2. 計算可能性入門

計算とは何か？
- 「計算できる」ことと「計算できない」ことの違い
  - 「計算」の基本要素(前回)
  - 「計算できない」ことの証明…対角線論法(今回)

2.1. 帰納的関数論概観

帰納的関数論(recursive function theory)
① “計算”とは何かについての研究
② 計算不可能性の証明
③ 計算不可能な関数のクラスの構造的研究
④ 他の数学との関連分野

Chapter 2: Introduction to Computability

What “Computation” is…
- Difference between “computable” and “incomputable”
  - Basic factor of a “computation” (Done)
  - Proof of “incomputable”…diagonalization (Today)

2.1. Studies on recursive functions

recursive function theory
(1) studies on what is "computation"
(2) proof of incomputability
(3) structural studies on a class of incomputable functions
(4) related mathematics fields

2. 計算可能性入門

① 計算とは何かについての研究
「何をもって計算可能な関数というか？」

・クリーネが定義した帰納的関数(recursive function)
・チューリングが考えたチューリング機械(Turing machine)

➔帰納的関数全体＝チューリング機械で計算可能な関数全体

計算可能性の定義…チャーチの提唱（Church’s Thesis)

Chapter 2: Introduction to Computability

(1) Studies on what is computation.
"When do we call a function computable?“

・recursive function theory by Kleene
・Turing machine theory by Turing

➔the whole set of recursive functions
＝the whole set of functions computable by Turing machines

Church's Thesis on the definition of “computability”

② 計算不可能性の証明
・計算可能性の証明ではプログラムを作ればよい
・計算不可能性の証明では
どんなプログラムも作れないことの証明：
「対角線論法」
「帰納的還元性」

難しい

③ 計算不可能な関数のクラスの構造的研究
難しさに応じて階層化されたクラス
→構造的研究

④ 他の数学との関連分野
数理論理学(mathematical logic)など

(2) Proof of incomputability
・Proof of computability is easy: just give a program
・to prove incomputability
must prove that no program exists…
proof tools: diagonalization
recursive reducibility

Difficult!

(3) Structural studies on a class of incomputable functions
hierarchical class depending of hardness
→structural studies

(4) Related mathematics fields
mathematical logic

2. 計算可能性入門

2.4. 計算不可能性の証明と対角線論法

停止問題(停止性判定問題)

入力: プログラム A とそれへの入力 x

出力: Aへ x を与えて実行させると(いつかは)停止するか？

ここでは1入力プログラムの停止問題のみ考えるが，この結果を多入力の場合に拡張することは可能.

(注意)プログラムもΣ^*上にコード化可能.

つまり，A も x もΣ^*上の文字列と考えることができる.

今日の暗黙の記法

A　大文字はプログラム名

$\lceil A \rceil$　$\lceil\ \rceil$はプログラムのコード

a　小文字はプログラムコード

Chapter 2: Introduction to Computability

2.4. Incomputability Proof and Diagonalization

Halting Problem (Problem of deciding whether it halts)

Input: a program A and an input x to it.

Output: Whether does it stop if x is given to A?

Here we only consider the problem only for one-input programs, but we can generalize the argument into the cases of multiple inputs.

(Remark) Programs are also encoded into strings on Σ^*.

That is, A and x are also considered as strings on Σ^*.

Implicit Notations

A　Capital means "program name"

$\lceil A \rceil$　$\lceil\ \rceil$ means program code

a　Small means "program code"

各 $a, x \in \Sigma^*$ に対し,

IsProgram(a)

⇔ [aは1入力の文法的に正しい標準形プログラムのコード]

eval(a, x)

$$\equiv \begin{cases} f\_a(x), & \text{IsProgram}(a)\text{のとき}, \\ ?, & \text{その他のとき}. \end{cases}$$

$f\_a(x)$: コード a が表すプログラムAに入力 x を加えたときの出力の値. ($f_a(x)$は部分関数)

定理2.16: IsProgram と eval はプログラムで実現可能.

IsProgram :　コンパイラ(lint)

eval(a, x) :　コード a が表すプログラムに x を入力したときの実行をシミュレートすればよい.
つまり，インタープリタ. (エミュレータ)

詳細は4.3節

for $a, x \in \Sigma^*$

IsProgram(a)

⇔ [a is a one-input grammatically correct standard program]

eval(a, x)

$$\equiv \begin{cases} f\_a(x), & \text{if IsProgram}(a), \\ ?, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

$f\_a(x)$: output value when an input x is given to the program A represented by the code a

Theorem2.16: IsProgram and eval are computable (programmable).

IsProgram :　compiler(lint program)

eval(a, x) :　it suffices to simulate the behavior of the program for a code a with an input x, i.e. interpreter or emulator

refer to Section 4.3 for detail

述語Haltの定義

コードaが表現するプログラム

各 $a, x \in \Sigma^*$ に対し

Halt(a, x)

⇔ [IsProgram(a) $\wedge$ [入力 x に対し$\lfloor a \rfloor$ は停止する.]]

