	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$



下図はDFAと見なせる



2. 有限オートマトン(2)

証明: NFAで受理できる言語のクラス N と、DFAで受理できる言語のクラス D が一致することを示す。

$L \in N$ を受理する NFA $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_L と同じ言語を受理する DFA A_L' を次のように構成する。

$$A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}$$

- 状態集合は A_L の状態集合 Q_N の集合族
- 初期状態 $\{q_N\}$ は ' q_N だけからなる集合' であり、 q_N ではない
- δ_D と F_D を定義する必要がある。

2. 有限オートマトン(2)

証明:

$L \in N$ を受理する NFA $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。
 A_L と同じ言語を受理する DFA A_L' を次のように構成する。

$$A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}$$

– δ_D と F_D を定義する必要がある。

$$F_D = \{S \mid S \in 2^{Q_N}, S \cap F_N \neq \phi\}$$

2. 有限オートマトン(2)

証明:

$L \in N$ を受理する NFA $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_L と同じ言語を受理する DFA A_L' を次のように構成する。

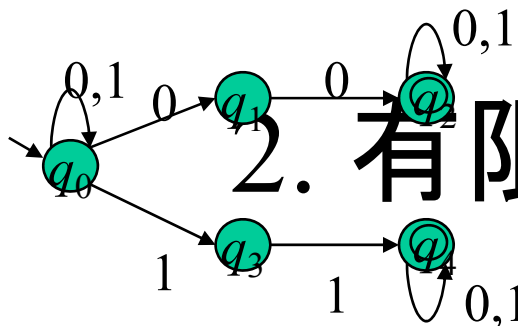
- δ_D と F_D を定義する必要がある。

(1) 各時点で
NFA A_L の取り
得る状態の
集合
($2^{|Q_N|}$ 通り)

	0	1
Φ	Φ	Φ
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	Φ
$\{q_0, q_1, \dots, q_k\}$	$\{\dots\}$	$\{\dots\}$

(2) Σ の要素 (NFA A_L への可能な入力; $|\Sigma|$ 通り)

(1) の各状態において、(2) の入力を与えた場合に遷移できるすべての状態の集合

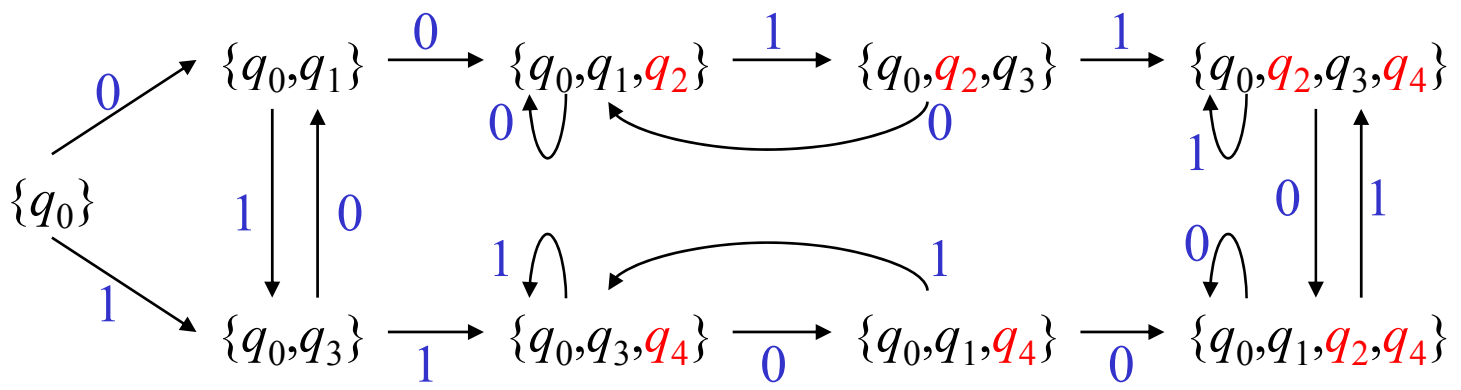


2. 有限

例:

δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$	Φ
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	Φ	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

		入力	
		0	1
(1)	Φ	Φ	Φ
(2)	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
(3)	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	Φ
(4)	$\{q_2\}$ 現在の	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
(5)	$\{q_3\}$ 状態の	Φ	次の時刻に可能な
(6)	$\{q_4\}$ 集合	$\{q_4\}$	状態の集合
(7)	$\{q_0, q_1\}$ 通り	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$
(8)	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$
...			
(32)	$\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_4\}$	$\{q_0, q_2, q_3, q_4\}$



