

6.2. Completeness based on Polynomial-time Reducibility

6.2.1. Definition of Completeness and its Basic Properties

Def.6.2: For a class \mathcal{C} , if a set A satisfies the following conditions, then it is called **\mathcal{C} -complete** (under \leq_m^P)

(a) $\forall L \in \mathcal{C} [L \leq_m^P A]$

(b) $A \in \mathcal{C}$

Note: Sets satisfying the condition (a) are called **\mathcal{C} -hard**.

Theorem 6.4. A : any \mathcal{C} -complete set

For any set B we have

(1) $A \leq_m^P B \rightarrow B$ is \mathcal{C} -hard.

(2) $A \leq_m^P B \wedge B \in \mathcal{C} \rightarrow B$ is \mathcal{C} -complete.

Once you have a complete problem, you can use it as a **tool!!**

6.2. 多項式時間還元可能性に基づく完全性

6.2.1. 完全性の定義とその基本的性質

定義6.2: 計算量クラス C に対し, 集合 A が次の条件を満たすとき, それを(\leq_m^P の下で) C -完全という.

(a) $\forall L \in C [L \leq_m^P A]$

(b) $A \in C$

補注: 条件(a)を満たす集合は C -困難.

定理6.4. A : 任意の C -完全集合

すべての集合 B に対し,

(1) $A \leq_m^P B \rightarrow B$ は C -困難.

(2) $A \leq_m^P B \wedge B \in C \rightarrow B$ は C -完全.

ある問題が
完全問題である
ことがわかったら、
それを**道具**として
使える！

6.2.2. Proof for completeness

Two ways to prove (\mathcal{NP} -)completeness

(I) show 'for all L ' according to definition

(II) use some known complete problems

Ex for (I) : Theorem 6.7,

Theorem 6.9 (\doteq Cook's Theorem; simulate TM by SAT)

Easy to handle since,
e.g., 3SAT has a
uniform structure.

Basically...

1. For any program in standard form,
2. simulate it by SAT formulae
→ pretty complicated and tedious

Ex for (II): Example 6.4 ($3\text{SAT} \leq_m^P \text{DHAM}$), Theorem 6.10, ...

DHAM is \mathcal{NP} -complete for general graphs

DHAM is \mathcal{NP} -complete even for planar graphs

DHAM is \mathcal{NP} -complete even for graphs with max degree=3

DHAM is \mathcal{NP} -complete even for bipartite graphs ...

6.2.2. 完全性の証明

(\mathcal{NP})完全性の証明方法

- (I) 定義通りに[すべての L]について示す
- (II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: 定理6.7, 定理6.9(\doteq Cookの定理(SATでTMを模倣))

3SATなどは、形式
が一様なので扱い
やすい

基本的には...

1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する
→とても大変(手間がかかる)

(II)の例: 例6.4($3\text{SAT} \leq_m^P \text{DHAM}$), 定理6.10, ...

DHAMは一般のグラフ上で \mathcal{NP} 完全

DHAMは平面グラフに限定しても \mathcal{NP} 完全

DHAMは「頂点の次数=3」に限定しても \mathcal{NP} 完全

DHAMは2部グラフに限定しても \mathcal{NP} 完全...

Theorem 6.10 The following sets are all \mathcal{NP} -complete:

- (1) 3SAT, SAT (reduction from ExSAT)
- (2) DHAM, VC (reduction from 3SAT)
- (3) KNAP, BIN (reduction from 3SAT and $\text{KNAP} \leq_m^P \text{BIN}$)

(II) Polynomial time reductions from \mathcal{NP} -complete problems:

1. $3\text{SAT} \leq_m^P \text{VC}$
2. $\text{DHAM} \leq_m^P \text{DHAM}$ with vertices of degree ≤ 5

Vertex Cover: a vertex set that contains

at least one endpoint for each edge

Hamiltonian cycle: a cycle that visits each vertex exactly once

Note : DHAM remains \mathcal{NP} -complete even if max degree 3.

But it is polynomial time solvable if max degree 2.

定理6.10: 以下にあげる集合はすべて \mathcal{NP} -完全

- (1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元)
- (2) DHAM, VC (3SATからの還元)
- (3) KNAP, BIN (3SATからの還元と $\text{KNAP} \leq_m^P \text{BIN}$)

(II) \mathcal{NP} 完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:

1. $3\text{SAT} \leq_m^P \text{VC}$
2. $\text{DHAM} \leq_m^P$ 頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合

Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度ずつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でも \mathcal{NP} 完全。
高々2だと多項式時間で計算可能。

Theorem 6.10(2) : VC is \mathcal{NP} -complete

[Proof] Since $\text{VC} \in \mathcal{NP}$, we show $3\text{SAT} \leq_m^P \text{VC}$.

For given formula $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, we construct a pair $\langle G, k \rangle$ of a graph and an integer in polynomial time.

There is an assignment that makes $F()=1$
 $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F , add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges $(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})$
3. add the edge (l_{i1}, x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i , or add (l_{i1}, x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n + 2m$

定理6.10(2) : VC は \mathcal{NP} 完全問題

[証明] $VC \in \mathcal{NP}$ なので、 $3SAT \leq_m^P VC$ であることを示せばよい。

論理式 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が与えられたとする。

F から以下の条件を満たすグラフと自然数の組 $\langle G, k \rangle$ が多項式時間で構成できることを示す：

F を 1 にする割当が存在する $\Leftrightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ

G の構成 (F は n 変数 m 項とする) :

