6.2.2. 完全性の証明

($\mathcal{NP}$)完全性の証明方法
(I) 定義通りに[すべてのL]について示す
(II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: 定理6.7, 定理6.9(≒Cookの定理(SATでTMを模倣))

3SATなどは、形式が一様なので扱いやすい

基本的には…
1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する

→とても大変(手間がかかる)

(II)の例: 例6.4(3SAT $\leq_m^P$ DHAM), 定理6.10, …

DHAMは一般のグラフ上で$\mathcal{NP}$完全

DHAMは平面グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全
DHAMは「頂点の次数=3」に限定しても$\mathcal{NP}$完全
DHAMは2部グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全…

6.2.2. Proof for completeness

Two ways to prove ($\mathcal{NP}$-)completeness
(I) show 'for all L' according to definition
(II) use some known complete problems

Ex for (I) : Theorem 6.7,
Theorem 6.9(≒Cook's Theorem; simulate TM by SAT)

Easy to manipulate since, e.g., 3SAT has a uniform structure.

Basically…
1. For any program in standard form,
2. simulate it by SAT formulae

→pretty complicated and tedious

Ex for (II): Example 6.4(3SAT$\leq_m^P$DHAM), Theorem 6.10, …

DHAM is $\mathcal{NP}$-complete for general graphs

DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for planar graphs
DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for graphs with max degree=3
DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for bipartite graphs …

定理6.10: 以下にあげる集合はすべて$\mathcal{NP}$-完全
(1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元)
(2) DHAM, VC (3SATからの還元)
(3) KNAP, BIN (3SATからの還元とKNAP $\leq_m^P$BIN)

(II) $\mathcal{NP}$完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:
1. 3SAT $\leq_m^P$ VC
2. DHAM $\leq_m^P$ 頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合
Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度ずつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でも$\mathcal{NP}$完全。
高々2だと多項式時間で計算可能。

Theorem 6.10 The following sets are all $\mathcal{NP}$-complete:
(1) 3SAT, SAT (reduction from ExSAT)
(2) DHAM, VC (reduction from 3SAT)
(3) KNAP, BIN (reduction from 3SAT and KNAP $\leq_m^P$BIN)

(II) Polynomial time reductions from $\mathcal{NP}$-complete problems:
1. 3SAT $\leq_m^P$ VC
2. DHAM $\leq_m^P$DHAM with vertices of degree ≦5

Vertex Cover: a vertex set that contains at least one endpoint for each edge
Hamiltonian cycle: a cycle that visits each vertex exactly once

Note : DHAM remains $\mathcal{NP}$-complete even if max degree 3.
But it is polynomial time solvable if max degree 2.

定理6.10(2) : VC は $\mathcal{NP}$ 完全問題

[証明] VC ∈ $\mathcal{NP}$ なので、3SAT $\leq_m^P$ VC であることを示せばよい。

論理式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ が与えられたとする。
Fから以下の条件を満たすグラフと自然数の組$<G, k>$が多項式時間で構成できることを示す:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):
1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^-と、辺(x_i^+, x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1}, x_i^+) を、¬x_i のときは辺(l_{i1}, x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

Theorem 6.10(2) : VC is $\mathcal{NP}$-complete

[Proof] Since VC ∈ $\mathcal{NP}$, we show 3SAT $\leq_m^P$ VC.

For given formula $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, we construct a pair $<G,k>$ of a graph and an integer in polynomial time.

There is an assignment that makes $F()$=1
⇔G has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):
1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})
3. add the edge (l_{i1}, x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1}, x_i^-) if it is ¬x_i for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

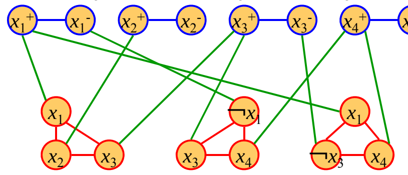
Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+,x_i^-と、辺(x_i^+,x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1}\vee l_{i2}\vee l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\neg x_3\vee x_4)$

