

6.2.2. 完全性の証明 1/11

(\mathcal{NP})完全性の証明方法
 (I) 定義通りに[すべての L]について示す
 (II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: 定理6.7, 定理6.9(≡Cookの定理(SATでTMを模倣))

3SATなどは、形式が一樣なので扱いやすい

基本的には...
 1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
 2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する
 →とても大変(手間がかかる)

(II)の例: 例6.4($3SAT \leq_m^p DHAM$), 定理6.10, ...
 DHAMは一般のグラフ上で \mathcal{NP} 完全
 DHAMは平面グラフに限定しても \mathcal{NP} 完全
 DHAMは「頂点の次数=3」に限定しても \mathcal{NP} 完全
 DHAMは2部グラフに限定しても \mathcal{NP} 完全...

6.2.2. Proof for completeness 1/11

Two ways to prove (\mathcal{NP} -)completeness
 (I) show 'for all L ' according to definition
 (II) use some known complete problems

Ex for (I) : Theorem 6.7,
 Theorem 6.9(≡Cook's Theorem; simulate TM by SAT)

Easy to manipulate since, e.g., 3SAT has a uniform structure.

Basically...
 1. For any program in standard form,
 2. simulate it by SAT formulae
 →pretty complicated and tedious

Ex for (II): Example 6.4($3SAT \leq_m^p DHAM$), Theorem 6.10, ...
 DHAM is \mathcal{NP} -complete for general graphs
 DHAM is \mathcal{NP} -complete even for planar graphs
 DHAM is \mathcal{NP} -complete even for graphs with max degree=3
 DHAM is \mathcal{NP} -complete even for bipartite graphs ...

2/11

定理6.10: 以下にあげる集合はすべて \mathcal{NP} -完全
 (1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元)
 (2) DHAM, VC (3SATからの還元)
 (3) KNAP, BIN (3SATからの還元と $KNAP \leq_m^p BIN$)

(II) \mathcal{NP} 完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:
 1. $3SAT \leq_m^p VC$
 2. $DHAM \leq_m^p$ 頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合
 Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度ずつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でも \mathcal{NP} 完全。
 高々2だと多項式時間で計算可能。

2/11

Theorem 6.10 The following sets are all \mathcal{NP} -complete:
 (1) 3SAT, SAT (reduction from ExSAT)
 (2) DHAM, VC (reduction from 3SAT)
 (3) KNAP, BIN (reduction from 3SAT and $KNAP \leq_m^p BIN$)

(II) Polynomial time reductions from \mathcal{NP} -complete problems:
 1. $3SAT \leq_m^p VC$
 2. $DHAM \leq_m^p$ DHAM with vertices of degree ≤ 5

Vertex Cover: a vertex set that contains at least one endpoint for each edge
 Hamiltonian cycle: a cycle that visits each vertex exactly once

Note : DHAM remains \mathcal{NP} -complete even if max degree 3.
 But it is polynomial time solvable if max degree 2.

3/11

定理6.10(2) : VC は \mathcal{NP} 完全問題

[証明] $VC \in \mathcal{NP}$ なので、 $3SAT \leq_m^p VC$ であることを示せばよい。
 論理式 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が与えられたとする。
 F から以下の条件を満たすグラフと自然数の組 $\langle G, k \rangle$ が多項式時間で構成できることを示す:

F を1にする割当が存在する $\Leftrightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ

G の構成(F は n 変数 m 項とする):

- F の各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^- と、辺 (x_i^+, x_i^-) を加える
- F の各項 $C_j = (l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ に対し、頂点 l_{j1}, l_{j2}, l_{j3} と辺 $(l_{j1}, l_{j2}), (l_{j2}, l_{j3}), (l_{j3}, l_{j1})$ を加える
- 項 C_j のリテラル l_{j1} が x_i のときは辺 (l_{j1}, x_i^+) を、 $\neg x_i$ のときは辺 (l_{j1}, x_i^-) を加える。
- $k = n + 2m$

3/11

Theorem 6.10(2) : VC is \mathcal{NP} -complete

[Proof] Since $VC \in \mathcal{NP}$, we show $3SAT \leq_m^p VC$.
 For given formula $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, we construct a pair $\langle G, k \rangle$ of a graph and an integer in polynomial time.

