I216 計算量の理論と離散数学

上原隆平、面　和成

I216 Computational Complexity and Discrete Mathematics

by
Prof. Ryuhei Uehara
and
Prof. Kazumasa Omote

計算量の理論

- ゴール1:
  - “計算可能な*関数/問題/言語/集合*”

- ゴール2:
  - 「問題の困難さ」を示す方法を学ぶ
    - 計算可能な問題であっても、*手におえない*場合がある！
      - 計算に必要な資源（時間・領域）が多すぎるとき
    - 関連する専門用語;

      クラスNP, P≠NP予想, NP困難性, <u>還元</u>

Computational Complexity

- Goal 1:
  - *"Computable Function/Problem/Language/Set"*

- Goal 2:
  - How can you show "*Difficulty of Problem*"
    - There are *intractable* problems even if they are computable!
      - because they require too many resources (time/space)!
    - Technical terms;

      The class NP, P≠NP conjecture, NP-hardness, reduction

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.2.完全性

6.2.1. 定義と基本性質

定義

クラスCに対して，集合Aが次を満たすとき

(a) $\forall L \in \mathrm{C}\ [L \leq_m^P A]$

集合 A は($\leq_m^P$ のもとで) C困難であるという.

さらに次を満たすなら

(b) $A \in \mathrm{C}$

A はC完全であるという.

例. NP完全集合の例

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VC など

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

6.2.1. Definition and basic properties

Definition

For a class C, if a set A satisfies

(a) $\forall L \in \mathrm{C}\ [L \leq_m^P A]$,

the set A is called C-hard (under $\leq_m^P$).

Moreover, if we have

(b) $A \in \mathrm{C}$,

then A is called C-complete.

Ex. Examples of NP-complete sets

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VC, etc.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.2. 完全性

6.2.1.定義と基本性質

定理　A:任意のC完全集合
任意の集合 B に対して以下が成立
(1) $A \le_m^P B$ →B は C困難.
(2) $A \le_m^P B$ かつ B∈C → B は C完全.

証明:
定義より, $\forall L \in \mathcal{C}[L \le_m^P A]$
定理より, $L \le_m^P A \wedge A \le_m^P B \to L \le_m^P B$
よって, $\forall L \in \mathcal{C}[L \le_m^P B]$
つまりBはC困難.

ひとたび NP完全問題 Aが得られたら, これを使って他の問題の困難性を「測定」できる.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

6.2.1. Definition and basic properties

Theorem 6.4. *A*: any C-complete set
For any set *B* we have
(1) $A \leq_m^P B \rightarrow B$ is C-hard.
(2) $A \leq_m^P B$ and $B \in$ C $\rightarrow B$ is C-complete.

Proof:
By definition, $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P A]$
By Theorem, $L \leq_m^P A \wedge A \leq_m^P B \rightarrow L \leq_m^P B$
Therefore, $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P B]$
That is, *B* is C-hard.

Once you have an NP-complete problem *A*, it can be used to *measure* to the other problems

6.多項式時間計算可能性の解析

6.2.完全性

(NP)完全性を示す二つの方法:

1. 定義に忠実に「すべての*L'*」に対して示す
   - クックの定理; 彼は1971年にSATでチューリングマシンのシミュレータを構築した！

基本的には…
1. 標準形で書かれたプログラムを
2. SATの命題論理式で模倣
   →<u>非常に複雑＆面倒</u>

例えば3SATは一様な構造を持っているので，扱いやすい．

2. すでに完全性が示されている問題をタネに使う
   - 3SAT$\leq_m^P$ DHAM, $\boxed{\text{3SAT} \leq_m^P \text{VC}}$, …
   - 千を超えるNP完全問題が3SATからの還元で示されている!
   - 例えば「一般のグラフ上でDHAMはNP完全」という結果から:
     - DHAMは平面グラフ上に限定してもNP完全
     - DHAMは最大次数3に限定してもNP完全
     - DHAMは二部グラフに限定してもNP完全…

最大次数5

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

There are two ways to prove (NP-)completeness:

1. show 'for all L' according to the definition
   - Cook's Theorem; he simulated Turing machine by SAT in 1971!

Easy to handle since, e.g., 3SAT has a uniform structure.

Basically…
1. For any program in standard form,
2. simulate it by SAT formulae

→pretty complicated and tedious

2. use some known complete problem as a seed
   - 3SAT$\leq_m^P$ DHAM, $\boxed{\text{3SAT} \leq_m^P \text{VC},}$ …
   - Thousands of NP-complete problems are reduced from 3SAT!
   - E.g., from "DHAM is NP-complete for general graphs", we have
     - DHAM is NP-complete even for planar graphs
     - DHAM is NP-complete even for graphs with max degree=3
     - DHAM is NP-complete even for bipartite graphs…

max degree=5

6.多項式時間計算可能性の解析

6.2.完全性

定理 VCはNP完全問題

[証明] VC $\in$ NPなので3SAT $\leq_m^P$ VCを示せばよい.