2. 有限オートマトン(2)

証明: NFAで受理できる言語のクラス N と、DFAで受理できる言語のクラス D が一致することを示す。

$L \in N$ を受理する NFA $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_L と同じ言語を受理する DFA A_L' を次のように構成する。

$$A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}$$

- 状態集合は A_L の状態集合の集合族
- 初期状態 $\{q_N\}$ は ' q_N だけからなる集合' であり、 q_N ではない
- δ_D と F_D の定義方法は前述の通り。

証明すべきこと: $\hat{\delta}_N(q_N, w) \cap F_N \neq \Phi$ である必要十分条件は

$$\hat{\delta}_D(\{q_N\}, w) \in F_D$$

$\Rightarrow |w|$ に関する帰納法で、**計算の同等性**を証明する。(省略)

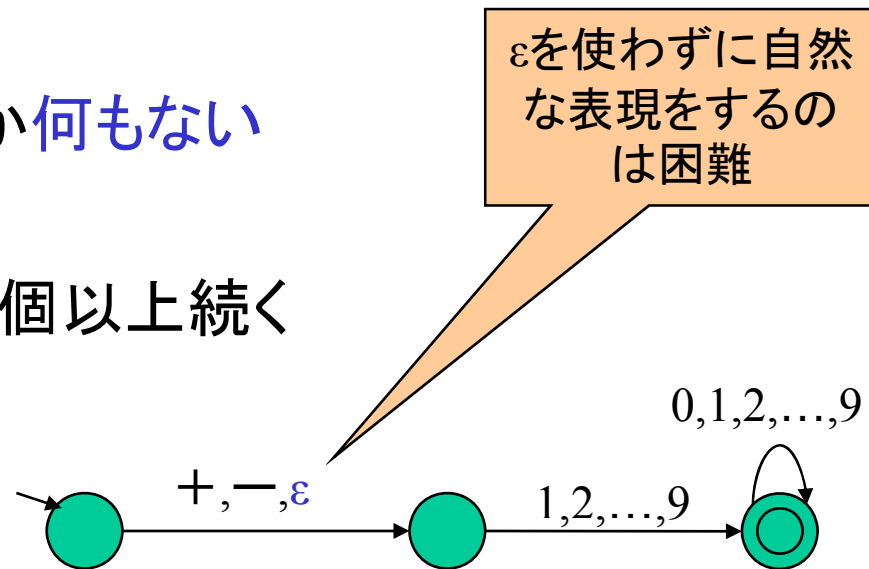
2. 有限オートマトン(2)

2.5. ϵ -動作を含む有限オートマトン(ϵ -NFA)

- 「入力」として「空文字 ϵ 」を許す。つまり入力を読まずに状態を変化することを許す。

例: 「0でない整数」

1. 最初は「+」か「-」か何も無い
2. 次は1~9が1つ
3. それ以降は0~9が0個以上続く

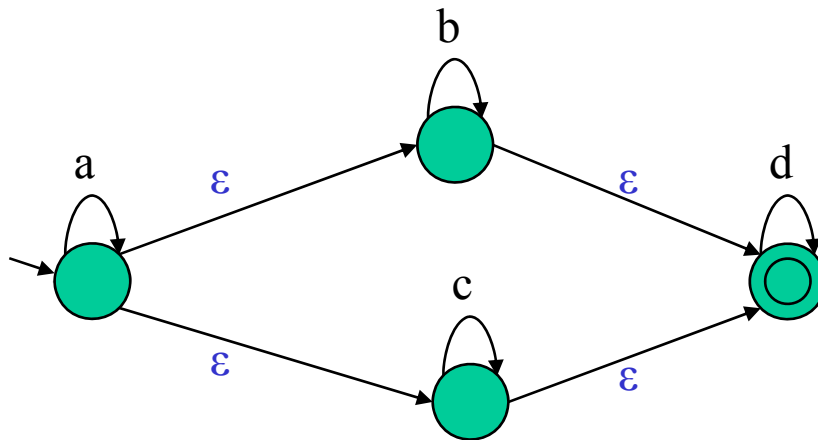


2. 有限オートマトン(2)

2.5. ϵ -動作を含む有限オートマトン(ϵ -NFA)

例:

1. まずaが0個以上続き、
2. 次に[bが0個以上]または[cが0個以上]続き、
3. 最後にdが0個以上続く



ϵ を使わずに自然な表現をするのは困難

2. 有限オートマトン(2)

2.5. ϵ -動作を含む有限オートマトン(ϵ -NFA)

– ϵ -NFA $A=(Q,\Sigma,\delta,q,F)$ の定義:

- Q : 状態集合
- Σ : アルファベット
- $\delta: Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \rightarrow 2^Q$
- q : 初期状態
- F : 受理状態

– ϵ -NFA A によって受理される言語...