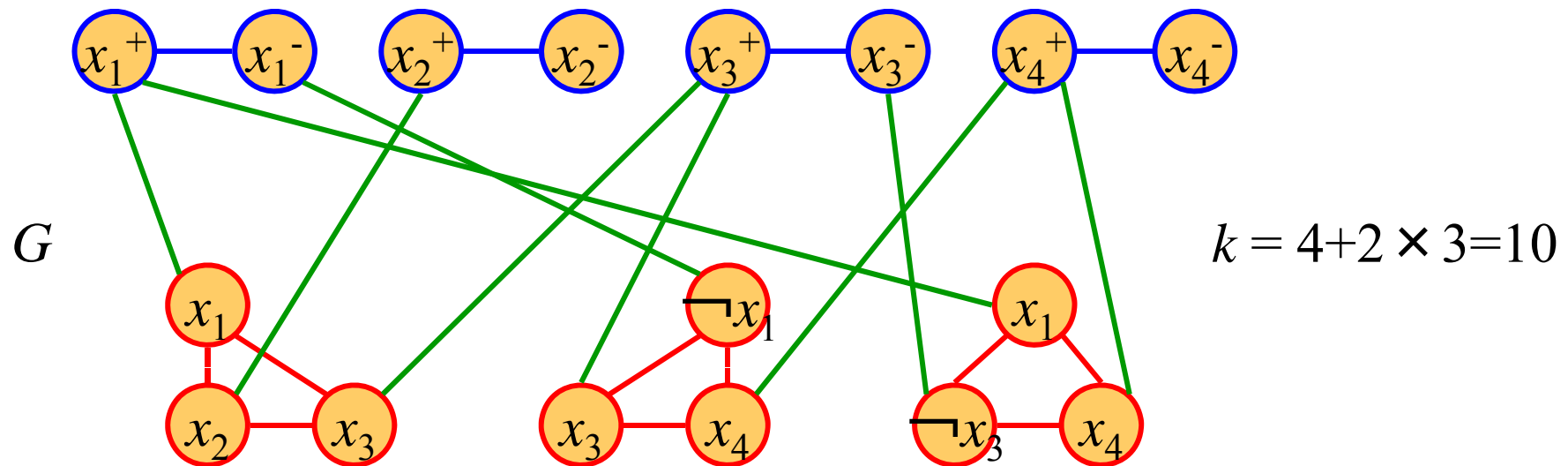
1. F の各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^- と、辺 (x_i^+, x_i^-) を加える
2. F の各項 $C_j = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺 $(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})$ を加える
3. 項 C_j のリテラル l_{i1} が x_i のときは辺 (l_{i1}, x_i^+) を、 $\neg x_i$ のときは辺 (l_{i1}, x_i^-) を加える。
4. $k = n + 2m$

There is an assignment that makes $F()=1$
 $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F , add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges $(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})$
3. add the edge (l_{i1}, x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i , or add (l_{i1}, x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

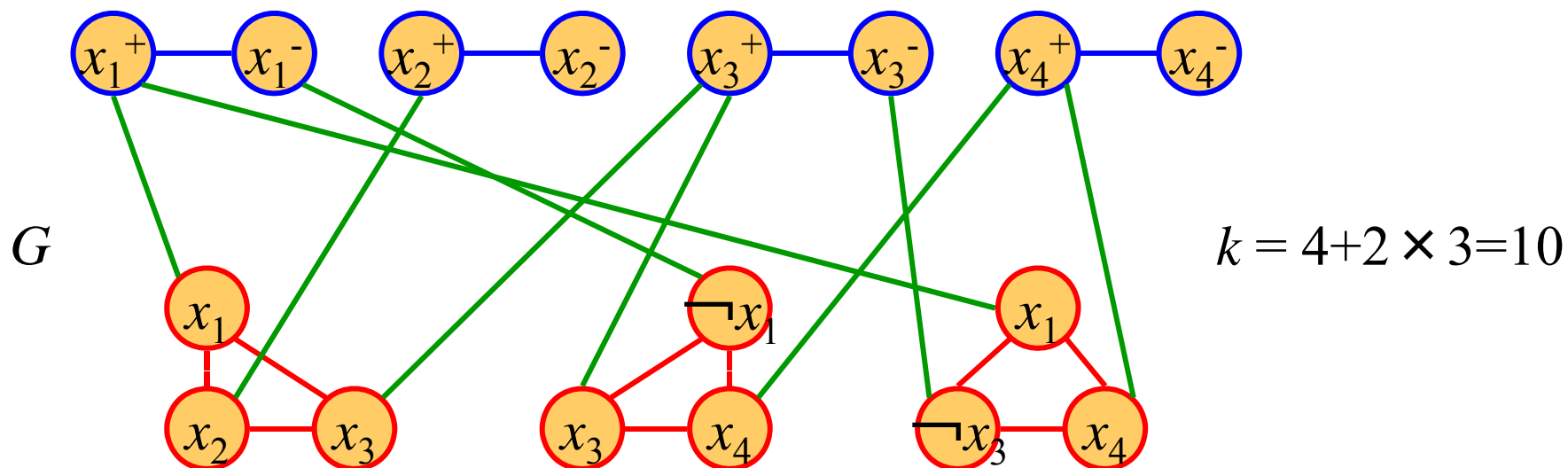


F を1にする割当が存在する $\Leftrightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ

G の構成(F は n 変数 m 項とする):

1. F の各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^- と、辺 (x_i^+, x_i^-) を加える
2. F の各項 $C_j = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺 $(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})$ を加える
3. 項 C_j のリテラル l_{i1} が x_i のときは辺 (l_{i1}, x_i^+) を、 $\neg x_i$ のときは辺 (l_{i1}, x_i^-) を加える。
4. $k = n + 2m$

例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



It is easy to see that the construction of G from F can be done in polynomial time of the size of F . Hence, we show that...

