I216 Computational Complexity and Discrete Mathematics

by
Prof. Ryuhei Uehara
and
Prof. Atsuko Miyaji

I216 計算量の理論と離散数学

上原隆平、宮地充子

Computational Complexity

- Goal 1:
  - *"Computable Function/Problem/Language/Set"*

- Goal 2:
  - How can you show "*Difficulty of Problem*"
    - There are *intractable* problems even if they are computable!
      - because they require too many resources (time/space)!
    - Technical terms;

      The class NP, P≠NP conjecture, NP-hardness, reduction

計算量の理論

- ゴール1:
  - “計算可能な*関数/問題/言語/集合*”

- ゴール2:
  - 「問題の困難さ」を示す方法を学ぶ
    - 計算可能な問題であっても、*手におえない* 場合がある！
      - 計算に必要な資源（時間・領域）が多すぎるとき
    - 関連する専門用語;

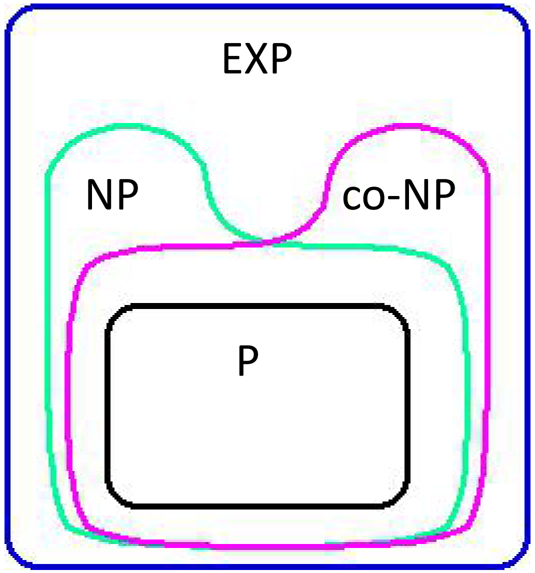
      クラスNP, P≠NP予想, NP困難性, 還元

5. Computational Complexity

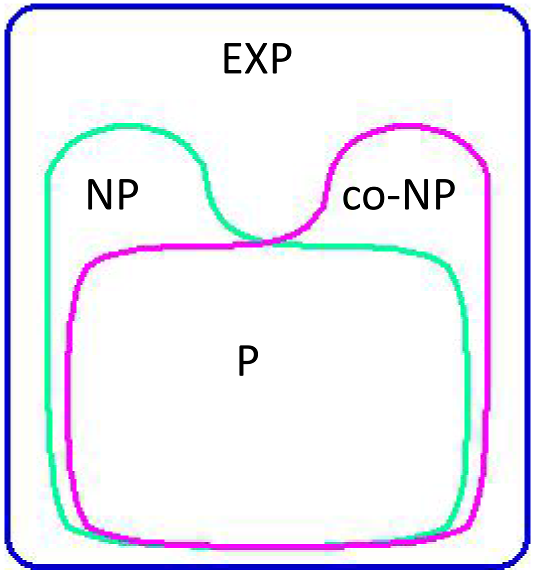
5.5. Relations in the Complexity Classes

Theorem
(1) NP $\subseteq$ coNP → NP = coNP
(2) coNP $\subseteq$ NP → NP = coNP
(3) NP ≠ coNP → P ≠ NP

