

6.2. Completeness based on Polynomial-time Reducibility

6.2.1. Definition of Completeness and its Basic Properties

Def.6.2: For a class \mathcal{C} , if a set A satisfies the following conditions, then it is called \mathcal{C} -complete (under \leq_m^P)

- (a) $\forall L \in \mathcal{C} [L \leq_m^P A]$
- (b) $A \in \mathcal{C}$

Note: Sets satisfying the condition (a) are called \mathcal{C} -hard.

Theorem 6.4. A is any \mathcal{C} -complete set
For any set B we have
(1) $A \leq_m^P B \rightarrow B$ is \mathcal{C} -hard.
(2) $A \leq_m^P B \wedge B \in \mathcal{C} \rightarrow B$ is \mathcal{C} -complete.

Once you have a complete problem, you can use it as a **tool!!**

6.2. 多項式時間還元可能性に基づく完全性

6.2.1. 完全性の定義とその基本的性質

定義6.2: 計算量クラス \mathcal{C} に対し、集合 A が次の条件を満たすとき、それを (\leq_m^P の下で) \mathcal{C} -完全という。

- (a) $\forall L \in \mathcal{C} [L \leq_m^P A]$
- (b) $A \in \mathcal{C}$

補注: 条件(a)を満たす集合は \mathcal{C} -困難。

定理6.4. A : 任意の \mathcal{C} -完全集合
すべての集合 B に対し、
(1) $A \leq_m^P B \rightarrow B$ は \mathcal{C} -困難。
(2) $A \leq_m^P B \wedge B \in \mathcal{C} \rightarrow B$ は \mathcal{C} -完全。

ある問題が完全問題であることがわかったら、それを**道具**として使える！

6.2.2. Proof for completeness

1/11

Two ways to prove (\mathcal{NP} -)completeness
(I) show 'for all L ' according to definition
(II) use some known complete problems

Ex for (I) : Theorem 6.7,

Theorem 6.9 (\equiv Cook's Theorem; simulate TM by SAT)

Easy to handle since, e.g., 3SAT has a uniform structure.

Basically...

1. For any program in standard form,
2. simulate it by SAT formulae
 \rightarrow pretty complicated and tedious

Ex for (II): Example 6.4 ($3SAT \leq_m^P DHAM$), Theorem 6.10, ...

DHAM is \mathcal{NP} -complete for general graphs

DHAM is \mathcal{NP} -complete even for planar graphs

DHAM is \mathcal{NP} -complete even for graphs with max degree=3

DHAM is \mathcal{NP} -complete even for bipartite graphs...

6.2.2. 完全性の証明

1/11

(\mathcal{NP})完全性の証明方法

- (I) 定義通りに「すべての L 」について示す
- (II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: 定理6.7, 定理6.9 (\equiv Cookの定理(SATでTMを模倣))

3SATなどは、形式が一樣なので扱いやすい

基本的には...

1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する
 \rightarrow とても大変(手間がかかる)

(II)の例: 例6.4 ($3SAT \leq_m^P DHAM$), 定理6.10, ...

DHAMは一般のグラフ上で \mathcal{NP} 完全

DHAMは平面グラフに限定しても \mathcal{NP} 完全

DHAMは「頂点の次数=3」に限定しても \mathcal{NP} 完全

DHAMは2部グラフに限定しても \mathcal{NP} 完全...

Theorem 6.10 The following sets are all \mathcal{NP} -complete:

- (1) 3SAT, SAT (reduction from ExSAT)
- (2) DHAM, VC (reduction from 3SAT)
- (3) KNAP, BIN (reduction from 3SAT and $KNAP \leq_m^P BIN$)

(II) Polynomial time reductions from \mathcal{NP} -complete problems:

1. $3SAT \leq_m^P VC$
2. $DHAM \leq_m^P DHAM$ with vertices of degree ≤ 5

Vertex Cover: a vertex set that contains at least one endpoint for each edge

Hamiltonian cycle: a cycle that visits each vertex exactly once

Note : DHAM remains \mathcal{NP} -complete even if max degree 3. But it is polynomial time solvable if max degree 2.

