

I216 Computational Complexity and Discrete Mathematics Report (1)

2013, Term 1-1

Ryuhei Uehara(Room I67b, uehara@jaist.ac.jp)

Propose(出題): April 11 (Thu)

Deadline(提出期限): April 18 (Thu), 9:20am.

Note(注意): Do not forget to handwrite your name, student ID, problems, and answers on your report.
(レポートには氏名, 学生番号, 問題, 解答を, すべて手書きで書くこと.)

Answer one of the following three problems. (以下の問題から1問選んで答えよ.)

Problem 1 (5 points): Let X_1, X_2, \dots be the Turing machines, and x_1, x_2, \dots are the corresponding binary string. (That is, a string x_i is the binary code of the Turing machine X_i .) We denote the output of X_i with a binary input x by $X_i(x)$. For two strings x and y , their concatenation is denoted by $x \cdot y$ (e.g., $000 \cdot 111 = 000111$). Let f be the function defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} X_i(x_i) \cdot X_i(x_i) & \text{if } X_i \text{ halts for the input } x = x_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Prove that this function f is not computable. (X_1, X_2, \dots をチューリングマシンとし, x_1, x_2, \dots を対応する2進文字列とする. (つまり x_i はチューリングマシン X_i を2進文字列で記述したものである.) X_i に2進文字列 x を与えたときの出力を $X_i(x)$ と書くことにする. 二つの文字列 x と y に対し, これらの接続を $x \cdot y$ と書く (例えば $000 \cdot 111 = 000111$ である). ここで次の関数 f を考える.)

$$f(x) = \begin{cases} X_i(x_i) \cdot X_i(x_i) & X_i \text{ に入力 } x = x_i \text{ を与えたら停止するとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

この関数 f が計算不能であることを証明せよ.)

Problem 2 (5 points): The set N of natural numbers is enumerable. Now, prove that the set 2^N of subsets of N is *not* enumerable by diagonalization. (自然数の集合 N は可算無限集合である. N の部分集合の集合 2^N は非可算無限集合であることを対角線論法で証明せよ.) (Hint: For $S = \{1, 2, 3\}$, we have $2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.)

Problem 3 (5 points): At the last slide of the second lecture, we prove the theorem that claims “The set R of all real numbers is not enumerable.” Now let replace every “real” by “rational”. Then it seems that we prove the theorem that claims “The set R' of all rational numbers is not enumerable.” But, the set of all rational numbers is enumerable. Point out where is wrong. (2回目の授業で使ったスライドの最後で「実数全体の集合 R は非可算である」という定理の証明を行った. この中の「実数」をすべて「有理数」で置き換えてみると, 一見「有理数全体の集合 R' は非可算である」という定理の証明になる. しかし有理数は可算である. 証明のどこが間違っているか, 指摘せよ.)