We strongly believe that P ≠ NP, and then we have



or



5.計算量の理論

5.5. 計算量クラスの関係

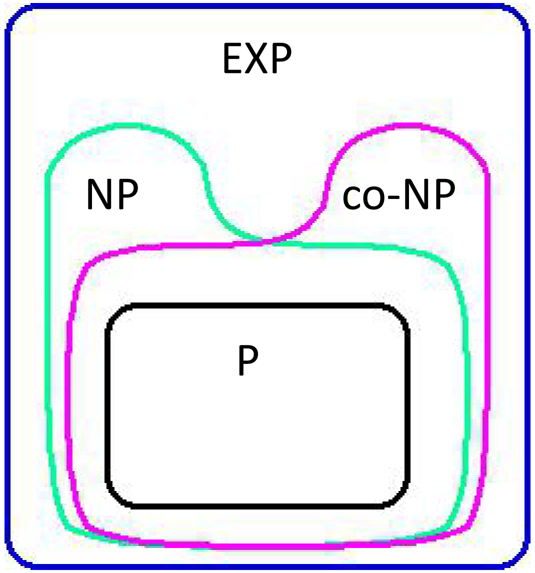
定理

(1) $NP \subseteq coNP \rightarrow NP = coNP$

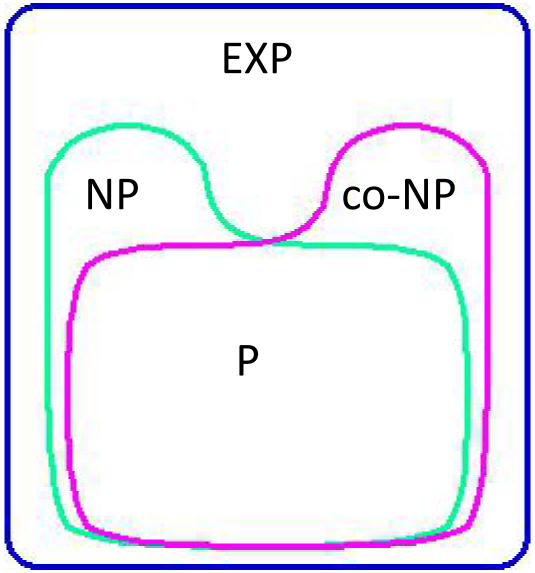
(2) $coNP \subseteq NP \rightarrow NP = coNP$

(3) $NP \neq coNP \rightarrow P \neq NP$

P≠ NPが成立すると強く信じられているので,
以下の構造になっていると予想される.



または



5. Computational Complexity

- Observation of the classes

Definition: Class P

Set L is in the class P $\Leftrightarrow$

There exists a poly-time computable predicate R such that

for each $x \in \Sigma^*$, $x \in L \Leftrightarrow R(x)$

Definition: Class NP

Set L is in the class NP $\Leftrightarrow$

There exists a poly q and a poly-time computable predicate R such that

for each $x \in \Sigma^*$, $x \in L \Leftrightarrow \exists w \in \Sigma^* : |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

Definition: Class coNP

Set L is in the class coNP $\Leftrightarrow$

There exists a poly q and a poly-time computable predicate R such that

for each $x \in \Sigma^*$, $x \in L \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

5.計算量の理論

- **計算量クラスの定義を概観すると…**

クラスPの定義
集合LがクラスPに入る ⇔
以下を満たす多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow R(x)$

クラスNPの定義
集合LがクラスNPに入る ⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow \exists w \in \Sigma^* : |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

クラスcoNPの定義
集合LがクラスcoNPに入る ⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Definition

Let *A* and *B* be arbitrary sets.

(1) function *h*: *A*→*B*: polynomial-time reduction

$\Leftrightarrow$
- (a) *h* is a total function from Σ^* onto Σ^*
- (b) $x \in \Sigma^* [x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
- (c) *h* is polynomial-time computable.

(2) When there is a poly-time reduction from *A* to *B*, we say *A* is polynomial-time reducible to *B*. Then, we denote by $\boxed{A \leq_m^P B}$

(...within polynomial time, hardness of *A* ≦ that of *B*)

6. 多項式時間計算可能性の解析手法

6.1.多項式時間還元可能性

定義

A と *B* を任意の集合とする.

(1) 関数 h: $A \rightarrow B$ が多項式時間還元である

$\Longleftrightarrow$
(a) h はΣ* からΣ*への全域関数である
(b) $x \in \Sigma^*[x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
(c) h は多項式時間計算可能である.

(2) *A* から *B*への多項式時間還元が存在するとき

*A*は*B*へ多項式時間還元可能であるといい,

$\boxed{A \leq_m^P B}$ とかく.

(...多項式時間程度の差を無視すれば, *A*の難しさ≦ *B*の難しさ)

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Theorem $A \leq_m^P B$ leads to

(1) $B \in$ P → $A \in$ P.
(2) $B \in$ NP → $A \in$ NP.
(3) $B \in$ co-NP → $A \in$ coNP.
(4) $B \in$ EXP → $A \in$ EXP.

Note : class E is exceptional. Generally, $B \in$ E → $A \in$ E is not true.

Ex.: When we define ONE≡{1}, for each set L in P we have

$$L \leq_m^P \mathrm{ONE}$$

if we define $h(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{if } x \in L \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.1.多項式時間還元可能性

定理　$A \leq_m^P B$ のとき次が成立する

(1) $B \in$ P → $A \in$ P.
(2) $B \in$ NP → $A \in$ NP.
(3) $B \in$ co-NP → $A \in$ coNP.
(4) $B \in$ EXP → $A \in$ EXP.

