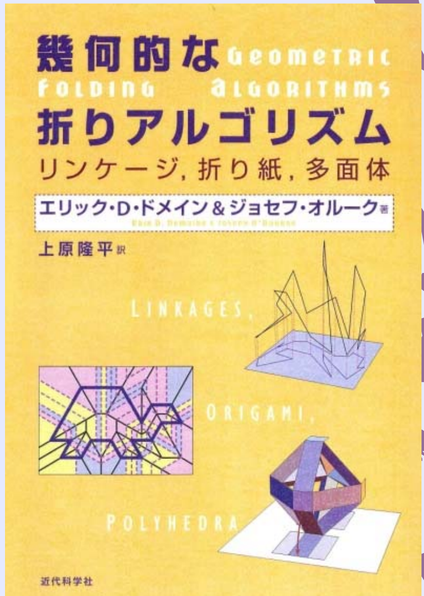
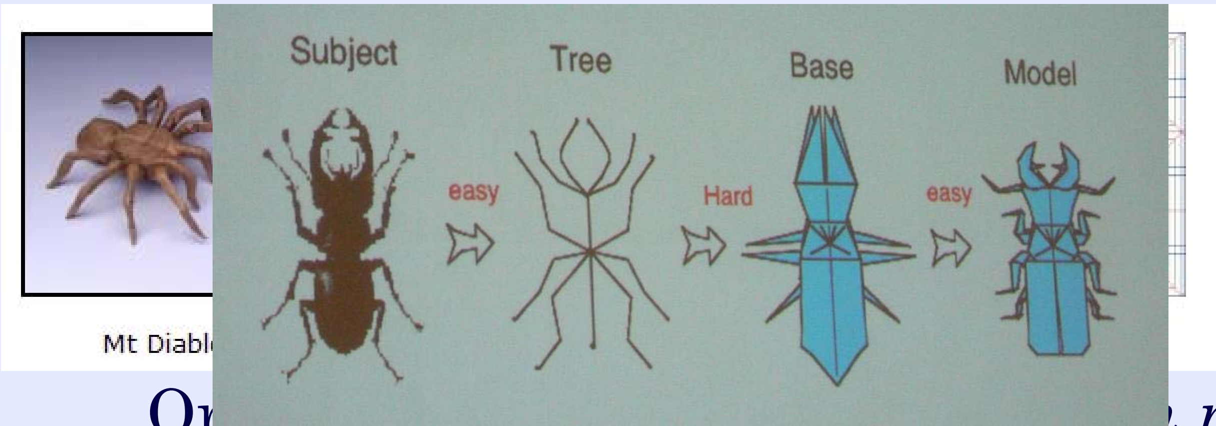
折り紙における決定不能問題

北陸先端科学技術大学院大学
上原隆平

Computational Origami

- Intractable results:
  - The complexity of Flat Origami
    Bern and Hayes, *SODA*, 1996.
- Tractable results:
  - *TreeMaker*; R. Lang の作ったフリーソフト
    木状の骨格を折る展開図の支援システム





Uehara：
- NP-hardness of a Pop-up book (2006)
- Efficient algorithms for pleat folding (2009)

Or… *model*”?

折り紙の複雑さ/効率(?)

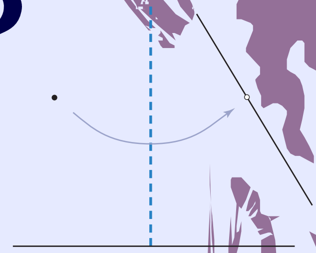
- 計算機科学の視点で考えよう…
- 例えばチューリング機械モデルにおける2種類の資源とは
  1. 時間:基本演算の適用回数
  2. 領域:計算に必要なメモリ量