G



$k = 4+2\times 3=10$

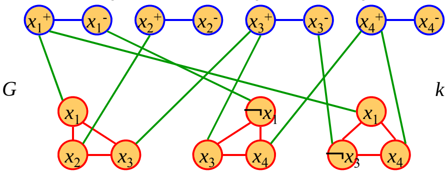
There is an assignment that makes $F()=1$ ⇔G has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+,x_i^- and the edge (x_i^+,x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1}\vee l_{i2}\vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})
3. add the edge (l_{i1},x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1},x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\neg x_3\vee x_4)$

G



$k = 4+2\times 3=10$

Gの構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能。したがって以下を示せばよい:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

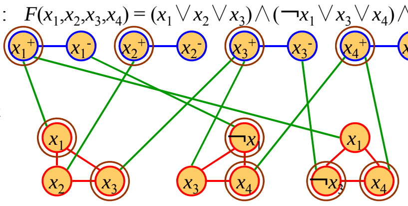
観察:

Gの構成から任意の頂点被覆Sは $\begin{cases} x_i^+,x_i^- \text{のどちらかを含む} \\ C_j\text{の3頂点中、最低2つ含む} \end{cases}$

よって $|S| \geqq n+2m = k$ である。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\neg x_3\vee x_4)$

G



$k = 4+2\times 3=10$

It is easy to see that the construction of G from F can be done in polynomial time of the size of F. Hence, we show that…

There is an assignment that makes $F()=1$ ⇔G has a vertex cover of size k

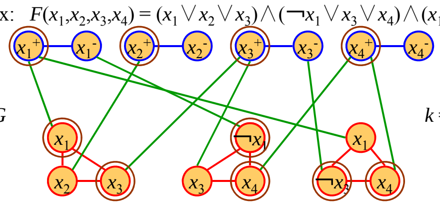
Observation:

From the construction of G, any vertex cover S should contain $\begin{cases} \text{at least one of } x_i^+ \text{ or } x_i^- \\ \text{at least 2 of 3 vertices in } C_j \end{cases}$

Hence we have $|S| \geqq n+2m = k$.

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\neg x_3\vee x_4)$

G



$k = 4+2\times 3=10$

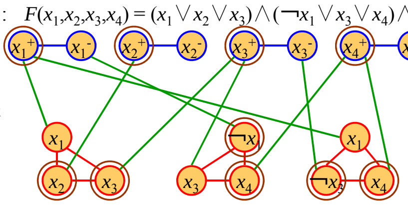
Fを1にする割当が存在する⇒Gがサイズkの頂点被覆を持つ

1. それぞれの変数 x_i が $\begin{cases} x_i=1\text{なら } x_i^+\text{を}S\text{に入れる} \\ x_i=0\text{なら } x_i^-\text{を}S\text{に入れる} \end{cases}$
2. それぞれの項$C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ は充足されているので、最低1つのリテラル(l_{i1})については変数との間の辺(l_{i1},x_{i1})は x_{i1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル(l_{i2},l_{i3})を S に入れる。

⇒ **観察** より、Sはサイズkの頂点被覆になる。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\neg x_3\vee x_4)$

G



$k = 4+2\times 3=10$

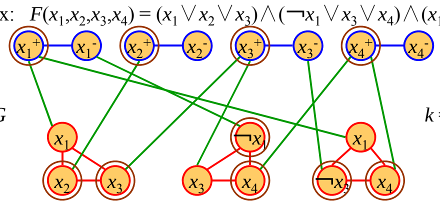
If there is an assignment that makes $F()=1$, G has a vertex cover of size k

1. Put $\begin{cases} x_i^+ \text{ if } x_i=1 \\ x_i^- \text{ if } x_i=0 \end{cases}$ into S for each x_i.
2. Since each clause $C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ is satisfied, at least one literal, say l_{i1}, the edge (l_{i1},x_{i1}) is covered by the variable x_{i1}. Therefore, put the remaining literals (l_{i2},l_{i3}) into S.

⇒ From the **Observation,** S is a vertex cover of size k.