There is an assignment that makes $F()=1$
 $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

- add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
- For each clause $C_j = (l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ in F , add vertices l_{j1}, l_{j2}, l_{j3} and three edges $(l_{j1}, l_{j2}), (l_{j2}, l_{j3}), (l_{j3}, l_{j1})$
- add the edge (l_{j1}, x_i^+) if the literal l_{j1} is x_i or add (l_{j1}, x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
- let $k = n + 2m$

F を1にする割当が存在する $\Leftrightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ 4/11

G の構成(F は n 変数 m 項とする):

- F の各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^- と、辺 (x_i^+, x_i^-) を加える
- F の各項 $C_j=(l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ に対し、頂点 l_{j1}, l_{j2}, l_{j3} と辺 $(l_{j1}, l_{j2}), (l_{j2}, l_{j3}), (l_{j3}, l_{j1})$ を加える
- 項 C_j のリテラル l_{j1} が x_i のときは辺 (l_{j1}, x_i^+) を、 $\neg x_i$ のときは辺 (l_{j1}, x_i^-) を加える。
- $k = n+2m$

例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

$k = 4+2 \times 3=10$

There is an assignment that makes $F()=1$
 $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k 4/11

Construction of G (F has n variables and m clauses):

- add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
- For each clause $C_j=(l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ in F , add vertices l_{j1}, l_{j2}, l_{j3} and three edges $(l_{j1}, l_{j2}), (l_{j2}, l_{j3}), (l_{j3}, l_{j1})$
- add the edge (l_{j1}, x_i^+) if the literal l_{j1} is x_i , or add (l_{j1}, x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
- let $k = n+2m$

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

$k = 4+2 \times 3=10$

G の構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能。したがって以下を示せばよい:

F を1にする割当が存在する $\Leftrightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ 5/11

観察:

G の構成から任意の頂点被覆 S は $\begin{cases} x_i^+, x_i^- \text{ のどちらかを含む} \\ C_j \text{ の3頂点中、最低2つを含む} \end{cases}$ によって $|S| \geq n+2m = k$ である。

例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

$k = 4+2 \times 3=10$

It is easy to see that the construction of G from F can be done in polynomial time of the size of F . Hence, we show that...

There is an assignment that makes $F()=1$
 $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k 5/11

Observation:

From the construction of G , any vertex cover S should contain $\begin{cases} \text{at least one of } x_i^+ \text{ or } x_i^- \\ \text{at least 2 of 3 vertices in } C_j \end{cases}$

Hence we have $|S| \geq n+2m = k$.

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

$k = 4+2 \times 3=10$

F を1にする割当が存在する $\Rightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ 6/11

- それぞれの変数 x_i が $\begin{cases} x_i=1 \text{ なら } x_i^+ \text{ を } S \text{ に入れる} \\ x_i=0 \text{ なら } x_i^- \text{ を } S \text{ に入れる} \end{cases}$
- それぞれの項 $C_j=(l_{j1}, l_{j2}, l_{j3})$ は充足されているので、最低1つのリテラル (l_{j1}) については変数との間の辺 (l_{j1}, x_{i1}) は x_{i1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル (l_{j2}, l_{j3}) を S に入れる。

\Rightarrow **観察** より、 S はサイズ k の頂点被覆になる。

例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

$k = 4+2 \times 3=10$

If there is an assignment that makes $F()=1$,
 G has a vertex cover of size k 6/11

- Put $\begin{cases} x_i^+ \text{ if } x_i=1 \\ x_i^- \text{ if } x_i=0 \end{cases}$ into S for each x_i .
- Since each clause $C_j=(l_{j1}, l_{j2}, l_{j3})$ is satisfied, at least one literal, say l_{j1} , the edge (l_{j1}, x_{i1}) is covered by the variable x_{i1} . Therefore, put the remaining literals (l_{j2}, l_{j3}) into S .

\Rightarrow From the **Observation**, S is a vertex cover of size k .

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

$k = 4+2 \times 3=10$

Gがサイズkの頂点被覆を持つ⇒ Fを1にする割当が存在する 7/11

- 観察より、被覆Sは項から $2m$ 個、変数から n 個の頂点を含む。
- さらに各変数 x_i については x_i^+ か x_i^- の一方しか、各項 C_j についてはちょうど2つの頂点しかSに含むことができない。
- よって各項 C_j はSに含まれないリテラル l_i を含むが、これに付随する辺は他方が被覆されていなければならない。
 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_i^+ \text{がSに含まれるなら } x_i=1 \\ x_i^- \text{がSに含まれるなら } x_i=0 \end{array} \right]$ という割当はFを充足する。

例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

$k = 4 + 2 \times 3 = 10$

QED.

If G has a vertex cover of size k, there is an assignment s.t. F()=1 7/11

- From **Observation**, a cover S contains $2m$ vertices from the clauses, and n vertices from the variables.
- Thus the cover S contains exactly one of x_i^+ and x_i^- and exactly two literals of a clause C_j .
- Hence each clause C_j contains exactly one literal l_i which is not in S, and hence incident edge should be covered by a variable vertex.
 \Rightarrow The following assignment satisfies F: $\left[\begin{array}{l} x_i=1 \text{ if } x_i^+ \text{ in } S \\ x_i=0 \text{ if } x_i^- \text{ in } S \end{array} \right]$

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

$k = 4 + 2 \times 3 = 10$

QED.