Definition of a predicate Halt

Program described by code a

for $a, x \in \Sigma^*$

Halt(a, x)

⇔ [IsProgram(a) $\wedge$ [$\lfloor a \rfloor$ stops for an input x]]

定理2.17 Haltは計算不可能
（証明）
背理法：Haltが計算可能だと仮定して矛盾を導く.
Haltが計算可能➔Haltを計算するプログラムHが存在する.
そのHを用いて，次のようなプログラムXを作る.

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
 label LOOP;
 begin
    if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                  else halt(0) end-if
 end.
```

実際には標準形で書かれていると仮定.

プログラム$\lfloor w \rfloor$にwを入力したとき停止するかどうかを
プログラムHを呼び出して判定し，
答が *true* なら無限ループに入り，
答が *false* なら0を出力して停止する，というプログラム

H：プログラム，Halt：述語

Theorem 2.17: Halt is incomputable.
（Proof）
By contradiction：Assume that Halt is computable.
Halt is computable➔There is a program H to compute Halt.
Using the H, we obtain the following program X.

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
 label LOOP;
 begin
    if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                  else halt(0) end-if
 end.
```

Assume that it is written in the standard form

Using the function H we check whether the program $\lfloor w \rfloor$ stops for an input w. If the answer is "HALT" then the program X enters infinite loop, and if it is "DO NOT HALT" then it stops.

H：program or function，Halt：predicate

$x = \lceil X \rceil$とし，xを
プログラムXに入力
(i) 無限ループに入ってしまう，or
(ii) 0を出力して停止.

X(w)
プログラム$\lfloor w \rfloor$にwを入力したとき停止するかどうかをプログラムHを呼び出して判定し，
答が *true* なら無限ループに入り，
答が *false* なら0を出力して停止する

(i) を仮定すると…
・プログラムがループに入るから，H (x, x)= *true*
・つまり X(x) は停止する⇒仮定に矛盾

(ii) を仮定すると…
・プログラムが終了するから，H (x, x)=*false*
・つまり X(x) は停止しない⇒仮定に矛盾

どちらの場合も矛盾を生じる。
したがって「Haltは計算可能」という仮定は誤り.
証明終

H：プログラム
Halt：述語

Let $x = \lceil X \rceil$ and input x to the program X
(i) enters an infinite loop, or
(ii) stops normally with the output 0.

Case (i)
・Since it enters infinite loop, ¬Halt(x, x)
・at the if statement in the program X we have H (x, x)=false
So, halt(0) is executed（normal termination）：contradiction

Case (ii)
・Since it stops, Halt(x, x) is true.
・at the if statement in the program X we have H (x, x)=true
So, it enters an infinite loop: contradiction

In either case we have a contradiction.
That is, the assumption that "Halt is computable" is wrong.
End of proof

H：program or function，Halt：predicate

定理2.17の別証明（対角線論法による）

証明：
計算可能な（1引数の）関数全体の集合をF_1とする.
プログラムのコードはΣ*の元だから，"文法的に正しいプログラムのコード"を小さい順に
$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$
と（長さ優先の辞書式順序で）並べることができる.
よってF_1の関数を $f\_a_1, f\_a_2, \dots, f\_a_k, \dots$ と並べることができ、以下の表をえる。

	a_1	a_2	a_3	…	a_k
f_a_1	1	ε	00		0
f_a_2	0	⊥	1		ε
f_a_3	0	11	0		11
:	………				
:	………				
f_a_k	ε	ε	1		0

$f_a_i(a_j)$の値

Another proof of Theorem 2.17 (by diagonalization)

Proof:
Let F_1 be a set of all computable functions (with one argument) .
Since each program code is in Σ*, we can enumerate all grammatically correct program codes
$a_1, a_2, \dots, a_k \dots$
in the psuedo-lexicographical order. *Thus, we can also enumerate all the functions in* F_1:
$f\_a_1, f\_a_2, \dots, f\_a_k, \dots$
that gives the following table:

	a_1	a_2	a_3	…	a_k
f_a_1	1	ε	00		0
f_a_2	0	⊥	1		ε
f_a_3	0	11	0		11
:	………				
:	………				
f_a_k	ε	ε	1		0

The value of $f\_a_i(a_j)$

定理2.17の別証明（対角線論法による）

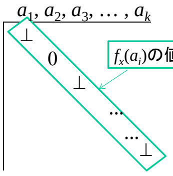
証明：
ここで Halt が計算可能なら、それを計算するプログラム H が存在する。
そして H を使うと以下の関数 f_x が計算可能であることがわかる。

$f_x(a) = \perp$,　Halt(a, a)のとき
$= 0$,　その他のとき

先の表と照らし合わせると…

	a_1	a_2	a_3	…	a_k
f_a_1	1	ε	00		0
f_a_2	0	⊥	1		ε
f_a_3	0	11	0		11
:	………………………				
:	………………………				
f_a_k	ε	ε	1		0

f_a_iの値



どんな整数 i に対しても以下が成立：
$f\_a_i(a_i) \neq f_x(a_i)$

よって f_x は F_1 の中に現れない！

よって $f_x(a)$ は F_1 の要素ではない。つまり Halt は計算可能ではない。

Another proof of Theorem 2.17 (by diagonalization)

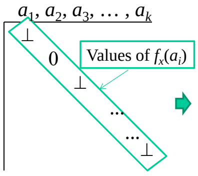
Proof:
If Halt is computable, there exists a program H that computes Halt.
Using H, we can compute the following function f_x.