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\neg x_3\vee x_4)$

G



$k = 4+2\times 3=10$

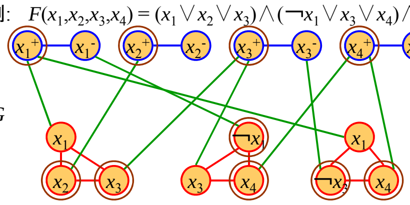
Gがサイズkの頂点被覆を持つ⇒ Fを1にする割当が存在する

1. 観察 より、被覆Sは項から$2m$個、変数からn個の頂点を含む。
2. さらに各変数x_iについてはx_i^+かx_i^-の一方しか、各項C_jについてはちょうど2つの頂点しかSに含むことができない。
3. よって各項C_jはSに含まれないリテラルl_iを含むが、これに付随する辺は他方が被覆されていなければならない。

⇒ $\left\{\begin{array}{l} x_i^+\text{が}S\text{に含まれるなら } x_i=1 \\ x_i^-\text{が}S\text{に含まれるなら } x_i=0 \end{array}\right\}$ という割当はFを充足する。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\neg x_3\vee x_4)$

G



$k=4+2\times 3=10$

QED.

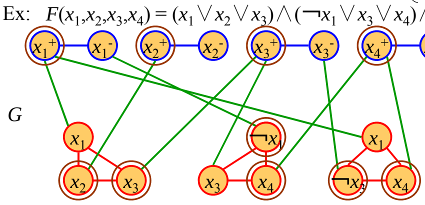
If G has a vertex cover of size k, there is an assignment s.t. $F()=1$

1. From Observation, a cover S contains $2m$ vertices from the clauses, and n vertices from the variables.
2. Thus the cover S contains exactly one of x_i^+ and x_i^- and exactly two literals of a clause C_j.
3. Hence each clause C_j contains exactly one literal l_i which is not in S, and hence incident edge should be covered by a variable vertex.

⇒ The following assignment satisfies F: $\left(\begin{array}{l} x_i=1 \text{ if } x_i^+ \text{ in } S \\ x_i=0 \text{ if } x_i^- \text{ in } S \end{array}\right)$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\neg x_3\vee x_4)$

G



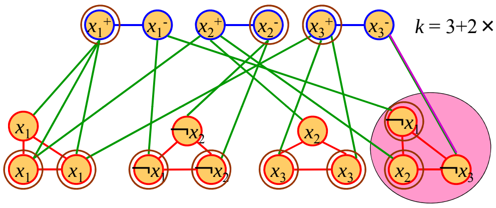
$k=4+2\times 3=10$

QED.

充足できない例:

$F(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_1\vee x_1)\wedge(\neg x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_2)\wedge(x_2\vee x_3\vee x_3)$
$\wedge(\neg x_1\vee x_2\vee\neg x_3)$

G



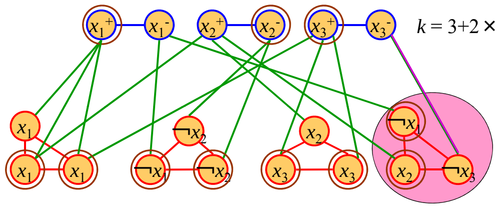
$k=3+2\times 4=11$

充足できないFでは、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは k+1以上になる。

Unsatisfiable example:

$F(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_1\vee x_1)\wedge(\neg x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_2)\wedge(x_2\vee x_3\vee x_3)$
$\wedge(\neg x_1\vee x_2\vee\neg x_3)$

G



$k=3+2\times 4=11$

When F is unsatisfiable, it contains at least one clause such that each literal is not covered by a vertex. So, Vertex Cover should contain three literals in the clause. Hence any vertex cover has size at least k+1.

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

次数: 頂点に付随する辺の本数

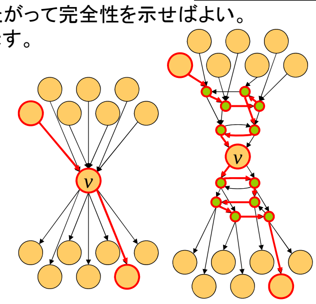
[証明] (上記の問題をDHAM$_{\leqq 5}$と略記する)

DHAM$_{\leqq 5}$ が$\mathcal{NP}$に属するのは、DHAMが$\mathcal{NP}$に属することから自明。したがって完全性を示せばよい。DHAM$\leq_m^P$ DHAM$_{\leqq 5}$を示す。

アイデア:

次数14の頂点v(左)の(入ってくる辺集合)と(出ていく辺集合)を右図の`gadget'で置き換える

左図でvを1度だけ通る閉路と右図でvを1度だけ通る閉路は対応する。



Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. DHAM$_{\leqq 5}$) is $\mathcal{NP}$-complete

degree: the number of edges incident to a vertex

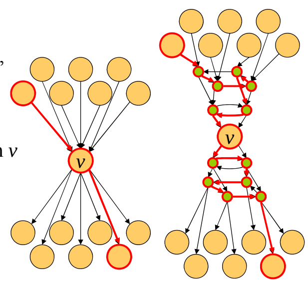
[Proof]

Since DHAM $\in\mathcal{NP}$, DHAM$_{\leqq 5}\in\mathcal{NP}$.
We DHAM $\leq_m^P$ DHAM$_{\leqq 5}$.

Idea:

Replace the set of "arcs to v" and the set of "arcs from v" by a right 'gadget'.

A Hamiltonian cycle through v on the original graph corresponds to the Hamiltonian cycle through v on the resultant graph.

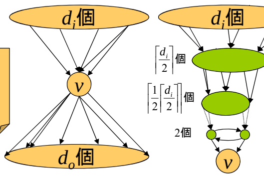


10/11

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

アイデア:

ポイント:
・ 各閉路は上から下
・ 各頂点は次数≦5



高さ: $O(\log d_i)$
個数: $O(d_i)$

[証明(概要)]

与えられたグラフGの次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

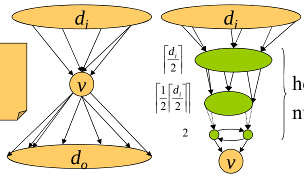
1. 元のグラフGがn頂点m辺であったなら、gadget で置き換えたあとのグラフG'は $O(n+m)$頂点 $O(m)$辺となる。したがって上記の還元はGの大きさの多項式時間で可能。
2. またG'のすべての頂点は次数はたかだか5である。
3. Gがハミルトン閉路をもつ⇔G'がハミルトン閉路を持つ　QED.

10/11

Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. DHAM$_{\leqq 5}$) is $\mathcal{NP}$-complete

Idea:

Points:
• Up to down via cycle
• Each vertex has deg≦5



height: $O(\log d_i)$
number: $O(d_i)$

[Proof (sketch)]

For each vertex v of degree≧6, replace the edges around v by the gadget.

1. If the original graph G has n vertices with m edges, the resultant graph G' contains $O(n+m)$ vertices with $O(m)$ edges. Hence the reduction can be done in polynomial time of n & m.
2. Each vertex in G' has degree *at most* 5.
3. G has a Hamiltonian cycle ⇔ G' has a Hamiltonian cycle.　QED.

Addition (おまけ)

多くの自然な問題は
・ 多項式時間で解けるか
・ $\mathcal{NP}$困難か
のどちらかである場合が多い(?)

- R. Uehara, S. Iwata:
  Generalized Hi-Q is NP-complete,
  The Transactions of the IEICE, E73, p.270-273, 1990.
- P. Zhang, H. Sheng, R. Uehara:
  A Double Classification Tree Search Algorithm for Index SNP Selection, *BMC Bioinformatics*, 5:89, 2004.
- R. Uehara, S. Teramoto:
  Computational Complexity of a Pop-up Book,
  4th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, 2006.

- R. Uehara:
  Simple Geometrical Intersection Graphs,
  3rd Workshop on Algorithms and Computation,
  Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4921, p.25-33, 2008.
- E. Demaine, M. Demaine, R. Uehara, T. UNO, Y. UNO:
  UNO is hard, even for a single player,
  5th International Conference on FUN with algorithms,
  Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6099, pp. 28-36, 2010.

- S. Teramoto, E. D. Demaine, R. Uehara:
  Voronoi Game on Graphs and Its Complexity,
  Journal of Graph Algorithms and Applications, Vol. 15, No. 4, pp.485-501, 2011

残りの予定(Schedule)

- 10月28日(今日)
  – レポートの回収
- 11月11日(次回)
  - はじめ:補講・アンケート・レポートの解説・その他
  - 中間試験(Mid term exam)
  - レポートの返却

11月4日は入試のため講義なし

• 持込み不可(No notes, texts, copies etc.)
• 演習問題レベル(Exercise level)
• 計算量の理論から出題(Range is Computational Complexity)
• 必要な定義は問題用紙の最後につけておく