定理6.10: 以下にあげる集合はすべて \mathcal{NP} -完全

- (1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元)
- (2) DHAM, VC (3SATからの還元)
- (3) KNAP, BIN (3SATからの還元と $KNAP \leq_m^P BIN$)

(II) \mathcal{NP} 完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:

1. $3SAT \leq_m^P VC$
2. $DHAM \leq_m^P DHAM$ 頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合
Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度ずつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でも \mathcal{NP} 完全。高々2だと多項式時間で計算可能。

Theorem 6.10(2) : VC is NP-complete

[Proof] Since $VC \in NP$, we show $3SAT \leq_m^P VC$.

For given formula $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, we construct a pair $\langle G, k \rangle$ of a graph and an integer in polynomial time.

There is an assignment that makes $F()=1$
 $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j = (l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ in F , add vertices l_{j1}, l_{j2}, l_{j3} and three edges $(l_{j1}, l_{j2}), (l_{j2}, l_{j3}), (l_{j3}, l_{j1})$
3. add the edge (l_{j1}, x_i^+) if the literal l_{j1} is x_i , or add (l_{j1}, x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n + 2m$

定理6.10(2) : VC は NP 完全問題

[証明] VC \in NP なので、 $3SAT \leq_m^P VC$ であることを示せばよい。

論理式 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が与えられたとする。
 F から以下の条件を満たすグラフと自然数の組 $\langle G, k \rangle$ が多項式時間で構成できることを示す：

F を1にする割当が存在する $\Leftrightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ

G の構成(F は n 変数 m 項とする):

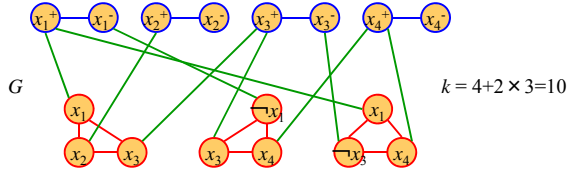
1. F の各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^- と、辺 (x_i^+, x_i^-) を加える
2. F の各項 $C_j = (l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ に対し、頂点 l_{j1}, l_{j2}, l_{j3} と辺 $(l_{j1}, l_{j2}), (l_{j2}, l_{j3}), (l_{j3}, l_{j1})$ を加える
3. 項 C_j のリテラル l_{j1} が x_i のときは辺 (l_{j1}, x_i^+) を、 $\neg x_i$ のときは辺 (l_{j1}, x_i^-) を加える。
4. $k = n + 2m$

There is an assignment that makes $F()=1$
 $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j = (l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ in F , add vertices l_{j1}, l_{j2}, l_{j3} and three edges $(l_{j1}, l_{j2}), (l_{j2}, l_{j3}), (l_{j3}, l_{j1})$
3. add the edge (l_{j1}, x_i^+) if the literal l_{j1} is x_i , or add (l_{j1}, x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n + 2m$

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



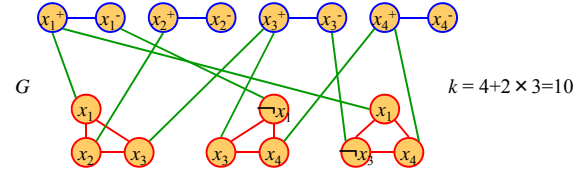
$k = 4 + 2 \times 3 = 10$

F を1にする割当が存在する $\Leftrightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ

G の構成(F は n 変数 m 項とする):

1. F の各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^- と、辺 (x_i^+, x_i^-) を加える
2. F の各項 $C_j = (l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ に対し、頂点 l_{j1}, l_{j2}, l_{j3} と辺 $(l_{j1}, l_{j2}), (l_{j2}, l_{j3}), (l_{j3}, l_{j1})$ を加える
3. 項 C_j のリテラル l_{j1} が x_i のときは辺 (l_{j1}, x_i^+) を、 $\neg x_i$ のときは辺 (l_{j1}, x_i^-) を加える。
4. $k = n + 2m$

例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4 + 2 \times 3 = 10$

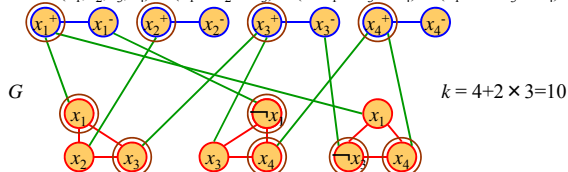
It is easy to see that the construction of G from F can be done in polynomial time of the size of F . Hence, we show that...

There is an assignment that makes $F()=1$
 $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Observation:

From the construction of G ,
 any vertex cover S should contain $\left\{ \begin{array}{l} \text{at least one of } x_i^+ \text{ or } x_i^- \\ \text{at least 2 of 3 vertices in } C_j \end{array} \right.$
 Hence we have $|S| \geq n + 2m = k$.