与えられた論理式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ から以下の条件を満たすグラフと整数の組$\langle G,k \rangle$を多項式時間で構成する:

$F()=1$ とする割当てが存在する $\Leftrightarrow G$ が大きさ k の頂点被覆をもつ

Gの構成方法 (F は n 変数・m 項からなる):

1. Fの各変数 x_i に対して，頂点 x_i^+,x_i^- と辺 (x_i^+,x_i^-) を追加する
2. Fの各項 $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ に対して，頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と3辺 (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1}) を追加する
3. 各項 C_jに対して，リテラルl_{i1} が x_iなら辺 (l_{i1},x_i^+) を，$\neg x_i$ なら辺(l_{i1},x_i^-) を追加する
4. $k = n+2m$ とする

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

Theorem VC is NP-complete

[Proof] Since VC ∈ NP, we show 3SAT $\leq_m^P$ VC.

For given formula $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, we construct a pair $<G,k>$ of a graph and an integer in polynomial time such that:

There is an assignment that makes $F()=1$ ⇔ G has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+,x_i^- and the edge (x_i^+,x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})
3. add the edge (l_{i1},x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1},x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

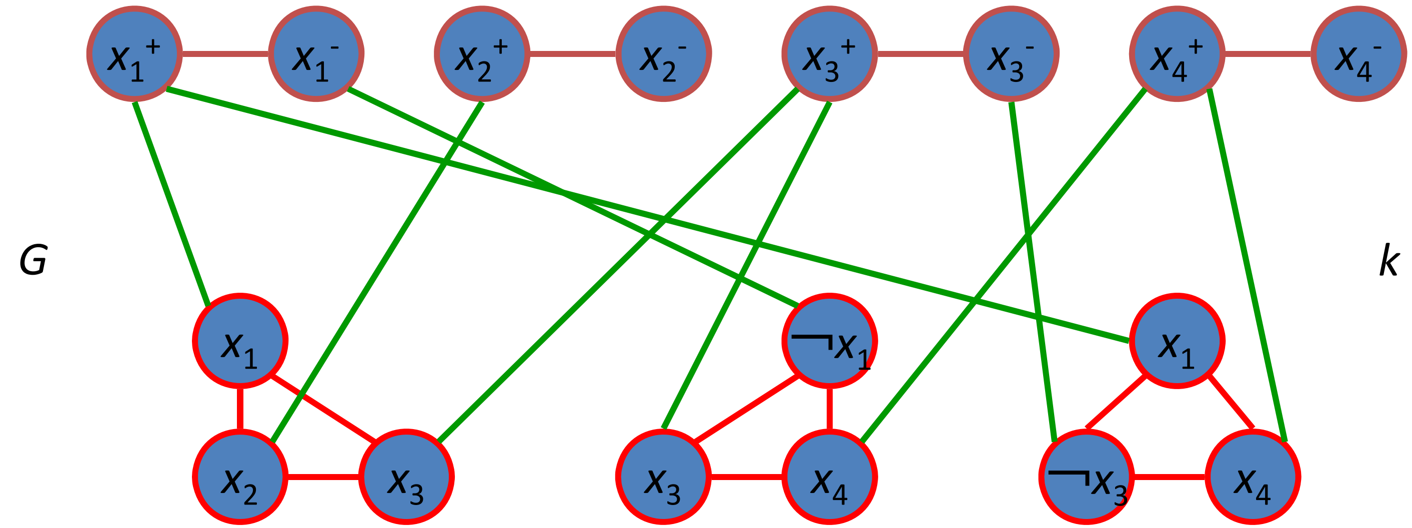
定理 VCはNP完全問題

$F()=1$ とする割当てが存在する
⇔G が大きさ k の頂点被覆をもつ

Gの構成方法 (F は n 変数・m 項からなる):

1. Fの各変数 x_i に対して，頂点 x_i^+, x_i^- と辺 (x_i^+, x_i^-) を追加する
2. Fの各項 $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ に対して，頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と3辺 (l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1}) を追加する
3. 各項 C_jに対して，リテラルl_{i1} が x_iなら辺 (l_{i1}, x_i^+) を，$\neg x_i$ なら辺 (l_{i1}, x_i^-) を追加する
4. $k = n+2m$ とする

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2 \times 3=10$

Theorem VC is NP-complete

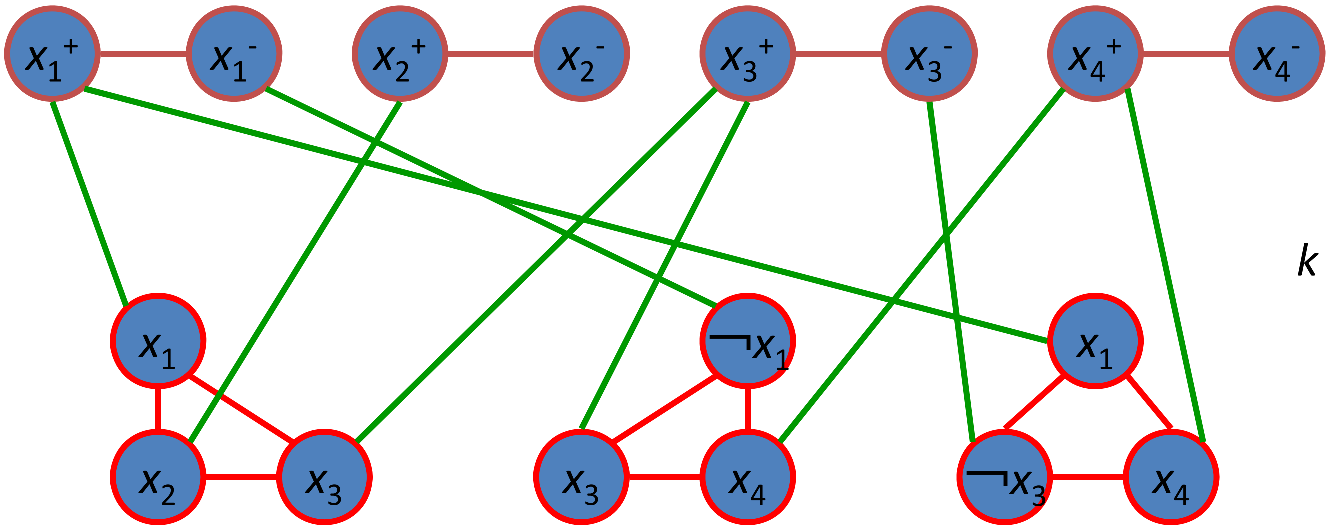
> There is an assignment that makes $F()=1$
> $\Leftrightarrow$ G has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})
3. add the edge (l_{i1},x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1},x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

