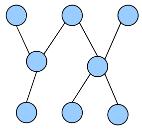
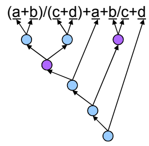
I118 グラフとオートマトン理論
Graphs and Automata

担当: 上原 隆平(Ryuhei UEHARA)
uehara@jaist.ac.jp
http://www.jaist.ac.jp/~uehara/

6.11 木(Tree)



- **<u>木(tree)</u>** … (辺の向きを考えない)閉路がなく，連結なグラフ
- 有向グラフにおいて，ある頂点 *r* からすべての頂点に到達可能であるとき，*r* を**<u>根(root)</u>**という
- **<u>根付き木(rooted tree)</u>** … 一つの頂点が根となる木



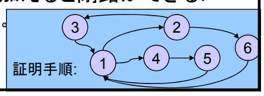
6.12 根つき木(rooted tree)

- **祖先(ancestor)**
  v 自身，あるいは，*r* から *v* に至る経路上の任意の頂点 *u* を，*v* の**<u>祖先(ancestor)</u>**という.
- **子孫(descendant)**
  u が *v* の祖先であるとき，*v* は *u* の**<u>子孫(descendant)</u>**であるという. 定義より，*u* 自身も *u* の子孫である.
- **親(parent)，子(child)**
  r から *v* に至る経路の最後の辺が (*u*, *v*) であるとき，*u* は *v* の**<u>親(parent)</u>**，*v* は *u* の**<u>子(child)</u>** であるという.
- **<u>葉(leaf)</u>**
  子のない頂点 (正の次数が0で負の次数が1の頂点).

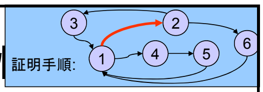
6.13 木の性質

- 定理
  G = (*V*, *E*) を2個以上の頂点を持つ無向グラフとする. このとき，以下の条件はすべて同等である.
  1. *G* は木である. (閉路がなく、連結)
  2. *G* における任意の2つの頂点の間には，ただ1つの単純な経路が存在する.
  3. *G* は連結である. しかし，1つでも辺を取り除くと非連結になる.
  4. *G* は連結で，|*E*| = |*V*| - 1.
  5. *G* は無閉路で，|*E*| = |V| - 1.
  6. *G* は無閉路で，1つでも辺を加えると閉路ができる.

おまけ: どういうダイアグラムが証明として成立するのか？



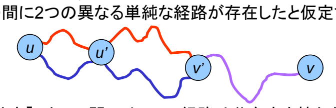
6.13 木の性質



「*G* は木である(閉路がなく連結)」
→「*G* における任意の2つの頂点の間には，ただ1つの単純な経路が存在する. 」

[証明] (背理法)

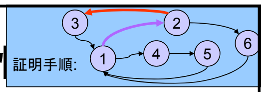
ある2つの頂点*u*,*v*が存在して、
u,*v*の間に2つの異なる単純な経路が存在したと仮定する。



このとき「*u*'と*v*'の間では2つの経路は共有点を持たない」という2点*u*',*v*'が存在する。(2つの経路は異なることから)

u',*v*'とこの間の2つの経路はサイクルを構成するので、*G*が木であることに矛盾。よってこうした*u*,*v*は存在しない。

6.13 木の性質



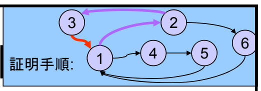
「*G* における任意の2つの頂点の間には，ただ1つの単純な経路が存在する. 」
→「*G*は連結である. しかし，1つでも辺を取り除くと非連結になる.

[証明]

仮定より、*G* は連結である。したがってどの辺を取り除いても*G*が非連結になることを示す。

任意の辺 *e*={*u*,*v* } を考える。仮定より、*e* は *u*, *v* 間のただ一つの単純な経路である。
したがって *e* を取り除くと、*u* から *v* へ到達できなくなる。
つまり *e* を取り除くと *G* は非連結になる。

6.13 木の



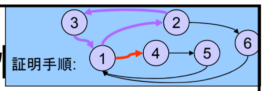
「Gは連結である. しかし, 1つでも辺を取り除くと非連結になる. →「G は木である(閉路がなく連結)」

[証明]

Gに閉路がないことを背理法で示す。

Gに閉路$(v_1,v_2,\dots,v_k,v_1)$があったとする。
すると辺$e=\{v_1,v_2\}$を取り除いても、Gは非連結にならない。
よって仮定に矛盾する。すなわちGは閉路をもたない。