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4 + 2 \times 3 = 10$

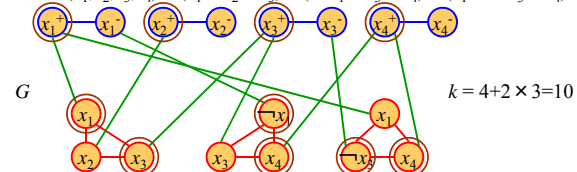
G の構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能。したがって以下を示せばよい:

F を1にする割当が存在する $\Leftrightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ

観察:

G の構成から任意の頂点被覆 S は $\left\{ \begin{array}{l} x_i^+, x_i^- \text{ のどちらかを含む} \\ C_j \text{ の3頂点中、最低2つを含む} \end{array} \right.$ によって $|S| \geq n + 2m = k$ である。

例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4 + 2 \times 3 = 10$

6/11

If there is an assignment that makes $F()=1$, G has a vertex cover of size k

- Put $\begin{cases} x_i^+ & \text{if } x_i=1 \\ x_i^- & \text{if } x_i=0 \end{cases}$ into S for each x_i .
- Since each clause $C_j=(l_{j1}, l_{j2}, l_{j3})$ is satisfied, at least one literal, say l_{j1} , the edge (l_{j1}, x_{i1}) is covered by the variable x_{i1} . Therefore, put the remaining literals (l_{j2}, l_{j3}) into S .

\Rightarrow From the **Observation**, S is a vertex cover of size k .

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

$k = 4 + 2 \times 3 = 10$

6/11

F を1にする割当が存在する $\Rightarrow G$ がサイズ k の頂点被覆を持つ

- それぞれの変数 x_i が $\begin{cases} x_i=1 \text{なら } x_i^+ \text{を } S \text{に入れる} \\ x_i=0 \text{なら } x_i^- \text{を } S \text{に入れる} \end{cases}$
- それぞれの項 $C_j=(l_{j1}, l_{j2}, l_{j3})$ は充足されているので、最低1つのリテラル (l_{j1}) については変数との間の辺 (l_{j1}, x_{i1}) は x_{i1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル (l_{j2}, l_{j3}) を S に入れる。

\Rightarrow **観察** より、 S はサイズ k の頂点被覆になる。

例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

$k = 4 + 2 \times 3 = 10$

7/11

If G has a vertex cover of size k , there is an assignment s.t. $F()=1$

- From **Observation**, a cover S contains $2m$ vertices from the clauses, and n vertices from the variables.
- Thus the cover S contains exactly one of x_i^+ and x_i^- and exactly two literals of a clause C_j .
- Hence each clause C_j contains exactly one literal l_i which is not in S , and hence incident edge should be covered by a variable vertex.

\Rightarrow The following assignment satisfies F : $\begin{cases} x_i=1 \text{ if } x_i^+ \text{ in } S \\ x_i=0 \text{ if } x_i^- \text{ in } S \end{cases}$

Ex: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

$k = 4 + 2 \times 3 = 10$

QED.

7/11

G がサイズ k の頂点被覆を持つ $\Rightarrow F$ を1にする割当が存在する

- 観察** より、被覆 S は項から $2m$ 個、変数から n 個の頂点を含む。
- さらに各変数 x_i については x_i^+ か x_i^- の一方しか、各項 C_j についてはちょうど2つの頂点しか S に含むことができない。
- よって各項 C_j は S に含まれないリテラル l_i を含むが、これに付随する辺は他方が被覆されていないといけない。

$\Rightarrow \begin{cases} x_i^+ \text{が } S \text{に含まれるなら } x_i=1 \\ x_i^- \text{が } S \text{に含まれるなら } x_i=0 \end{cases}$ という割当は F を充足する。

例: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

$k = 4 + 2 \times 3 = 10$

QED.

8/11

Unsatisfiable example:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

G

$k = 3 + 2 \times 4 = 11$

When F is unsatisfiable, it contains at least one clause such that each literal is not covered by a vertex. So, Vertex Cover should contain three literals in the clause. Hence any vertex cover has size at least $k+1$.