定理 VCはNP完全問題

FからGの構成は，明らかに多項式時間で可能である.
したがって，以下を証明すればよい：

$F()=1$とする割当てがある
⇔G が大きさkの頂点被覆をもつ

観測：

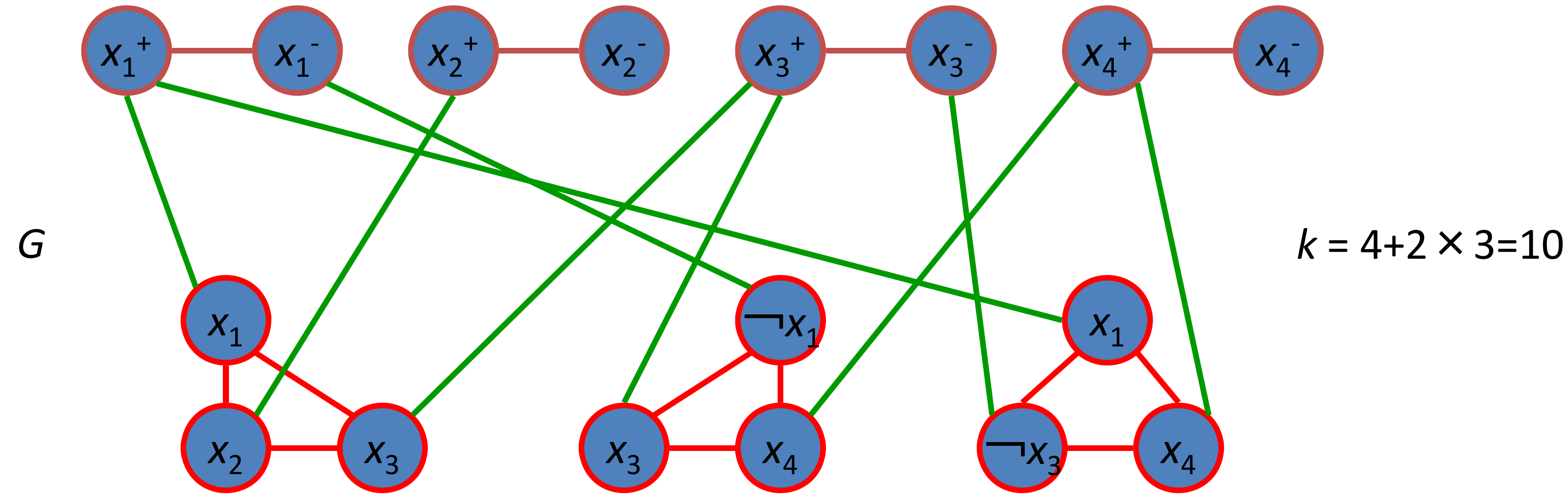
Gの構成方法から，頂点被覆 S は以下の頂点を必ず含む

- x_i^+ or x_i^- から少なくとも一つ
- C_j の三つの頂点から少なくとも二つ

よって $|S| \geqq n+2m = k$

余分な頂点は一つもない！

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



Theorem VC is NP-complete

It is easy to see that the construction of G from F can be done in polynomial time of the size of F. Hence, we show that…

There is an assignment that makes $F()$=1
⇔ G has a vertex cover of size k

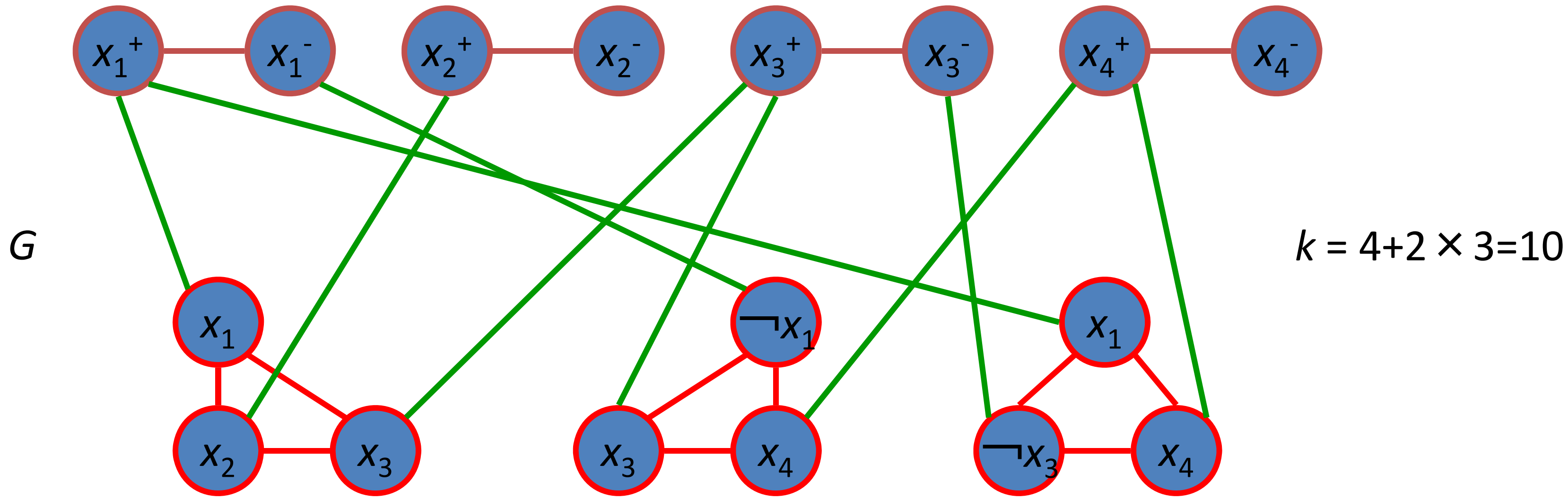
Observation:

From the construction of G, any vertex cover S should contain
- at least one of x_i^+ or x_i^-
- at least 2 of 3 vertices in C_j

Hence we have $|S| \geqq n+2m = k$.

We have no extra vertex!!

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



定理 VCはNP完全問題

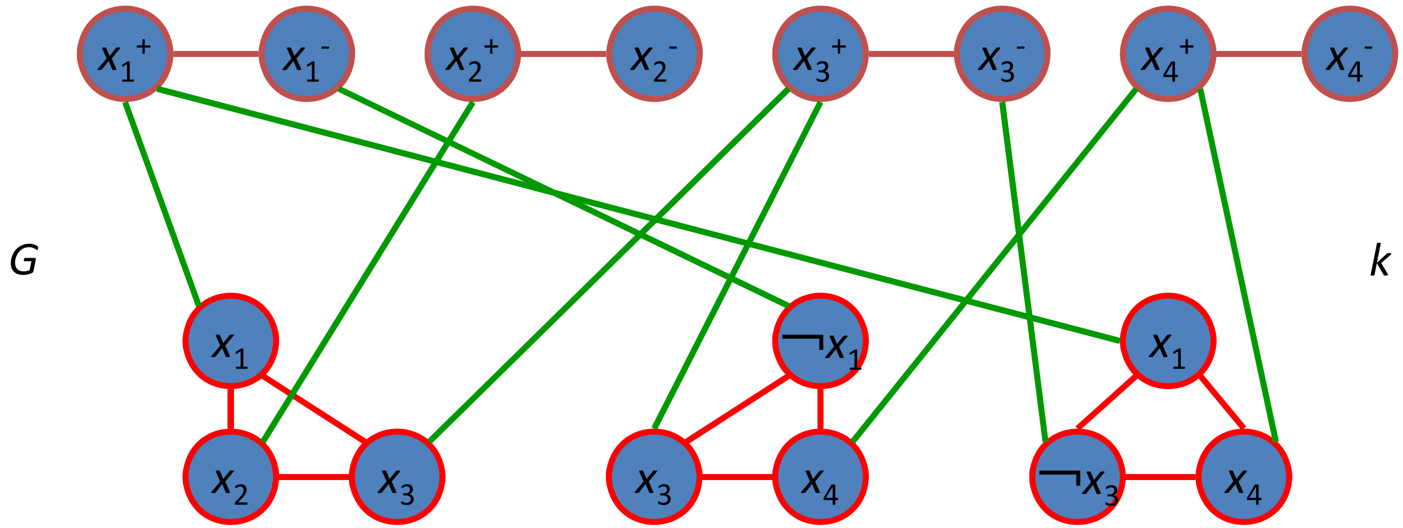
$F()=1$とする割当てがある
⇒G が大きさkの頂点被覆をもつ

1.各 x_iに対して $\left\{ \begin{array}{l} x_i=1\text{なら}x_i^+ \\ x_i=0\text{なら}x_i^- \end{array} \right\}$ をSに

2. 各項 $C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ は充足されているので，少なくとも一つのリテラル l_{i1} に対して辺 (l_{i1},x_{i1}) は変数x_{i1}で被覆されている．そこで残りの二つのリテラル (l_{i2},l_{i3}) を S に