注意 : クラス E は例外．一般に $B \in$ E → $A \in$ E は成立しない．

例: ONE≡{1} と定義すると，Pの各集合Lに対して，

$$L \leq_m^P \mathrm{ONE}$$

である．ここで $h(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{if } x \in L \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Theorem *A, B, C*: arbitrary sets

(1) $A \leq_m^P A$

(2) $A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P C \rightarrow A \leq_m^P C$

Definition

$$A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P A$$

$\equiv_m^P$ is an equivalence relation.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.1.多項式時間還元可能性

定理 *A, B, C*を任意の集合とする.

(1) $A \leq_m^P A$

(2) $A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P C \rightarrow A \leq_m^P C$

定義

$$A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P A$$

$\equiv_m^P$ は同値関係.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Theorem

(1) $2\mathrm{SAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{ExSAT}$

(2) $3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

Proof

(1) we have some proofs depending on definition:

(a) each instance of 2SAT is also in 3SAT if the definition is "at most 3 literals in a clause".

(b) each clause $(x \vee y)$ can be replaced by $(x \vee y \vee y)$.

(c) each clause $(x \vee y)$ can be replaced by $(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$.

In any case, they are poly-time reduction, and the original formula is satisfiable iff so is the resulting formula.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.1.多項式時間還元可能性

定理

(1) $2\mathrm{SAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{ExSAT}$

(2) $3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

証明

(1) 定義によっていくつかの証明が考えられる:

(a) 定義が「各項に高々3リテラル」の場合は，2SATの入力は3SATの入力としても有効なので，特に示すことはない．

(b) 各項 $(x \vee y)$ を単に $(x \vee y \vee y)$ で置き換えればよい．

(c) 各項 $(x \vee y)$ に対して新しい変数を導入して

$(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$.

と置き換えてもよい．

どの場合も多項式時間還元で，元の論理式が充足可能である必要十分条件は，新しい式が充足可能であること．

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Theorem

(1) $2\mathrm{SAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{ExSAT}$

(2) $3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

Proof (Outline)

(2) It is sufficient to show that $\mathrm{ExSAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT}$ by (1).

Strategy:

For any given *F* in ExSAT, we construct another *F'* in 3SAT such that *F* is satisfiable iff *F'* is satisfiable.

To do that, we first construct the computation tree of *F*, and construct *F'* that represents the computation process of *F*.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.1.多項式時間還元可能性

定理

(1) $2\mathrm{SAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{ExSAT}$

(2) $3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

証明 (概略)

(2) (1)より，$\mathrm{ExSAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT}$ が成立することを示せばよい.

基本戦略:

ExSATの式 F が与えられたら，それに基づいて3SATの式F'を構成する. ただしここでFが充足可能である必要十分条件がF'が充足可能であるようにする. そのために，まずFの計算木を構築し，次にFの計算手順を表現する論理式F'を構築する.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

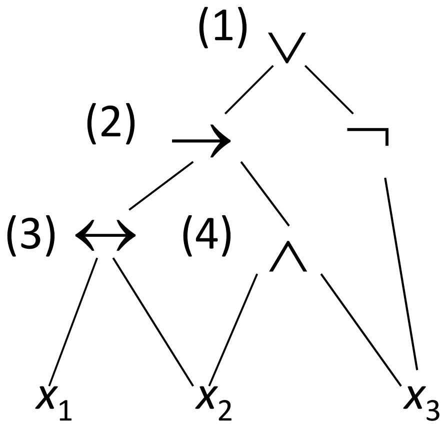
Theorem (2) $\mathrm{3SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

Proof (Outline)

(2) It is sufficient to show that $\mathrm{ExSAT} \le_m^P \mathrm{3SAT}$ by (1).