$f_x(a) = \perp$,　if Halt(a, a)
$= 0$,　otherwise

Comparing to the table…

	a_1	a_2	a_3	…	a_k
f_a_1	1	ε	00		0
f_a_2	0	⊥	1		ε
f_a_3	0	11	0		11
:	………………………				
:	………………………				
f_a_k	ε	ε	1		0

Values of f_a_i



For any integer i, we have:
$f\_a_i(a_i) \neq f_x(a_i)$

Thus f_x does not appear in F_1!

Hence $f_x(a)$ is not an element in F_1. Therefore, Halt is not computable.

[関数]の個数は[計算できる関数]の個数よりも``多い"

対角線論法：
ある要素が無限集合に属さないことを示すための論法。
ある関数の集合 G が与えられたとき，その集合に属さない関数 g を構成する方法を与えている。
こうして構成した g は、対角成分がつねに異なるため、関数集合 G には属さない。

The number of *functions* is “greater” than the number of *computable functions.*

Diagonalization
Given a set G of functions, construct a function g which does not belong to G.

対角線論法

可算無限集合： 自然数全体の集合との間に1対1対応がある集合のこと.
可算集合：有限または可算無限である集合のこと.
つまり，1つずつ要素を取り出してきて，もれなく書き並べられるもの

例1. 正の偶数全体の集合Eは可算無限である.
自然数全体の集合Nの要素 i と，Eの要素 $2i$ を対とする1対1対応がある.
例2. 整数全体の集合Zは可算無限である.
1対1対応がある．または，Z={0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...}と列挙できる.
例3. 有理数全体の集合は可算無限である.（なぜか？）

定理：実数全体の集合Rは非可算である.

Diagonalization

Enumerable infinite set:　**a set with one-to-one correspondence with the set of all natural numbers**
Enumerable set: finite or enumerable infinite set.
that is, a set whose elements are enumerable one by one.

Ex.1. The set E of all even positive integers is enumerable infinite.
one-to-one correspondence between an element i of the set of all natural numbers and an element $2i$ of the set E
Ex.2. The set Z of all integers is enumerable infinite.
We can enumerate them as Z={0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...}.
Ex.3. The set R of all rational numbers is enumerable infinite. (Why?)

Theorem: The set R of all real numbers is not enumerable.

定理：実数全体の集合Rは非可算である.

0以上1未満の実数全体の集合Sが非可算であることを対角線論法で証明する.
可算であると仮定すると，すべての要素を書き並べることができる：

$0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$
$0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$
$0.a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}\ldots$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots$　ただし，$a_{ij} \in \{0,1, \ldots , 9\}$

$0.\boxed{a_{11}}a_{12}a_{13}\ldots$
$0.a_{21}\boxed{a_{22}}a_{23}\ldots$
$0.a_{31}a_{32}\boxed{a_{33}}\ldots$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}\ldots$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots a_{kk}$

上の並びで対角線上にある数に注目し，新たな無限小数
$x = 0.b_1b_2b_3\ldots$
を作る．ここで，
if a_{kk}=1 then b_k = 2 else b_k=1
としてb_kを定める.
このように作られた無限小数は明らかに0と1の間の実数である.
しかし，作り方から，上に列挙したどの要素とも等しくない（対角線の所で必ず異なる）.
つまり，xはSに属さないことになり，矛盾である.
したがって，Sが可算であるという仮定に誤りがある.

Theorem: The set R of all real numbers is not enumerable.

Using the diagonalization we prove that the set S of all real numbers between 0 and 1 is not enumerable. By contradiction, we assume that it is enumerable:

$0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$
$0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$
$0.a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}\ldots$

$0.\boxed{a_{11}}a_{12}a_{13}\ldots$
$0.a_{21}\boxed{a_{22}}a_{23}\ldots$
$0.a_{31}a_{32}\boxed{a_{33}}\ldots$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}\ldots$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots a_{kk}$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots$ where $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots , 9\}$

Define a new real number x by collecting those digits in the diagonal
$x = 0.b_1b_2b_3\ldots$
where b_k is defined by
if a_{kk}=1 then b_k = 2 else b_k=1

The number x defined above is obviously between 0 and 1, but it is different from any number listed above since it is different at its diagonal position.
That is, x does not belong to S, which is a contradiction.
Therefore, our assumption that S is enumerable is wrong.