⇒ 観測 よりSは大きさkの頂点被覆．

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2 \times 3=10$

Theorem VC is NP-complete

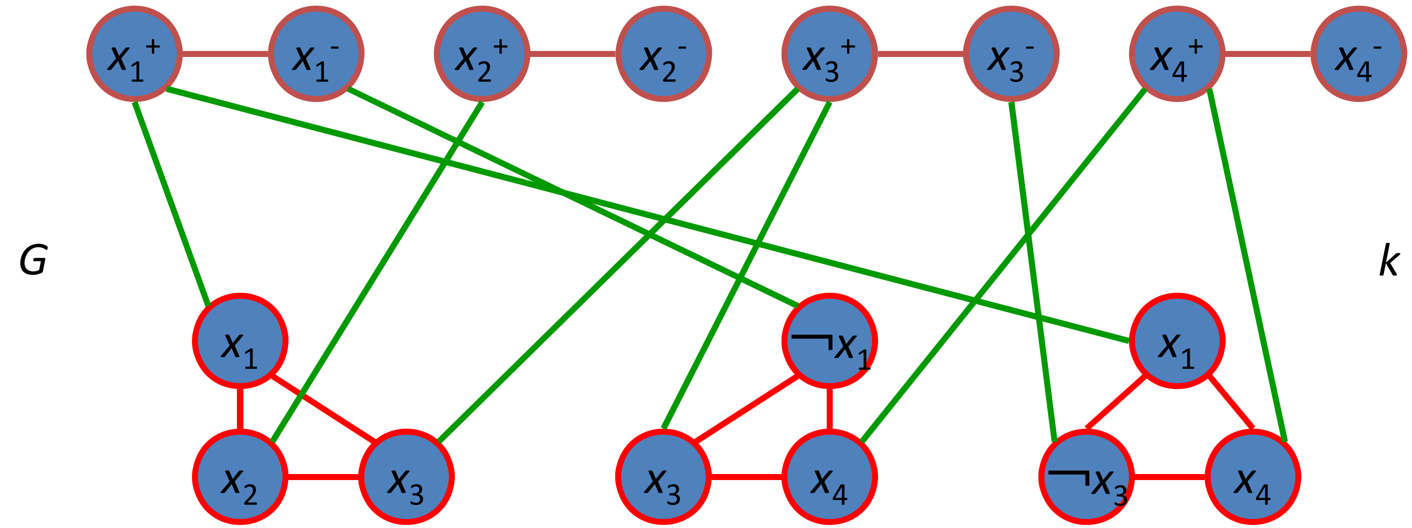
There is an assignment that makes $F()=1$
$\Rightarrow G$ has a vertex cover of size k

1. Put $\left\{ \begin{array}{l} x_i^+ \text{ if } x_i=1 \\ x_i^- \text{ if } x_i=0 \end{array} \right\}$ into S for each x_i.

2. Since each clause $C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ is satisfied, at least one literal, say l_{i1}, the edge (l_{i1},x_{i1}) is covered by the variable x_{i1}. Therefore, put the remaining literals (l_{i2},l_{i3}) into S.

$\Rightarrow$ From the Observation S is a vertex cover of size k.

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2 \times 3=10$

定理 VCはNP完全問題

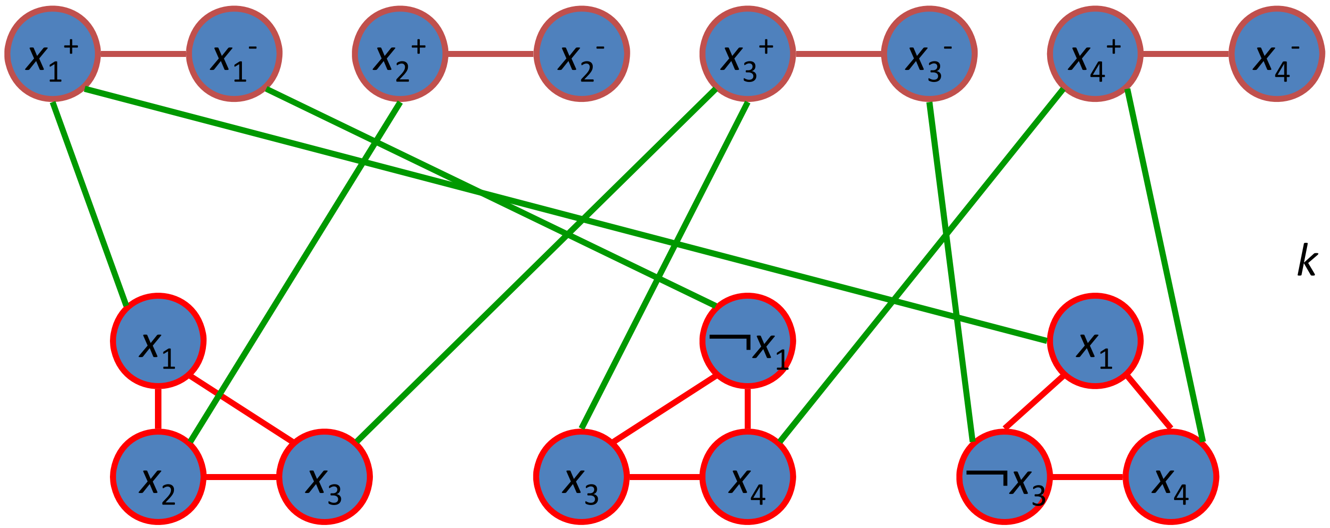
G が大きさkの頂点被覆をもつなら，$F()=1$とする割当てが存在する

1. 観測 より，被覆 S は各項から $2m$ 頂点含み，変数から n 頂点含む.
2. よって被覆 S はx_i^+ と x_i^- からちょうど一つと，各項C_jからちょうど二つのリテラルを含む
3. つまり各項 C_j はSに含まれないリテラルl_jをちょうど一つだけ含み，そこにつながる辺は変数頂点で被覆されている.

⇒ 以下の条件を満たす割当ては F を充足する: $\left(\begin{array}{l} x_i^+ \in S \text{ なら} x_i=1 \\ x_i^- \in S \text{ なら } x_i=0 \end{array} \right)$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

Q.E.D.