Reduction from ExSAT to 3SAT by an example:

$$F(x_1, x_2, x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \to [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$



$$(1) V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$$

$$(2) V_2 \equiv [V_3 \to V_4]$$

$$(3) V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$$

$$(4) V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$$

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.1.多項式時間還元可能性

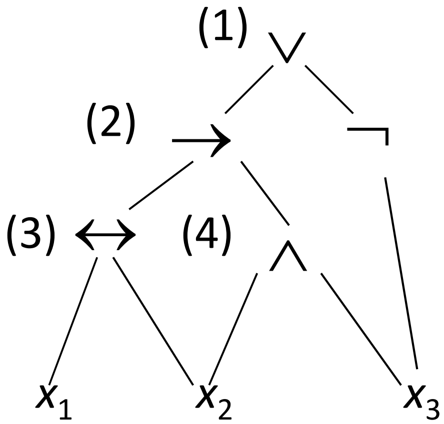
定理 (2) $\text{3SAT} \equiv_m^P \text{SAT} \equiv_m^P \text{ExSAT}$

証明 (概略)

(2) $\text{ExSAT} \leq_m^P \text{3SAT}$ が成立することを示せばよい.

ExSAT から 3SAT への還元を例で示す:

$$F(x_1, x_2, x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \rightarrow [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$



$$(1) V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$$

$$(2) V_2 \equiv [V_3 \rightarrow V_4]$$

$$(3) V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$$

$$(4) V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$$

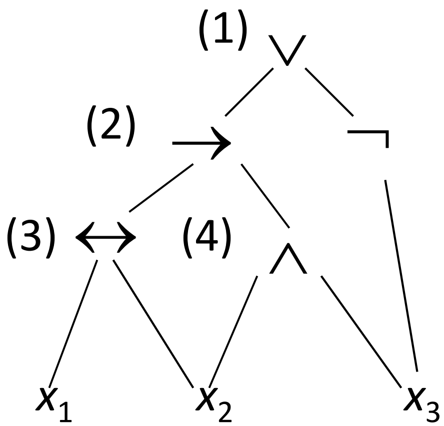
6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Theorem (2) $\mathrm{3SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

Reduction from ExSAT to 3SAT by an example:

$$F(x_1, x_2, x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \rightarrow [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$



$$(1) V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$$

$$(2) V_2 \equiv [V_3 \rightarrow V_4]$$

$$(3) V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$$

$$(4) V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$$

$$F''(x_1, x_2, x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \rightarrow U_4]]$$
$$\wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

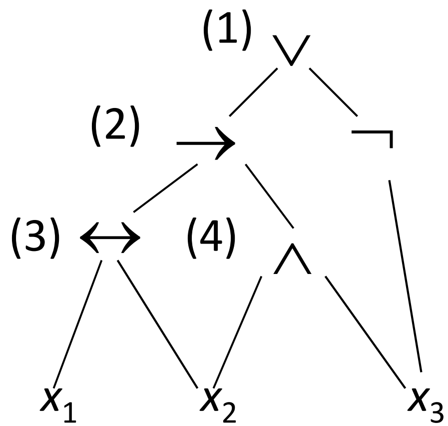
6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.1.多項式時間還元可能性

定理 (2)　　$3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

ExSAT から 3SAT への還元を例で示す:

$$F(x_1, x_2, x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \to [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$



$$(1) V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$$
$$(2) V_2 \equiv [V_3 \to V_4]$$
$$(3) V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$$
$$(4) V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$$

$$F''(x_1, x_2, x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \to U_4]] \wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Theorem (2) $\text{3SAT} \equiv_m^P \text{SAT} \equiv_m^P \text{ExSAT}$

Reduction from ExSAT to 3SAT by an example:

$$F''(x_1, x_2, x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \rightarrow U_4]] \wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

Then, by constriction, *F*() is satisfiable iff *F''*() is satisfiable.
We show *F''*() can be represented by an equivalent *F'*() in 3SAT.

$$\begin{aligned} U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg [U_2 \vee \neg x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2] \end{aligned}$$

The other cases are similar, and *F'*() is in 3SAT.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.1. 多項式時間還元可能性

定理 (2) $\quad 3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

ExSAT から 3SAT への還元を例で示す:

$$F''(x_1, x_2, x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \rightarrow U_4]] \\ \wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

このとき構成から, *F*() は充足可能⇔*F''*()は充足可能.
F''() をこれと同値な3SATの要素 *F'*() で表現する.

$$\begin{aligned} U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg [U_2 \vee \neg x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2] \end{aligned}$$

他のケースも同様に変形でき, *F'*() は3SATの要素となる.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

6.2.1. Definition and basic properties

Definition

For a class C, if a set A satisfies

(a) $\forall L \in \mathrm{C}\ [L \leq_m^P A]$,

the set A is called C-hard (under $\leq_m^P$).