充足できない例: 8/11

$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$

$k = 3 + 2 \times 4 = 11$

充足できないFでは、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは $k+1$ 以上になる。

Unsatisfiable example: 8/11

$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$

$k = 3 + 2 \times 4 = 11$

When F is unsatisfiable, it contains at least one clause such that each literal is not covered by a vertex. So, Vertex Cover should contain three literals in the clause. Hence any vertex cover has size at least $k+1$.

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は NP 完全問題 9/11

[証明] (上記の問題をDHAM_{≤5}と略記する)

DHAM_{≤5}がNPに属するのは、DHAMがNPに属することから自明。したがって完全性を示せばよい。DHAM_{≤m}^P DHAM_{≤5}を示す。

アイデア:

次数14の頂点v(左)の(入ってくる辺集合と(出ていく辺集合)を右図の'gadget'で置き換える

左図でvを1度だけ通る閉路と右図でvを1度だけ通る閉路は対応する。

Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. DHAM_{≤5}) is NP-complete 9/11

[Proof]

Since DHAM ∈ NP, DHAM_{≤5} ∈ NP.
We DHAM_{≤m}^P DHAM_{≤5}.

Idea:

Replace the set of "arcs to v" and the set of "arcs from v" by a right 'gadget'.

A Hamiltonian cycle through v on the original graph corresponds to the Hamiltonian cycle through v on the resultant graph.

10/11

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は \mathcal{NP} 完全問題

アイデア:

ポイント:

- 各閉路は上から下
- 各頂点は次数 ≤ 5

高さ: $O(\log d_i)$
個数: $O(d_i)$

[証明(概要)]

与えられたグラフ G が次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

- 元のグラフ G が n 頂点 m 辺であったなら, gadget で置き換えたあとのグラフ G' は $O(n+m)$ 頂点 $O(m)$ 辺となる。したがって上記の還元は G の大きさの多項式時間で可能。
- また G' のすべての頂点は次数は **たかだか5** である。
- G がハミルトン閉路をもつ $\Leftrightarrow G'$ がハミルトン閉路を持つ QED.

10/11

Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. $\text{DHAM}_{\leq 5}$) is \mathcal{NP} -complete

Idea:

Points:

- Up to down via cycle
- Each vertex has $\text{deg} \leq 5$

height: $O(\log d_i)$
number: $O(d_i)$

[Proof (sketch)]

For each vertex v of degree ≥ 6 , replace the edges around v by the gadget.

- If the original graph G has n vertices with m edges, the resultant graph G' contains $O(n+m)$ vertices with $O(m)$ edges. Hence the reduction can be done in polynomial time of n & m .
- Each vertex in G' has degree **at most 5**.
- G has a Hamiltonian cycle $\Leftrightarrow G'$ has a Hamiltonian cycle. QED.

おまけ(Addition)

多くの自然な問題は

- 多項式時間で解けるか
- NP困難か

のどちらかである場合が多い(?)

- R. Uehara, S. Iwata: Generalized Hi-Q is NP-complete, *The Transactions of the IEICE*, E73, p.270-273, 1990.
- P. Zhang, H. Sheng, R. Uehara: A Double Classification Tree Search Algorithm for Index SNP Selection, *BMC Bioinformatics*, 5:89, 2004.
- S. Teramoto, E. D. Demaine, R. Uehara: Voronoi Game on Graphs and Its Complexity, *IEEE Symp. on Computational Intelligence and Games*, p.265-271, 2006.
- R. Uehara, S. Teramoto: Computational Complexity of a Pop-up Book, *International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education*, 2006.
- T. Asano, E. D. Demaine, M. L. Demaine, and R. Uehara: Kaboodle is NP-complete, even in a Strip Form, *International Conference on FUN WITH ALGORITHMS*, Lecture Notes in Computer Science, June, 2010.
- E. D. Demaine, M. L. Demaine, R. Uehara, T. UNO, and Y. UNO: UNO is hard, even for a single player, *International Conference on FUN WITH ALGORITHMS*, Lecture Notes in Computer Science, June, 2010.

残りの予定(Schedule)

- 4月28日
 - 午前: 休講
 - 午後: 補講・アンケート・レポート2の解説・その他
- 5月2日
 - 中間試験(Mid term exam)
 - レポート2の返却

• 持込み不可(No notes, texts, copies etc.)

• 演習問題レベル(Exercise level)

• 授業全体から出題(Range is all)