Theorem VC is NP-complete

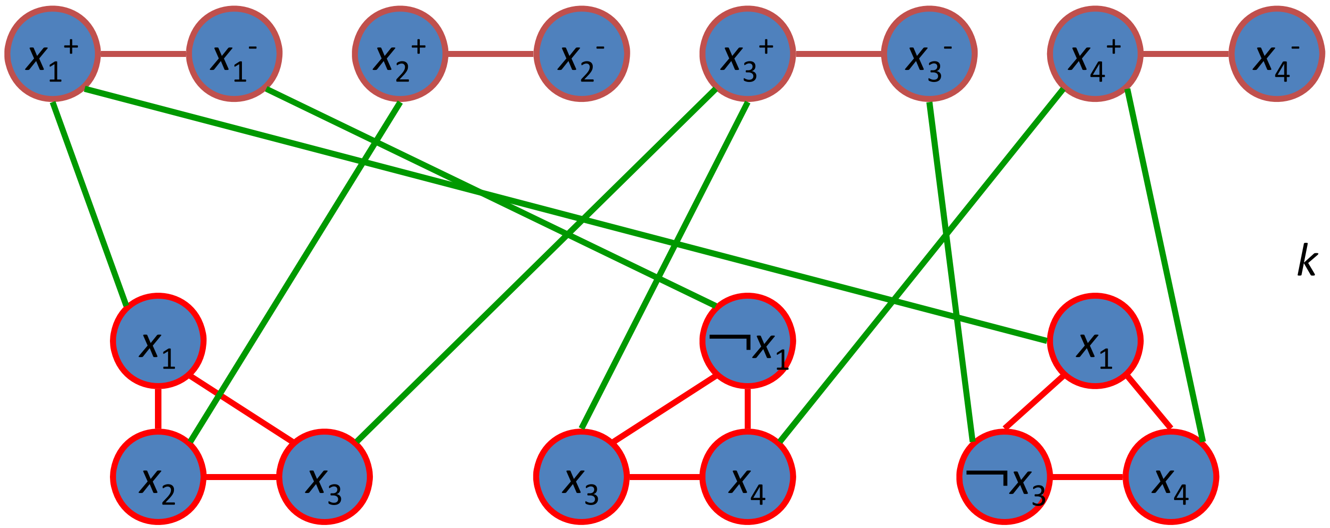
If G has a vertex cover of size k, there is an assignment that makes $F()=1$

1. From Observation, a cover S contains $2m$ vertices from the clauses, and n vertices from the variables.
2. Thus the cover S contains exactly one of x_i^+ and x_i^- and exactly two literals of a clause C_j.
3. Hence each clause C_j contains exactly one literal l_i which is not in S, and hence incident edge should be covered by a variable vertex.

$\Rightarrow$ The following assignment satisfies F: $\begin{cases} x_i=1 \text{ if } x_i^+ \text{ in } S \\ x_i=0 \text{ if } x_i^- \text{ in } S \end{cases}$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

Q.E.D.

6.多項式時間計算可能性の解析

6.2. 完全性

定理

次数: 頂点につながる辺の本数

DHAM はグラフの最大次数が5でも NP完全

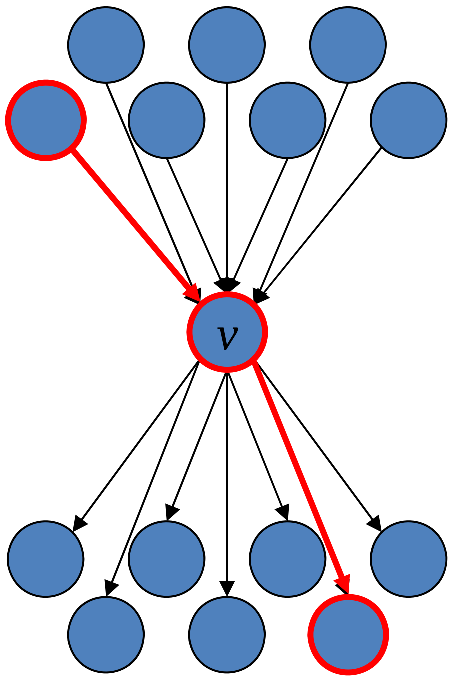
[証明]

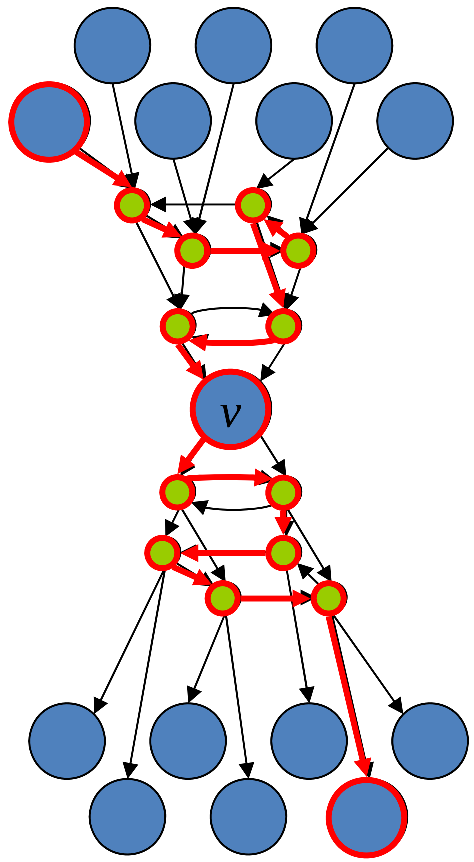
DHAM ∈ NPなので $\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$ ∈NP.
よってDHAM $\leq^P_m \mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$を示す

アイデア

「*v*に入る辺」や「*v*から出る辺」を
しかるべきガジェットで置き換える

元のグラフで*v*を通る
ハミルトン閉路は,
置き換えたグラフで*v*を
通るハミルトン閉路に
対応づけられる.





