I216 Computational Complexity and Discrete Mathematics Report (1)

2011, Term 2-1
Ryuhei Uehara(Room I67b, `uehara@jaist.ac.jp`)

Propose(出題): October 13 (Thu)

Deadline(提出期限): October 24 (Thu), 9:20

Note(注意): Do not forget to handwrite your name, student ID, problems, and answers on your report. (レポートには氏名，学生番号，問題，解答を，すべて手書きで書くこと．)

Answer one of the following three problems. (以下の問題から１問選んで答えよ．)

Problem 1 (5 points): Let f be the function defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} f_x(x)\#0 & \text{the program } \lfloor x \rfloor \text{ halts with the input } x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Prove that this function f is not computable. (次の関数 f を考える．

$$f(x) = \begin{cases} f_x(x)\#0 & \text{プログラム } \lfloor x \rfloor \text{ に } x \text{ を代入したら停止するとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

この関数 f は計算不能であることを証明せよ．)

Problem 2 (5 points): The set N of natural numbers is enumerable. Now, prove that the set 2^N of subsets of N is *not* enumerable by diagonalization. (自然数の集合 N は可算無限集合である．N の部分集合の集合 2^N は非可算無限集合であることを対角線論法で証明せよ．) (Hint: For $S = \{1, 2, 3\}$, we have $2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.)

Problem 3 (5 points): At the last slide of the second lecture, we prove the theorem that claims "The set R of all real numbers is not enumerable." Now let replace every "real" by "rational". Then it seems that we prove the theorem that claims "The set R' of all rational numbers is not enumerable." But, the set of all rational numbers is enumerable. Point out where is wrong. (２回目の授業で使ったスライドの最後で「実数全体の集合 R は非可算である」という定理の証明を行った．この中の「実数」をすべて「有理数」で置き換えてみると，一見「有理数全体の集合 R' は非可算である」という定理の証明になる．しかし有理数は可算である．証明のどこが間違っているか，指摘せよ．)