6.13 木の

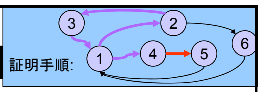


「G は木である(閉路がなく連結)」
→「G は連結で, $|E| = |V| - 1$. 」

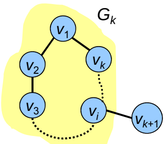
[事実] $|V|\geq 2$であるどんな木も、葉が2つ以上ある。(演習問題。証明しない)

[証明] $|E|=|V|-1$ が成立することを帰納法で証明する。
[基本ステップ] Gが2頂点からなる木のときは$|V|=2$, $|E|=1$ なので成立。
[帰納ステップ] Gがn頂点からなる木として、すべてのn-1頂点の木 $G'=(V',E')$について $|E'|=|V'|-1$ が成立するとする。
[事実]より G は葉 v をもつ。Gからvを取り除いたグラフを$G''=(V'',E'')$とすると、G''は明らかに木で、n-1頂点からなる。
したがって帰納法の仮定から $|E''|=|V''|-1$。
G''はGから1頂点と1辺を除いたグラフなので、$|E|=|E''|+1=|V''|-1+1=|V|-1$。

6.13 木の



「G は連結で, $|E| = |V| - 1$. 」
→「G は無閉路で, $|E| = |V| - 1$. 」



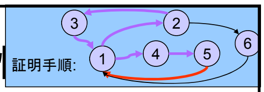
[証明] Gが無閉路であることを背理法で示す。
Gが閉路 $(v_1,v_2,\dots,v_k,v_1)$ をもったと仮定する。

$V_k=\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$とし$V_k$による誘導部分グラフを$G_k=(V_k,E_k)$とする。
このときG_kは上記の閉路を含むので$|E_k|\geq k$である。
$|V|=k$とすると$|E|=|E_k|\geq k=|V|$と$|E|=|V|-1$が矛盾する。したがって$k<|V|$。

Gは連結なので、V_k中のあるv_iに隣接し、$v_{k+1}\in V$かつ$v_{k+1}\notin V_k$を満たす頂点v_{k+1}が存在するはずである。
G_kにv_{k+1}を追加した誘導部分グラフを$G_{k+1}=(V_{k+1},E_{k+1})$とする。
$|V|=k+1$とすると$|E|=|E_k|\geq k+1=|V|$と$|E|=|V|-1$が矛盾。 （＊）

（＊）は頂点数が$|V|$になるまで繰り返すことができるが、このとき$|E|\geq|V|$を得て矛盾。

6.13 木の



「G は無閉路で, $|E| = |V| - 1$. 」
→「Gは木（無閉路で連結）」

4. G は連結で, $|E| = |V| - 1$.

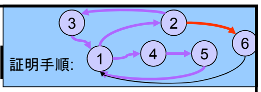
[証明] Gが連結であることを示せばよい。

Gの連結成分の個数をk個とする。
Gの連結成分をそれぞれ$G_1,G_2,\dots,G_k$と書く。
各G_iは連結で無閉路なので、木である。

各木G_iに対して、[1→4]より、$G_i=(V_i,E_i)$とすると$|V_i|=|E_i|+1$である。

したがって
$|V|=|V_1|+|V_2|+\dots+|V_k|=(E_1+1)+(E_2+1)+\dots+(E_k+1)=|E|+k$。
仮定より $|V|=|E|+1$ なので、k=1 を得る。

6.13 木の



「G における任意の2つの頂点の間には, ただ1つの単純な経路が存在する. 」
→「G は無閉路で, 1つでも辺を加えると閉路ができる. 」

[証明]

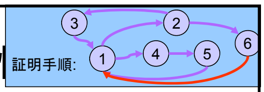
[無閉路であること]

閉路があったとすると、閉路上の2頂点には2つの経路が存在する。
したがって条件に矛盾。よって閉路はない。

[1つでも辺を加えると閉路ができること]

隣接しない2頂点u,v間に辺を加えると、u,v間のただ1つの単純な経路と追加した辺で、閉路ができる。

6.13 木の



「G は無閉路で, 1つでも辺を加えると閉路ができる. 」
→「Gは木(閉路がなく連結)」

[証明]

隣接しない2頂点u,v間に辺を加えると閉路ができることから、
u,v間は到達可能である。したがってGは連結。

[証明おわり]