- δ の定義??

^

2. 有限オートマトン(2)

2.5. ε -NFAとDFAの等価性

証明: ε -NFAで受理できる言語のクラス N と、DFAで受理できる言語のクラス D が一致することを示す。

- $D \subseteq N$ は定義より明らかなので、 $N \subseteq D$ を示せばよい。
- 任意の言語 $L \in N$ が $L \in D$ となることを示せばよい。

ある言語 L が $L \in N$ であったとする。このとき、 L を受理する ε -NFA $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_L と同じ言語を受理する DFA A_L' を構成する。

Subset 構成において、 ε -遷移をどう処理するか...

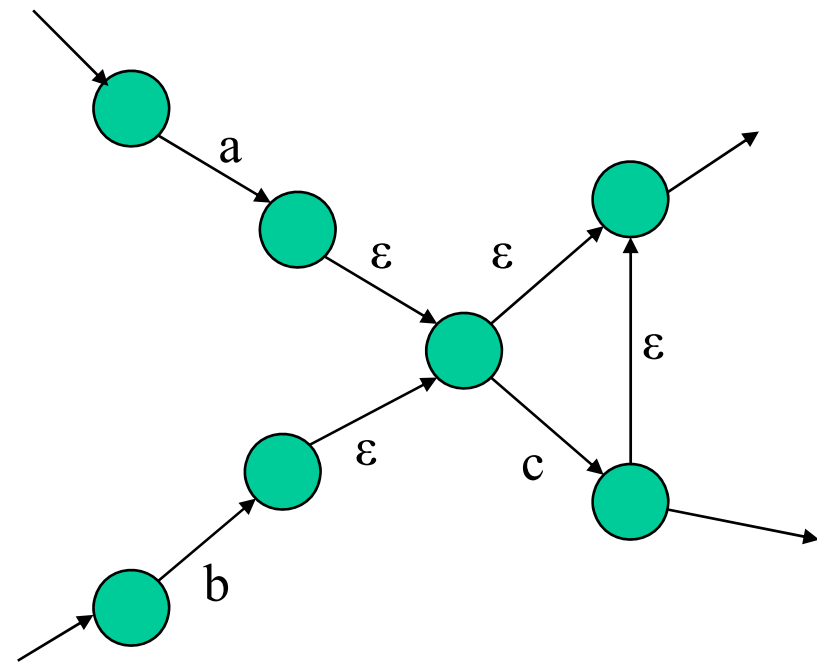
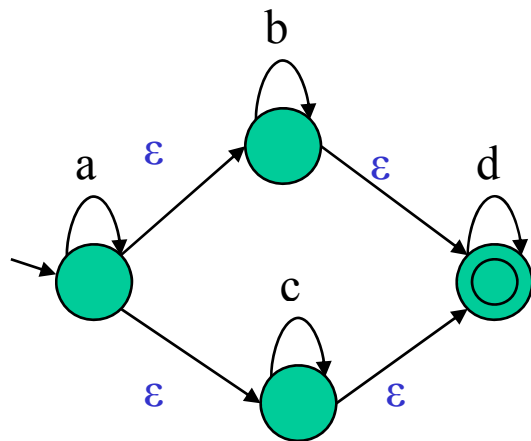
2. 有限オートマトン(2)

2.5. ϵ -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、 ϵ -遷移をどう処理するか...

直感的には「 ϵ で移動できる状態たち」を同一視すればOK...?

→それほど自明でない:



2. 有限オートマトン(2)

2.5. ϵ -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、 ϵ -遷移をどう処理するか...