6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

Theorem

degree: the number of edges incident to a vertex

DHAM is NP-complete even if maximum degree=5.

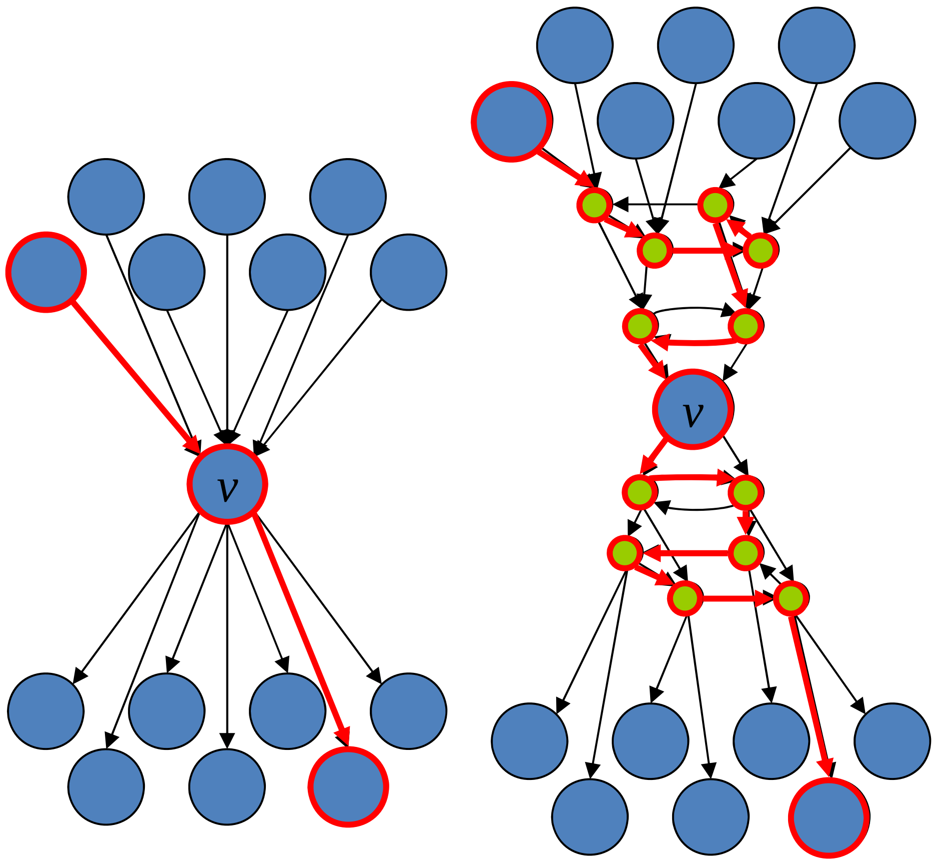
[Proof]

Since DHAM $\in$ NP, DHAM$_{\leqq 5}$ $\in$ NP.
We show DHAM $\leq^P_m$ DHAM$_{\leqq 5}$.

Idea:

Replace the set of “arcs to v” and the set of “arcs from v” by a right ‘gadget’.

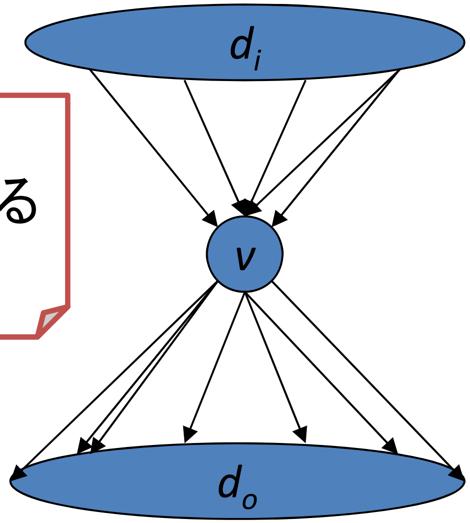
A Hamiltonian cycle through *v* on the original graph corresponds to the Hamiltonian cycle through *v* on the resultant graph.

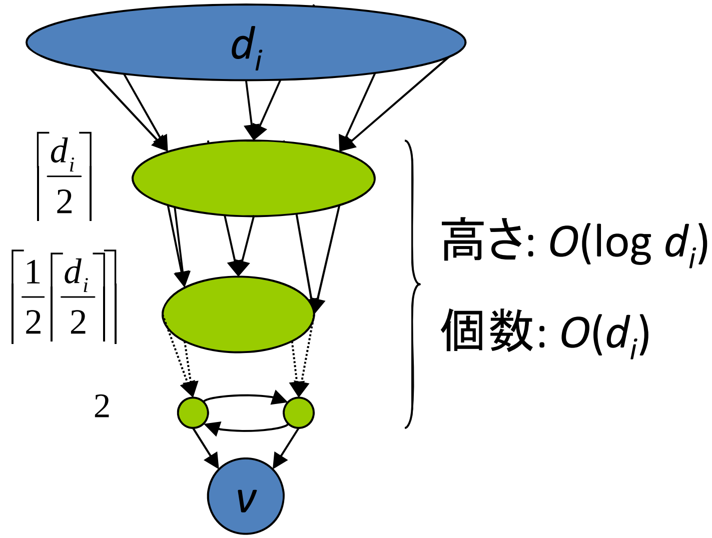


6.2.完全性

定理　DHAM はグラフの最大次数が5でも NP完全

ポイント:
- 上から下に閉路を通る
- 各頂点の次数≦5





[証明 (概要)]