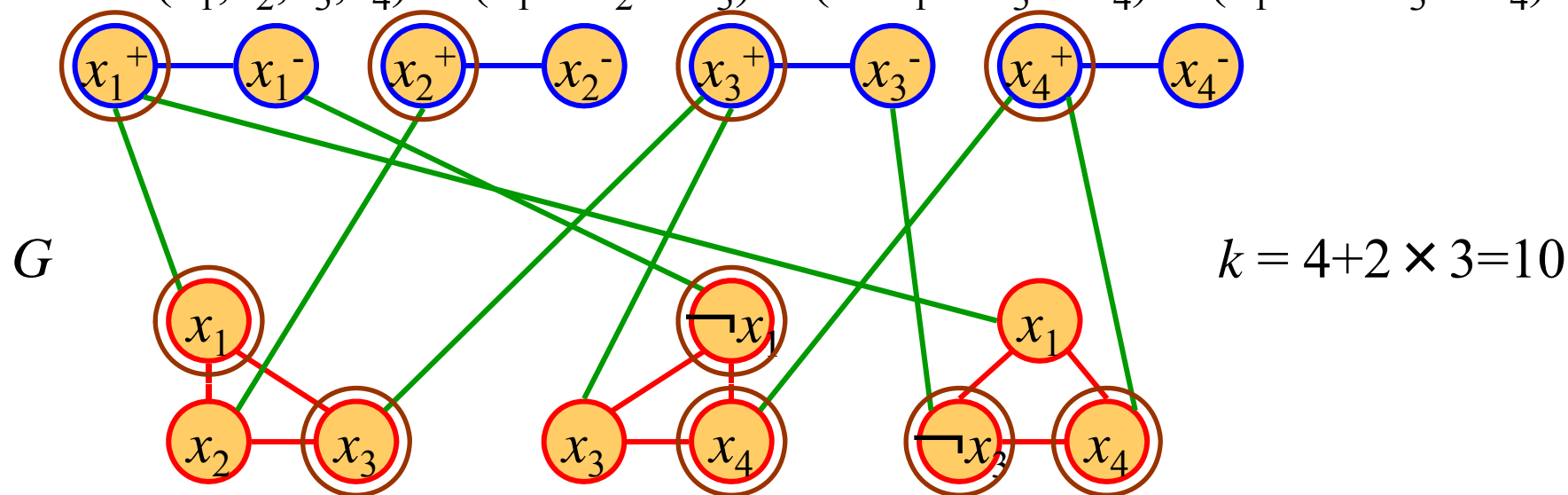
There is an assignment that makes $F()=1$
 $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Observation:

From the construction of G ,
 any vertex cover S should contain $\left\{ \begin{array}{l} \text{at least one of } x_i^+ \text{ or } x_i^- \\ \text{at least 2 of 3 vertices in } C_j \end{array} \right.$

Hence we have $|S| \geq n+2m = k$.

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



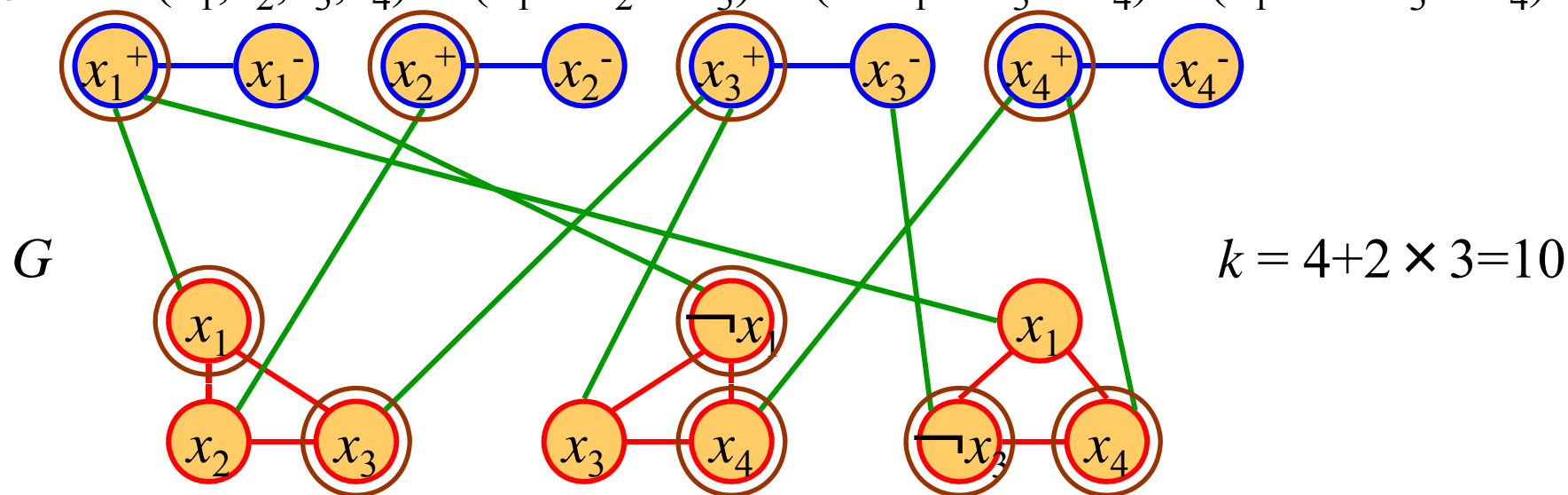
G の構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能。したがって以下を示せばよい:

F を1にする割当が存在する $\Leftrightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ

観察:

G の構成から任意の頂点被覆 S は $\begin{cases} x_i^+, x_i^- \text{のどちらかを含む} \\ C_j \text{の3頂点中、最低2つ含む} \end{cases}$ によって $|S| \geq n+2m = k$ である。