状態 q の ϵ -閉包とは、状態 q から ϵ -遷移だけで遷移できる状態の集合(q 自身も含む)

$ECLOSE(q) := \{ q' \mid q' \text{ は } q \text{ から } \epsilon\text{-遷移だけで遷移できる} \}$

1. q は $ECLOSE(q)$ の要素
2. 任意の $q' \in ECLOSE(q)$ に対して、 q' から q'' に ϵ -遷移で遷移できるなら、 q'' も $ECLOSE(q)$ の要素

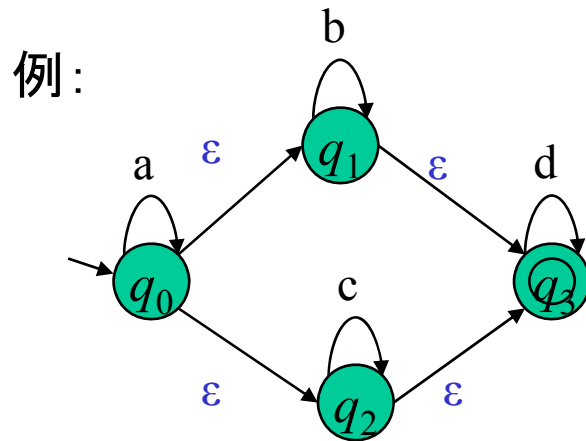
2. 有限オートマトン(2)

2.5. ϵ -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、 ϵ -遷移をどう処理するか...

状態 q の ϵ -閉包とは、状態 q から ϵ -遷移だけで遷移できる状態の集合(q 自身も含む)

$ECLOSE(q) := \{ q' \mid q' \text{ は } q \text{ から } \epsilon\text{-遷移だけで遷移できる} \}$



$$ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$ECLOSE(q_1) = \{q_1, q_3\}$$

$$ECLOSE(q_2) = \{q_2, q_3\}$$

$$ECLOSE(q_3) = \{q_3\}$$

2. 有限オートマトン(2)

2.5. ϵ -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、 ϵ -遷移をどう処理するか...

観測: ϵ -NFA A において、 $\text{ECLOSE}(q)$ に状態 p が入っているとき、「 A がある時点で取りえる状態」の集合 S は、 $[q \in S \text{ かつ } p \notin S]$ はありえない。

$\Rightarrow \epsilon$ -NFA A において、「 A がある時点で取りうる状態」の集合 S は、 $q \in S$ なら $\text{ECLOSE}(q) \subseteq S$ 。

\Rightarrow Subset 構成において 2^Q がすべて現れるわけではない。

2. 有限オートマトン(2)

2.5.4. 遷移関数の拡張と ε -NFAの言語

- ε -NFA $A=(Q,\Sigma,\delta,q,F)$ の定義:
 - $\delta: Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \rightarrow 2^Q$
- ε -NFA A によって受理される言語...
 - $\hat{\delta}: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\})^* \rightarrow 2^Q$ の定義:
 1. $\hat{\delta}(q,\varepsilon) := \text{ECLOSE}(q)$
 2. $\hat{\delta}(q,xa)$ (ただし $x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$):
 - $\hat{\delta}(q,x) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ とする。
 - 和集合 $\bigcup_{i=1}^k \hat{\delta}(p_i, a)$ を $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ とする。

状態 q に入力 xa が
与えられたときに
到達可能なすべて
の状態の集合

$$\hat{\delta}(q, xa) := \bigcup_{j=1}^m \text{ECLOSE}(r_j)$$

- A によって受理される言語
 $L(A) := \{ w \mid \hat{\delta}(q,w) \cap F \neq \Phi \}$

2. 有限オートマトン(2)

2.5. ϵ -NFAとDFAの等価性

証明: ϵ -NFAで受理できる言語のクラス N と、DFAで受理できる言語のクラス D が一致することを示す。

- $D \subseteq N$ は定義より明らかなので、 $N \subseteq D$ を示せばよい。
- 任意の言語 $L \in N$ が $L \in D$ となることを示せばよい。

ある言語 L が $L \in N$ であったとする。このとき、 L を受理する ϵ -NFA $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_L と同じ言語を受理する DFA A_L' を構成する。

Subset 構成において、 ϵ -遷移をどう処理するか...

ECLOSEを使って遷移可能な状態の集合を表現する

2. 有限オートマトン(2)

2.5. ϵ -NFAとDFAの等価性

証明: ある言語 L が $L \in N$ であったとする。このとき、 L を受理する ϵ -NFA $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_L と同じ言語を受理する DFA $A_L' = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ を構成する。

1. Q_D : 2^{Q_N} だと無駄が多い。以下を満たす S だけで十分。

$$S = \bigcup_{q \in S} \text{ECLOSE}(q)$$

2. $q_D := \text{ECLOSE}(q_N)$
3. $F_D := \{ S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \Phi \}$
4. $\delta_D \dots$