次数≧6の各頂点 v に対して, v の頂点の周りの辺をガジェットで置き換える

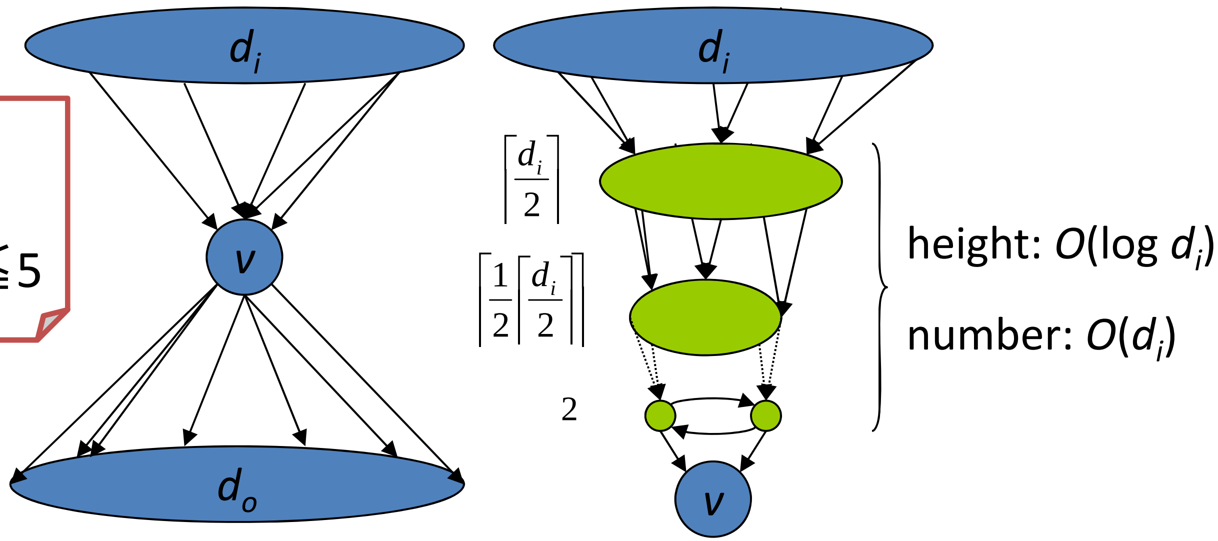
1. もとのグラフ G の頂点数をn , 辺数を m とすると, 還元後に得られるグラフ G' の頂点数は $O(n+m)$ で辺数は $O(m)$ となる. よってこの還元はn と m の多項式時間で実行できる.
2. G' の各頂点の次数はたかだか 5.
3. G がハミルトン閉路をもつ ⇔ G' がハミルトン閉路をもつ

QED.

6.2. Completeness

Theorem DHAM is NP-complete even if max. degree=5.

Points:
- Up to down via cycle
- Each vertex has deg≦5



[Proof (sketch)]

For each vertex v of degree≧6, replace the edges around v by the gadget.

1. If the original graph G has n vertices with m edges, the resultant graph G' contains $O(n+m)$ vertices with $O(m)$ edges. Hence the reduction can be done in polynomial time of n & m.
2. Each vertex in G' has degree *at most* 5.
3. G has a Hamiltonian cycle ⇔ G' has a Hamiltonian cycle.

QED.

Addition (おまけ)

Many natural hard problems are either
- Poly-time solvable, or
- NP-hard

- R. Uehara, S. Iwata:
  Generalized Hi-Q is NP-complete,
  The Transactions of the IEICE, E73, p.270-273, 1990.
- P. Zhang, H. Sheng, R. Uehara:
  A Double Classification Tree Search Algorithm for
  Index SNP Selection, *BMC Bioinformatics*, 5:89, 2004.
- R. Uehara, S. Teramoto:
  Computational Complexity of a Pop-up Book,
  4th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, 2006.
- E. Demaine, M. Demaine, R. Uehara, T. UNO, Y. UNO:
  UNO is hard, even for a single player,
  5th International Conference on FUN with algorithms,
  Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6099,
  pp. 28-36, 2010.
- 『ゲームとパズルの計算量』ロバート・A・ハーン,
  エリック・D・ドメイン著，上原隆平訳，近代科学社，
  2011年8月.

Schedule(残りの予定)

- 10/25(Fri): Last class (前半最後の講義)
  - 授業アンケート(Course Evaluation Questionnaire)

    20. 授業中の3分演習は理解に役立った.

        (3min. exercises were useful for understanding.)
  - レポート返却
- 10/30(Wed): mid-term exam (中間試験)
  - 40 points ✖ Notes, Textbook, Copy, Printout,…
  - Only pens and pencils (持ち込み不可)
  - Lesson 3~Lesson 6（講義3~講義6）, which means that "no diagonalization"
  - All definitions are given in the last page of the exam.
  - Answers and Comments will be given at Office Hour.