例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

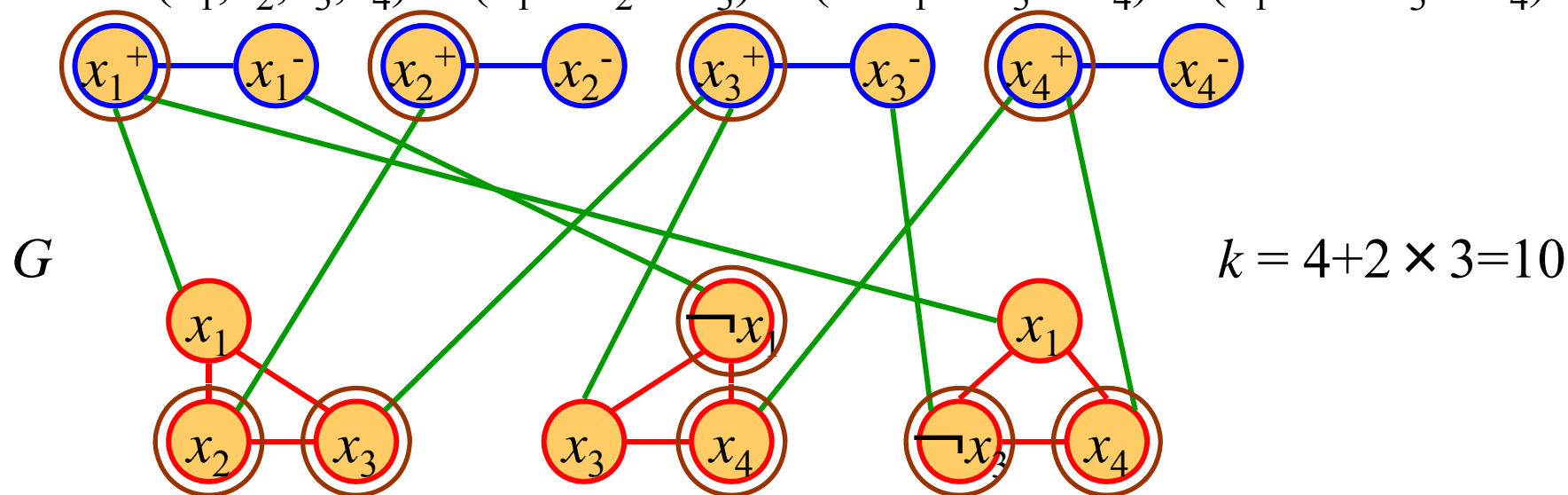


If there is an assignment that makes $F()=1$,
 G has a vertex cover of size k

1. Put $\left\{ \begin{array}{l} x_i^+ \text{ if } x_i=1 \\ x_i^- \text{ if } x_i=0 \end{array} \right\}$ into S for each x_i .
2. Since each clause $C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ is satisfied, at least one literal, say l_{i1} , the edge (l_{i1},x_{i1}) is covered by the variable x_{i1} . Therefore, put the remaining literals (l_{i2},l_{i3}) into S .

\Rightarrow From the **Observation**, S is a vertex cover of size k .

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

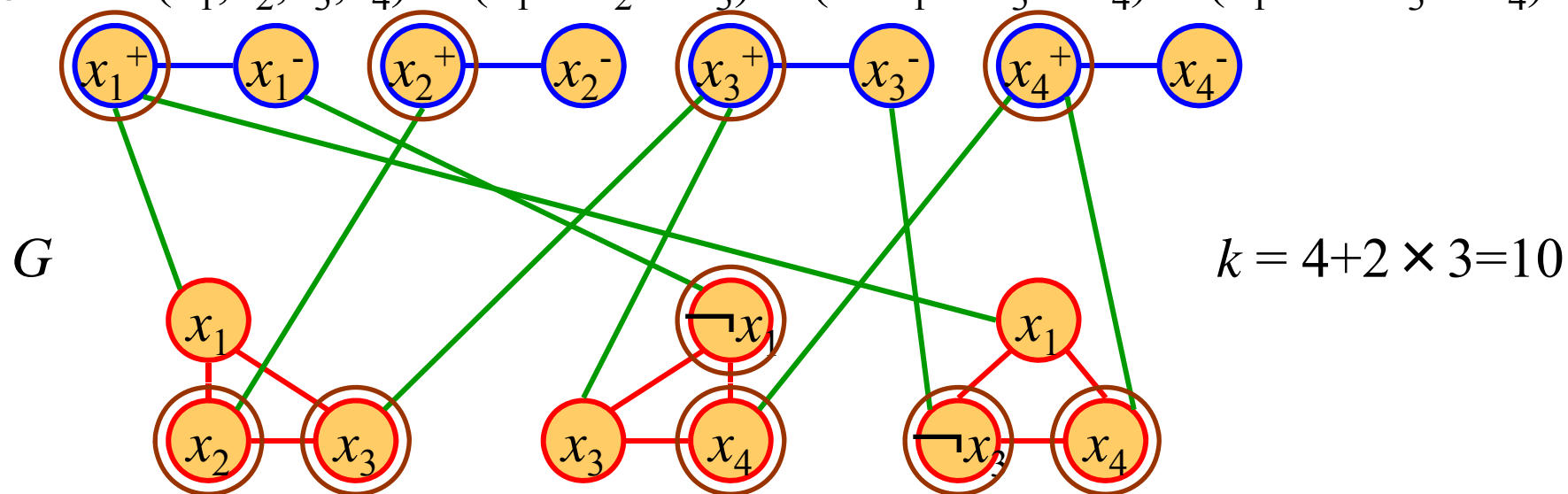


F を1にする割当が存在する $\Rightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ

1. それぞれの変数 x_i が $\begin{cases} x_i=1 \text{ なら } x_i^+ \text{ を } S \text{ に入れる} \\ x_i=0 \text{ なら } x_i^- \text{ を } S \text{ に入れる} \end{cases}$
2. それぞれの項 $C_j=(l_{i1}, l_{i2}, l_{i3})$ は充足されているので、最低1つのリテラル(l_{i1})については変数との間の辺(l_{i1}, x_{i1})は x_{i1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル(l_{i2}, l_{i3})を S に入れる。

\Rightarrow **観察** より、 S はサイズ k の頂点被覆になる。

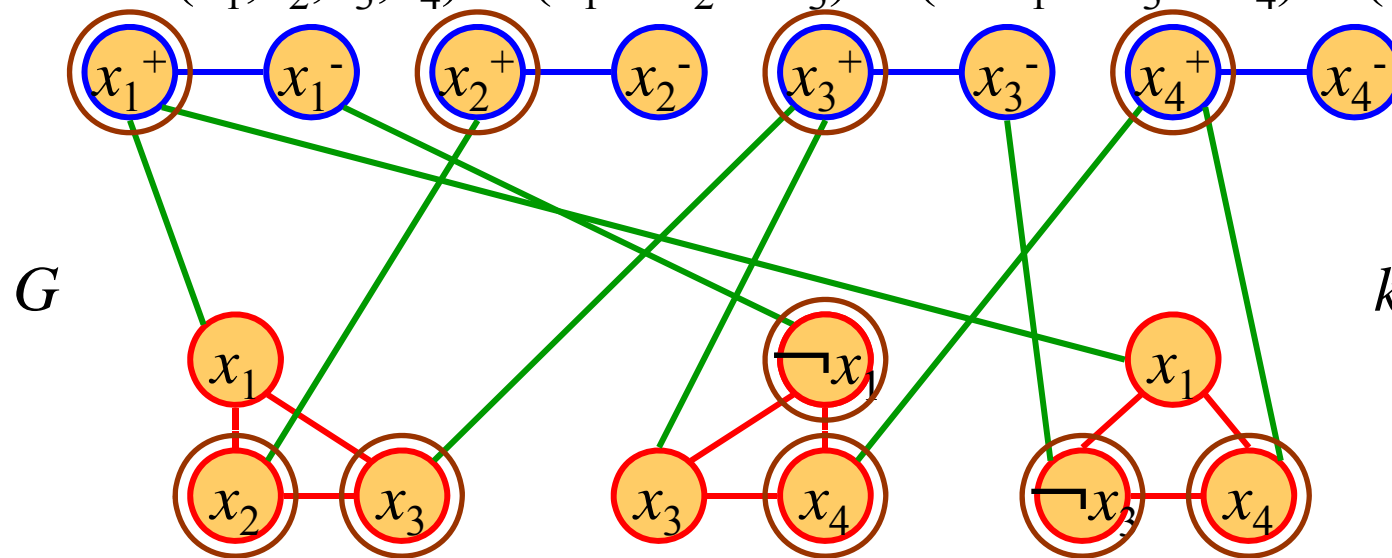
例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