与えられた ϵ -NFA から動的に作ればよい。

2. 有限オートマトン(2)

2.5. ϵ -NFAとDFAの等価性

証明: ある言語 L が $L \in N$ であったとする。このとき、 L を受理する ϵ -NFA $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_L と同じ言語を受理する DFA $A_L' = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ を構成する。

4. $\delta_D : Q_D$ の要素 S と Σ の要素 a に対して、以下の手順で構成する。

1. $S = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ とする。

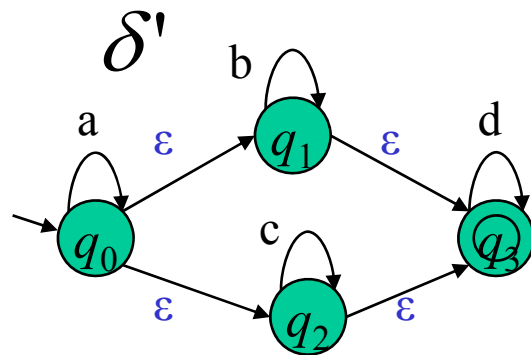
2. $\bigcup_{i=1}^k \delta(p_i, a)$ の結果を $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ とする。

3. $\delta_D(S, a) := \bigcup_{j=1}^m \text{ECLOSE}(r_j)$

2. 有限オートマトン(2)

2.5. ϵ -NFAとDFAの等価性

例:



$$\text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_1) = \{q_1, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_2) = \{q_2, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\}$$

上記の ϵ -NFAと等価な DFA $A=(Q, \{a,b,c,d\}, \delta, q, F)$ を構成

- $q = \text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\delta(q, b): \bigcup_{q_i \in q} \delta'(q_i, b) = \{q_1\}$ **なので**, $\delta(q, b) = \text{ECLOSE}(q_1) = \{q_1, q_3\}$
- 同様に

$$\delta(q, a) = \text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

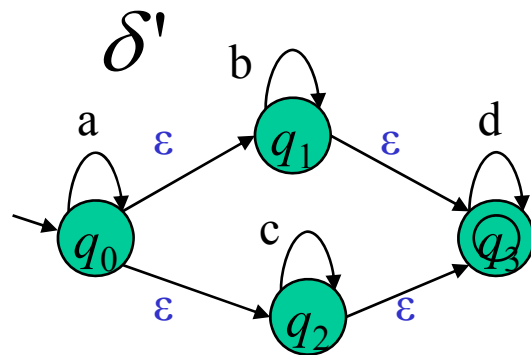
$$\delta(q, c) = \text{ECLOSE}(q_2) = \{q_2, q_3\}$$

$$\delta(q, d) = \text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\}$$

2. 有限オートマトン(2)

2.5. ϵ -NFAとDFAの等価性

例:



$$\text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_1) = \{q_1, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_2) = \{q_2, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\}$$

上記の ϵ -NFAと等価な DFA $A=(Q, \{a,b,c,d\}, \delta, q, F)$ を構成
同様に

$$\delta(\{q_1, q_3\}, a) = \text{ECLOSE}(\Phi) = \{\Phi\}$$

$$\delta(\{q_1, q_3\}, b) = \text{ECLOSE}(q_1) = \{q_1, q_3\}$$

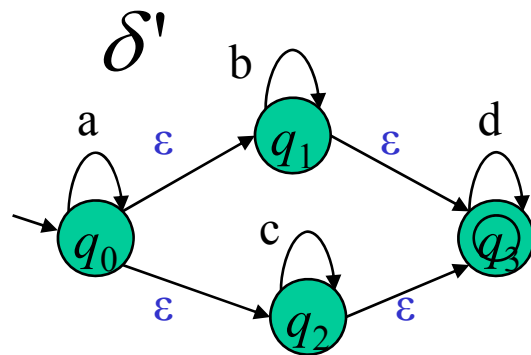
$$\delta(\{q_1, q_3\}, c) = \text{ECLOSE}(\Phi) = \{\Phi\}$$

$$\delta(\{q_1, q_3\}, d) = \text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\} \dots$$

2. 有限オートマトン(2)

2.5. ϵ -NFAとDFAの等価性

例:



$$ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$ECLOSE(q_1) = \{q_1, q_3\}$$

$$ECLOSE(q_2) = \{q_2, q_3\}$$

$$ECLOSE(q_3) = \{q_3\}$$

上記の ϵ -NFAと等価な DFA $A=(Q, \{a,b,c,d\}, \delta, q, F)$ を構成