8/11

充足できない例:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

G

$k = 3 + 2 \times 4 = 11$

充足できない F では、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは $k+1$ 以上になる。

9/11

Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. $\text{DHAM}_{\leq 5}$) is \mathcal{NP} -complete

[Proof] Since $\text{DHAM} \in \mathcal{NP}$, $\text{DHAM}_{\leq 5} \in \mathcal{NP}$. We $\text{DHAM}_{\leq 5} \leq_m^p \text{DHAM}_{\leq 5}$.

Idea: Replace the set of "arcs to v " and the set of "arcs from v " by a right 'gadget'.

A Hamiltonian cycle through v on the original graph corresponds to the Hamiltonian cycle through v on the resultant graph.

degree: the number of edges incident to a vertex

9/11

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は \mathcal{NP} 完全問題

[証明] (上記の問題を $\text{DHAM}_{\leq 5}$ と略記する)

$\text{DHAM}_{\leq 5}$ が \mathcal{NP} に属するのは、DHAM が \mathcal{NP} に属することから自明。したがって完全性を示せばよい。 $\text{DHAM}_{\leq 5} \leq_m^p \text{DHAM}_{\leq 5}$ を示す。

アイデア: 次数14の頂点 v (左) の (入ってくる辺集合) と (出ていく辺集合) を右図の 'gadget' で置き換える

左図で v を1度だけ通る閉路と右図で v を1度だけ通る閉路は対応する。

次数: 頂点に付随する辺の本数

10/11

Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. $\text{DHAM}_{\leq 5}$) is \mathcal{NP} -complete

Idea:

- Points:
 - Up to down via cycle
 - Each vertex has $\text{deg} \leq 5$

height: $O(\log d_i)$
number: $O(d_i)$

[Proof (sketch)] For each vertex v of degree ≥ 6 , replace the edges around v by the gadget.

- If the original graph G has n vertices with m edges, the resultant graph G' contains $O(n+m)$ vertices with $O(m)$ edges. Hence the reduction can be done in polynomial time of n & m .
- Each vertex in G' has degree at most 5.
- G has a Hamiltonian cycle $\Leftrightarrow G'$ has a Hamiltonian cycle. QED.

10/11

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は \mathcal{NP} 完全問題

アイデア:

- ポイント:
 - 各閉路は上から下
 - 各頂点は次数 ≤ 5

高さ: $O(\log d_i)$
個数: $O(d_i)$

[証明(概要)] 与えられたグラフ G の次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

- 元のグラフ G が n 頂点 m 辺であったなら、gadget で置き換えたあとのグラフ G' は $O(n+m)$ 頂点 $O(m)$ 辺となる。したがって上記の還元は G の大きさの多項式時間で可能。
- また G' のすべての頂点は次数はたかだか5である。
- G がハミルトン閉路をもつ $\Leftrightarrow G'$ がハミルトン閉路を持つ QED.

Addition (おまけ)

Many natural hard problems are either

- Poly-time solvable, or
- \mathcal{NP} -hard

- R. Uehara, S. Iwata: Generalized Hi-Q is NP-complete, *The Transactions of the IEICE*, E73, p.270-273, 1990.
- P. Zhang, H. Sheng, R. Uehara: A Double Classification Tree Search Algorithm for Index SNP Selection, *BMC Bioinformatics*, 5:89, 2004.
- R. Uehara, S. Teramoto: Computational Complexity of a Pop-up Book, *4th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education*, 2006.
- R. Uehara: Simple Geometrical Intersection Graphs, *3rd Workshop on Algorithms and Computation*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4921, p.25-33, 2008.
- E. Demaine, M. Demaine, R. Uehara, T. UNO, Y. UNO: UNO is hard, even for a single player, *5th International Conference on FUN with algorithms*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6099, pp. 28-36, 2010.
- S. Teramoto, E. D. Demaine, R. Uehara: Voronoi Game on Graphs and Its Complexity, *Journal of Graph Algorithms and Applications*, Vol. 15, No. 4, pp.485-501, 2011

Schedule(残りの予定)

- 10/27(Thu): Last class (前半最後の講義)
 - Submission of the report (2) (レポート(2)提出)
 - Course Evaluation Questionnaire (授業アンケート)
 - Office Hour: Comments/Answers on reports
- 10/31(Mon): mid-term exam (中間試験)
 - 40 points
 - Notes, Textbook, Copy, Printout,...
 - Only pens and pencils (持ち込み不可)
 - Lesson 3~Lesson 6 (講義3~講義6)

You will find necessary definitions at the last page of the test.