1. From **Observation**, a cover S contains $2m$ vertices from the clauses, and n vertices from the variables.
2. Thus the cover S contains exactly one of x_i^+ and x_i^- and exactly two literals of a clause C_j .
3. Hence each clause C_j contains exactly one literal l_i which is not in S , and hence incident edge should be covered by a variable vertex.

\Rightarrow The following assignment satisfies F : $\begin{cases} x_i=1 & \text{if } x_i^+ \text{ in } S \\ x_i=0 & \text{if } x_i^- \text{ in } S \end{cases}$

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$$k = 4 + 2 \times 3 = 10$$

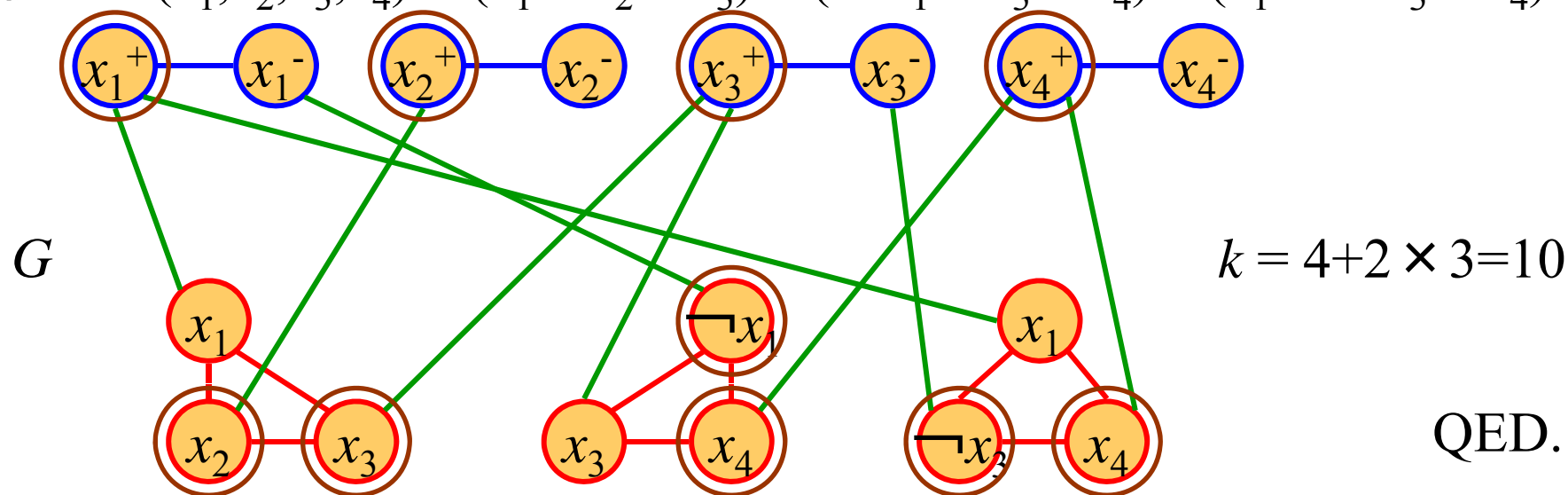
QED.

G がサイズ k の頂点被覆を持つ $\Rightarrow F$ を1にする割当が存在する

1. **観察** より、被覆 S は項から $2m$ 個、変数から n 個の頂点を含む。
2. さらに各変数 x_i については x_i^+ か x_i^- の一方しか、各項 C_j についてはちょうど2つの頂点しか S に含むことができない。
3. よって各項 C_j は S に含まれないリテラル l_i を含むが、これに付随する辺は他方が被覆されていなければならない。

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_i^+ \text{が} S \text{に含まれるなら } x_i=1 \\ x_i^- \text{が} S \text{に含まれるなら } x_i=0 \end{array} \right]$ という割当は F を充足する。

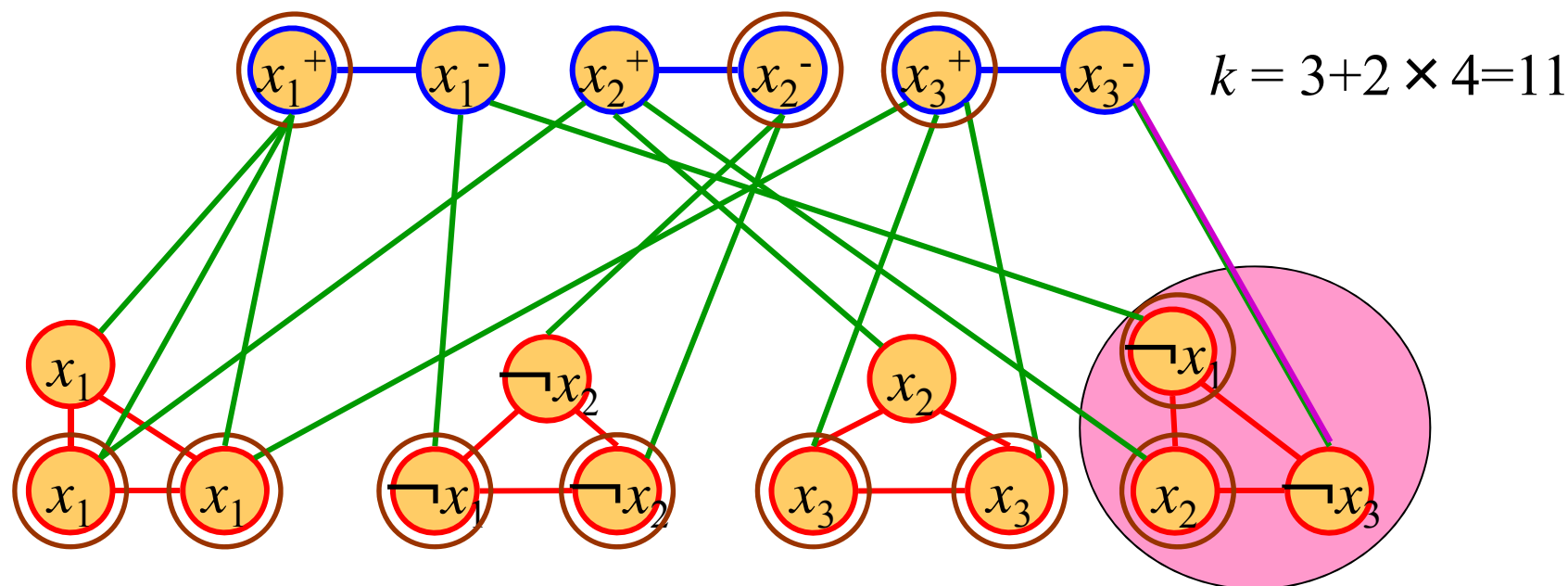
例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