Moreover, if we have

(b) $A \in \mathrm{C}$,

then A is called C-complete.

Ex. Examples of NP-complete sets

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VC, etc.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.2.完全性

6.2.1. 定義と基本性質

定義

クラスCに対して，集合Aが次を満たすとき

(a) $\forall L \in \mathrm{C}\ [L \leq_m^P A]$

集合 A は($\leq_m^P$ のもとで) C困難であるという.

さらに次を満たすなら

(b) $A \in \mathrm{C}$

A はC完全であるという.

例. NP完全集合の例

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VC など

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

6.2.1. Definition and basic properties

Theorem. For any C-hard (or C-complete) set A,

(1) $A \in \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq P$ CP: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{P} \rightarrow A \notin \mathrm{P}$

(2) $A \in \mathrm{NP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq NP$ CP: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{NP} \rightarrow A \notin \mathrm{NP}$

(3) $A \in \mathrm{coNP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq coNP$ CP: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{coNP} \rightarrow A \notin \mathrm{coNP}$

(4) $A \in \mathrm{EXP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq EXP$ CP: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{EXP} \rightarrow A \notin \mathrm{EXP}$

Proof: CP: contraposition

(1) Let B be any C-set. Then, since A is C-hard,

$B \leq_m^P A$ and by the assumption $A \in \mathrm{P}$, we have $B \in \mathrm{P}$

(2), (3), (4) are similar.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.2.完全性

6.2.1.定義と基本性質

定理　C困難(またはC完全)な任意の集合Aに対して,

(1) $A \in \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq P$　　対偶: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{P} \rightarrow A \notin \mathrm{P}$

(2) $A \in \mathrm{NP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq NP$　　対偶: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{NP} \rightarrow A \notin \mathrm{NP}$

(3) $A \in \mathrm{coNP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq coNP$　　対偶: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{coNP} \rightarrow A \notin \mathrm{coNP}$

(4) $A \in \mathrm{EXP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq EXP$　　対偶: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{EXP} \rightarrow A \notin \mathrm{EXP}$

証明:

(1) 任意のC集合をBとする. AがC困難であることから,

$B \leq_m^P A$ であり, $A \in \mathrm{P}$という仮定より$B \in \mathrm{P}$をえる.

(2), (3), (4) も同様.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

6.2.1. Definition and basic properties

Theorem. For any C-hard (or C-complete) set A,

(1) $A \in \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq \mathrm{P}$ CP: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{P} \rightarrow A \notin \mathrm{P}$

(2) $A \in \mathrm{NP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq \mathrm{NP}$ CP: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{NP} \rightarrow A \notin \mathrm{NP}$

(3) $A \in \mathrm{coNP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq \mathrm{coNP}$ CP: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{coNP} \rightarrow A \notin \mathrm{coNP}$

(4) $A \in \mathrm{EXP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq \mathrm{EXP}$ CP: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{EXP} \rightarrow A \notin \mathrm{EXP}$

Ex. : Meaning of Theorem for class NP

Let A be NP-complete set.

By the contraposition of Theorem (1) we have

$$\mathrm{NP} \neq \mathrm{P} \rightarrow A \notin \mathrm{P}$$

That is, NP-complete sets are NP-sets that cannot be recognized in polynomial time unless P = NP.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.2.完全性

6.2.1.定義と基本性質

定理　C困難(またはC完全)な任意の集合Aに対して,

(1) $A \in \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq P$　　対偶: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{P} \rightarrow A \notin \mathrm{P}$

(2) $A \in \mathrm{NP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq NP$　　対偶: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{NP} \rightarrow A \notin \mathrm{NP}$

(3) $A \in \mathrm{coNP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq coNP$　　対偶: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{coNP} \rightarrow A \notin \mathrm{coNP}$

(4) $A \in \mathrm{EXP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq EXP$　　対偶: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{EXP} \rightarrow A \notin \mathrm{EXP}$

例 : クラスNPに関する定理の意味するところ

NP完全集合をAとする.

定理(1)の対偶より:　$\mathrm{NP} \neq \mathrm{P} \rightarrow A \notin \mathrm{P}$

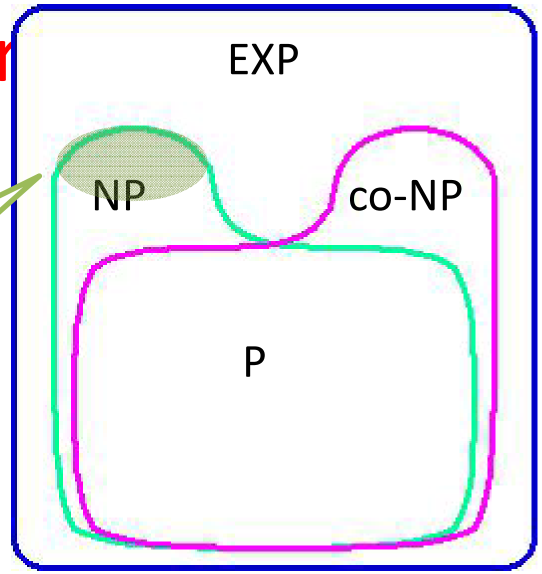
つまり, NP完全集合はP=NPでない限り,

多項式時間では認識できないNP集合である.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

6.2.1. Definition and basic proper



NP-complete problems form the most difficult problems in the class NP.

Ex. : Meaning of Theorem for class NP

Let A be NP-complete set.

By the contraposition of Theorem (1) we have

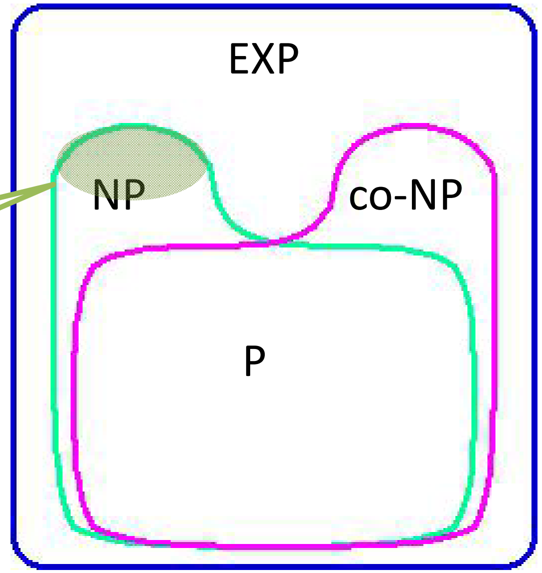
$$\mathrm{NP} \neq \mathrm{P} \Rightarrow A \notin \mathrm{P}$$

That is, NP-complete sets are NP-sets that cannot be recognized in polynomial time unless P = NP.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.2.完全性

6.2.1.定義と基本性質



NP完全問題とは，クラスNPの中で最も難しい問題群を構成しているといえる.

例：クラスNPに関する定理の意味するところ

NP完全集合をAとする.

定理(1)の対偶より:　　NP≠P ➔ $A \notin$ P

つまり，NP完全集合はP=NPでない限り，

多項式時間では認識できないNP集合である.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

6.2.1. Definition and basic properties

Theorem 6.4. *A*: any C-complete set
For any set *B* we have
(1) $A \leq_m^P B \rightarrow B$ is C-hard.
(2) $A \leq_m^P B$ and $B \in C \rightarrow B$ is C-complete.

Proof :
By definition, $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P A]$
By Theorem, $L \leq_m^P A \wedge A \leq_m^P B \rightarrow L \leq_m^P B$
Therefore, $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P B]$
That is, *B* is C-hard.

Once you have an NP-complete problem *A*, it can be used to measure to the other problems

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.2. 完全性

6.2.1.定義と基本性質

定理　A:任意のC完全集合
任意の集合 B に対して以下が成立
(1) $A \leq_m^P B$ →B は C困難.
(2) $A \leq_m^P B$ かつ $B \in C$ → B は C完全.

証明:
定義より, $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P A]$
定理より, $L \leq_m^P A \wedge A \leq_m^P B \rightarrow L \leq_m^P B$
よって, $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P B]$
つまりBはC困難.

ひとたび NP完全問題 Aが得られたら, これを使って他の問題の困難性を「測定」できる.

Schedule(残りの予定)

- 4/22(Mon):
- 4/25(Thu): Last class (前半最後の講義)
  - Submission of the report (2) (レポート(2)提出)
  - Course Evaluation Questionnaire（授業アンケート）
  - Office Hour: Comments/Answers on report (2)
- 5/2(Thu): mid-term exam (中間試験)
  - 40 points
  - Only pens and pencils (持ち込み不可) ✖ Notes, Textbook, Copy, Printout,…
  - Lesson 3~Lesson 6（講義3~講義6）