Unsatisfiable example:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \\ \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

G

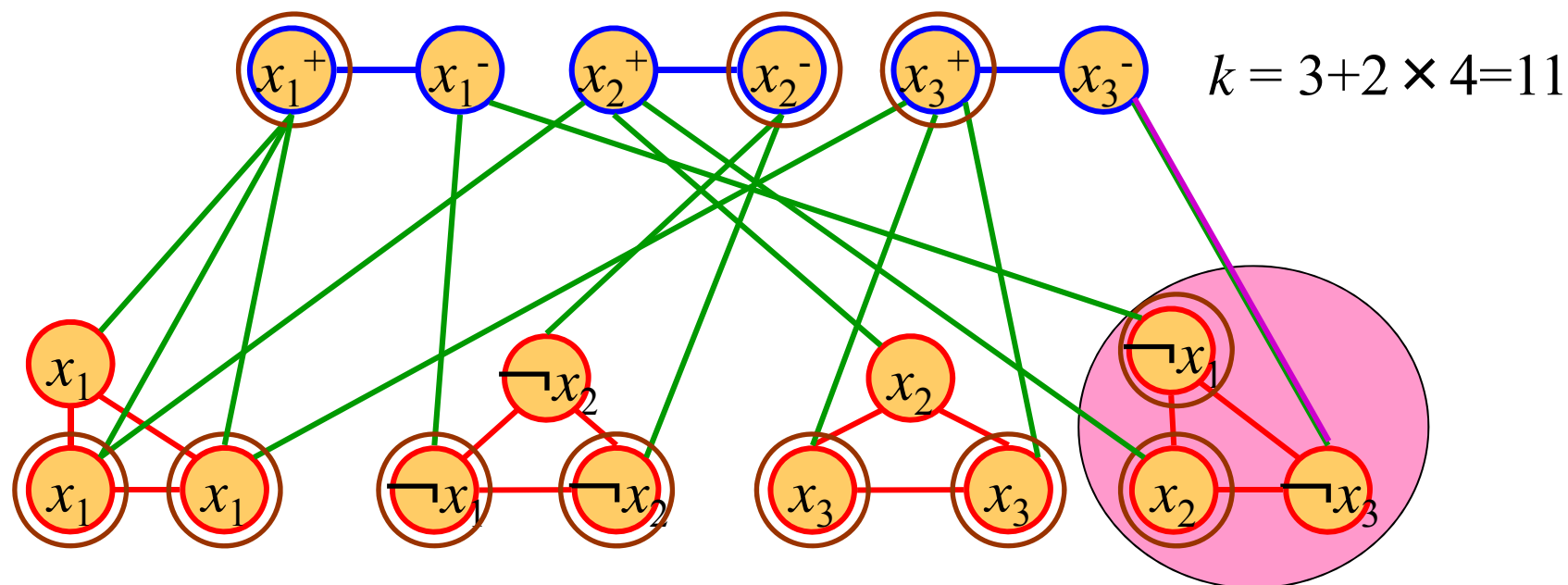


When F is unsatisfiable, it contains at least one clause such that each literal is not covered by a vertex. So, Vertex Cover should contain three literals in the clause. Hence any vertex cover has size at least $k+1$.

充足できない例:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \\ \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

G



充足できない F では、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは $k+1$ 以上になる。

**Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5
(abb. $\text{DHAM}_{\leq 5}$) is \mathcal{NP} -complete**

degree: the number of edges incident to a vertex

[Proof]

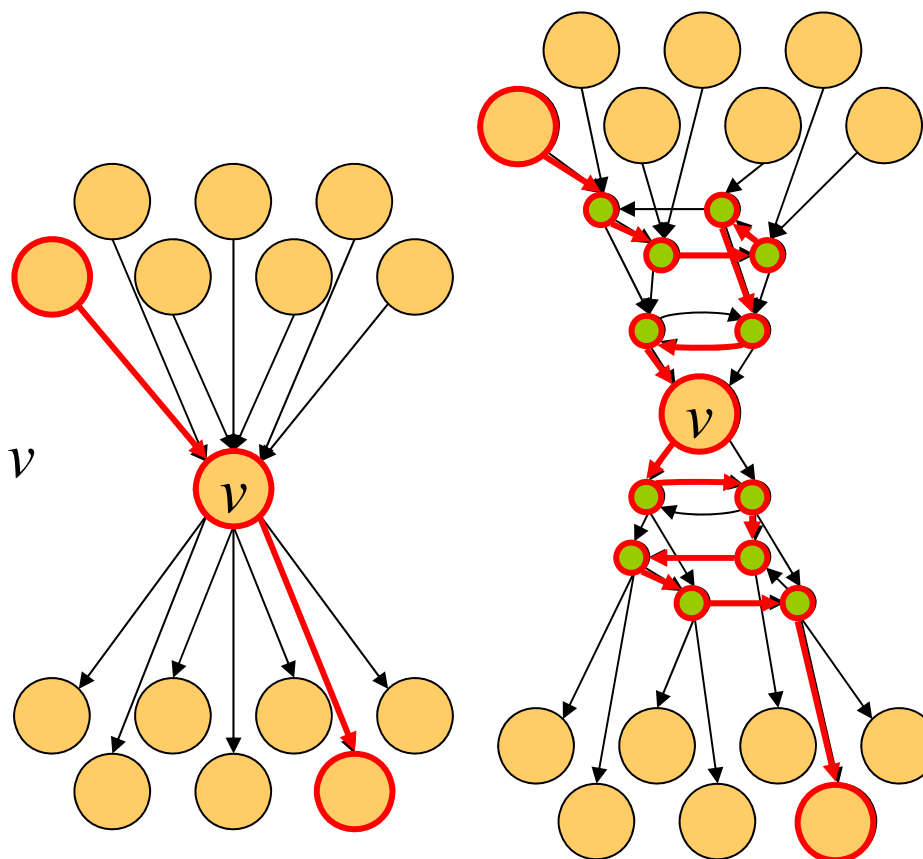
Since $\text{DHAM} \in \mathcal{NP}$, $\text{DHAM}_{\leq 5} \in \mathcal{NP}$.

We $\text{DHAM} \leq_m^P \text{DHAM}_{\leq 5}$.

Idea:

Replace the set of “arcs to v ” and the set of “arcs from v ” by a right ‘gadget’.

A Hamiltonian cycle through v on the original graph corresponds to the Hamiltonian cycle through v on the resultant graph.



定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は \mathcal{NP} 完全問題

[証明] (上記の問題を $\text{DHAM}_{\leq 5}$ と略記する)

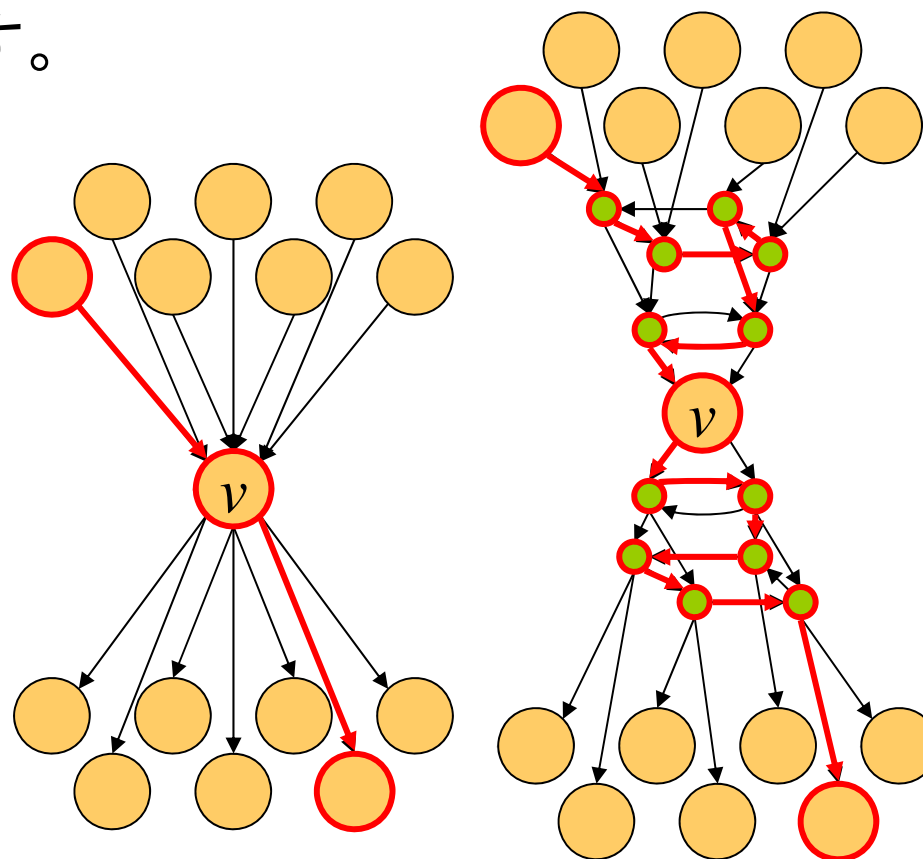
$\text{DHAM}_{\leq 5}$ が \mathcal{NP} に属するのは、DHAM が \mathcal{NP} に属することから自明。したがって完全性を示せばよい。
 $\text{DHAM}_{\leq m}^P \text{DHAM}_{\leq 5}$ を示す。

次数: 頂点に付随する辺の本数

アイデア:

次数14の頂点 v (左) の (入ってくる辺集合) と (出ていく辺集合) を右図の 'gadget' で置き換える

左図で v を1度だけ通る閉路と右図で v を1度だけ通る閉路は対応する。

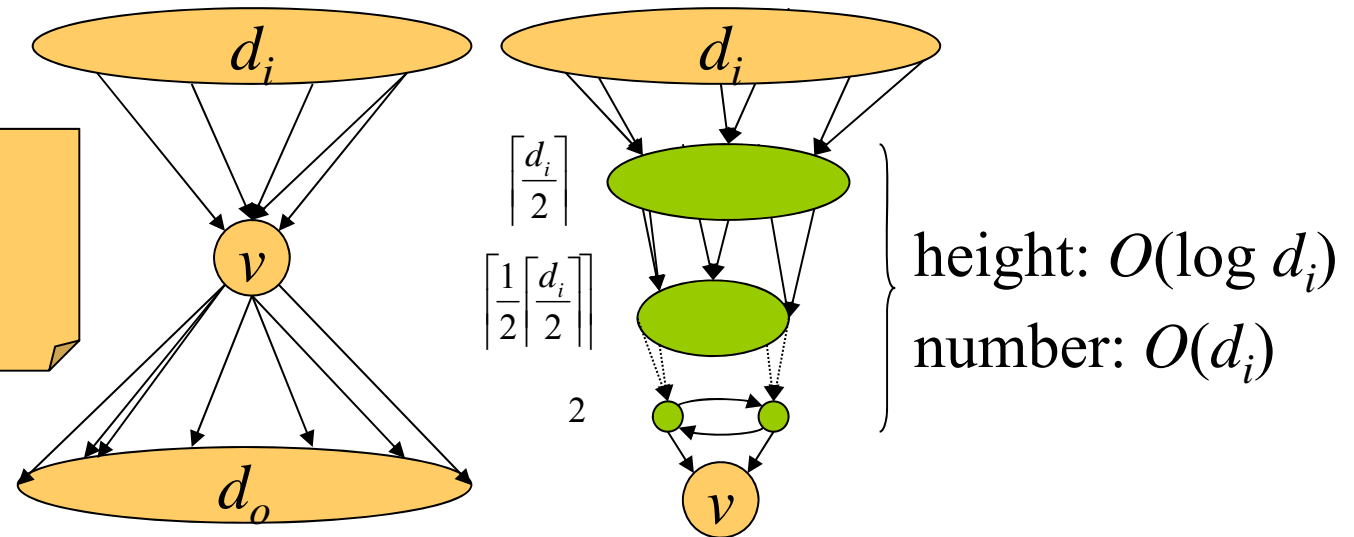


Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5
(abb. $\text{DHAM}_{\leq 5}$) is \mathcal{NP} -complete

Idea:

Points:

- Up to down via **cycle**
- Each vertex has $\text{deg} \leq 5$



[Proof (sketch)]

For each vertex v of degree ≥ 6 , replace the edges around v by the gadget.

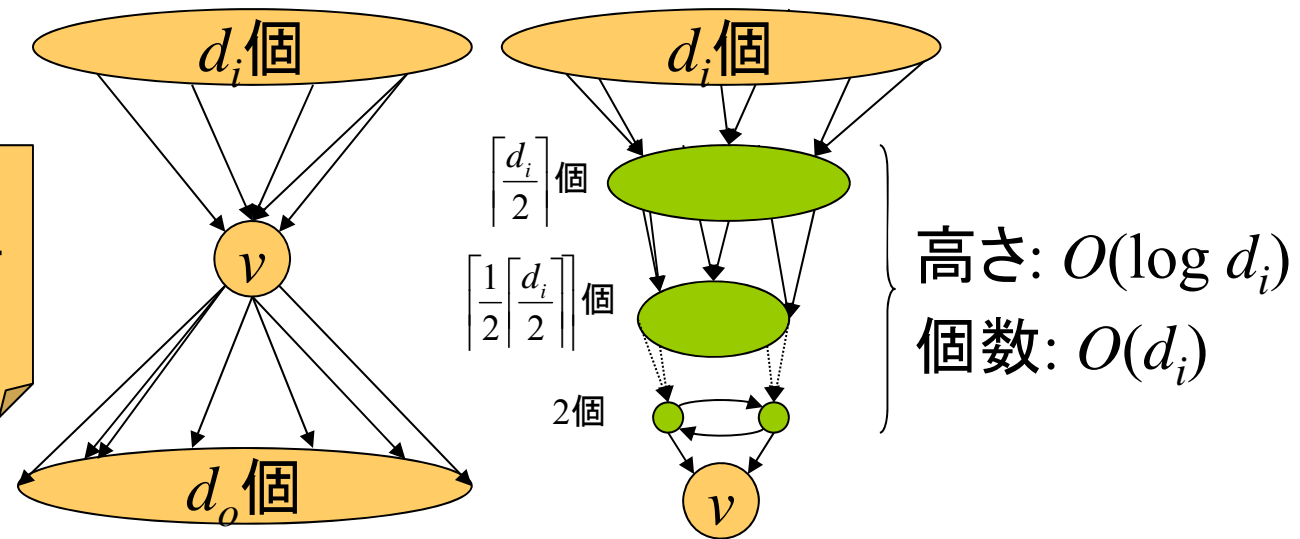
1. If the original graph G has n vertices with m edges, the resultant graph G' contains $O(n+m)$ vertices with $O(m)$ edges. Hence the reduction can be done in polynomial time of n & m .
2. Each vertex in G' has degree *at most 5*.
3. G has a Hamiltonian cycle $\Leftrightarrow G'$ has a Hamiltonian cycle. QED.

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は \mathcal{NP} 完全問題

アイデア:

ポイント:

- ・ 各閉路は上から下
- ・ 各頂点は次数 ≤ 5



[証明(概要)]

与えられたグラフ G の次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

1. 元のグラフ G が n 頂点 m 辺であったなら、gadget で置き換えたあとのグラフ G' は $O(n+m)$ 頂点 $O(m)$ 辺となる。したがって上記の還元は G の大きさの多項式時間で可能。
2. また G' のすべての頂点は次数はたかだか5である。
3. G がハミルトン閉路をもつ $\Leftrightarrow G'$ がハミルトン閉路を持つ QED.

Addition (おまけ)


- R. Uehara, S. Iwata:
Generalized Hi-Q is NP-complete,
The Transactions of the IEICE, E73, p.270-273, 1990.
- P. Zhang, H. Sheng, R. Uehara:
A Double Classification Tree Search Algorithm for
Index SNP Selection, *BMC Bioinformatics*, 5:89, 2004.
- R. Uehara, S. Teramoto:
Computational Complexity of a Pop-up Book,
4th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, 2006.
- R. Uehara:
Simple Geometrical Intersection Graphs,
3rd Workshop on Algorithms and Computation,
Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4921, p.25-33, 2008.
- E. Demaine, M. Demaine, R. Uehara, T. UNO, Y. UNO:
UNO is hard, even for a single player,
5th International Conference on FUN with algorithms,
Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6099, pp. 28-36, 2010.
- S. Teramoto, E. D. Demaine, R. Uehara:
Voronoi Game on Graphs and Its Complexity,
Journal of Graph Algorithms and Applications, Vol. 15, No. 4, pp.485-501, 2011

Many natural hard problems are either

- Poly-time solvable, or
- \mathcal{NP} -hard



Schedule(残りの予定)

- 10/27(Thu): Last class (前半最後の講義)
 - Submission of the report (2) (レポート(2)提出)
 - Course Evaluation Questionnaire (授業アンケート)
 - Office Hour: Comments/Answers on reports
- 10/31(Mon): mid-term exam (中間試験)
 - 40 points  Notes, Textbook, Copy, Printout,...
 - Only pens and pencils (持ち込み不可)
 - Lesson 3~Lesson 6 (講義3~講義6)

You will find necessary definitions at the last page of the test.