折り紙の複雑さ

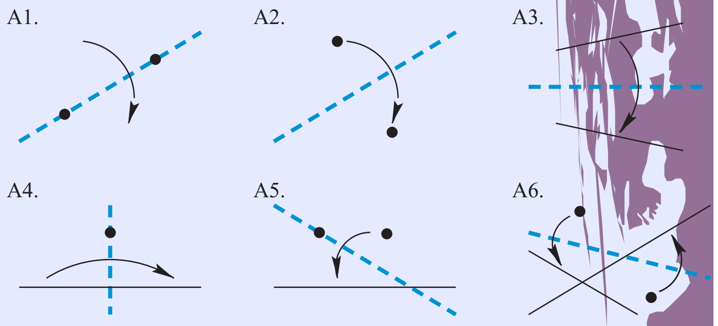
効率以前に、
そもそも「計算モデル」が
はっきりしない…

- 計算機科学の視点で考
- 折り紙モデルにおける2種類の資源とは？
  1. 時間…折り(基本演算)の回数
     - J. Cardinal, E. D. Demaine, M. L. Demaine, S. Imahori, T. Ito, M. Kiyomi, S. Langerman, R. Uehara, and T. Uno: Algorithmic Folding Complexity, *Graphs and Combinatorics*, accepted, 2010.
  2. 領域…???
     - R. Uehara: Stretch Minimization Problem of a Strip Paper, *5th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*, 2010/7/13-17.
     - R. Uehara: On Stretch Minimization Problem on Unit Strip Paper, *22nd Canadian Conference on Computational Geometry*, pp. 223-226, 2010/8/9-11.

折り紙という計算モデル？



- 「計算モデル」としての折り紙
  - 入力：初期配置で与えられる点（紙の端点など）
  - 基本演算：
    - 「藤田・羽鳥の操作」（7種）が標準的
  - 制御構造：
    - 点や線の一致・不一致の比較と分岐



  - 定規とコンパスによる有限回の操作
    - 2次方程式の解空間
  - 上記の標準的な7種の操作
    - 4次方程式の解空間
    - よって角の3等分や倍積問題などは解ける

…これ自身は計算[量/可能性]を扱っているわけではない

折り紙という計算モデル？

- 妥当な折り紙モデルとして…
  - 無限に広い紙の上に、定数個の点が与えられる
  - 操作は「藤田・羽鳥の操作」が許されている（7種）
  - 点はどこかを基準にした実数座標をもつ
  - 点や線は
    - すでにある点や線は「使う」ことができる
    - 点の座標や線の交点は正確に「比較」することができる
    - 存在しない点や線は「見る」ことはできるけど、正確に「使う」ことはできない

折り紙という計算モデル？

- 妥当な折り紙モデルとして…
  - 無限に広い紙の上に、定数個の点が与えられる
  - 操作は「藤田・羽鳥の操作」が許されている(7種)
  - 点はどこかを基準にした実数座標をもつ

[ポイント]

- 折り紙の上の点は実数座標をもつので非可算無限個存在する
- 操作列は可算無限個しか存在しない

ここにギャップ

⇒自然な「判定不能な問題」が作れそう…

折り紙の決定不能問題

- 次の単純(？)な問題 **foldability** を考える:

  入力: 単位正方形の紙の上の3点(x, y, z)と、もう1点 w
  質問: 点(x, y, z)から折り始めて、有限回の折りのあとで、ちょうど w を交点としてもつ折り線 l_1, l_2 が折れるか？

- もうちょっと単純な1次元折り紙上の **foldability** を考える:

  入力: 単位線分の紙[0,1] の上の3点(x, y, z)と、もう1点 w
  質問: 点(x, y, z)から折り始めて、有限回の折りのあとで、ちょうど w で折れるか？

[定理]
foldability は1Dバージョンでも決定不能である

つまり、この問題を[Yes/No]で答えてくれるプログラムは存在しない

折り紙の決定不能問題

[定理]

foldability は1Dバージョンでも決定不能である

[略証]

決定可能であったとすると、それを解くプログラムP(あるいは何らかのアルゴリズムの記述)が存在する。x,y,z を固定して、P(x,y,z,w)のステップ数 i を基準に以下の点集合を作る:

Si = { w | P(x,y,z,w) が i ステップ目で初めて答を出す点 w}

ここで |Si| は可算 なので、∪Si も可算無限。
よって対角線論法によって P(x,y,z,w) が有限でない
w の存在が示せる。 □

そんなに自明
ではない

折り紙の決定不能問題

[定理]

foldability は1Dバージョンでも決定不能である

[Yes/No]

[略証]

Si = { w | P(x,y,z,w) が i ステップ目で初めて答を出す点 w}

- "Yes" は「すでに生成した点と一致する点」なので可算
- "No" は非可算無限個の w に対して答えるかもしれない

⇒有限長区間(a,b)のすべての要素に "No"と答えると仮定

- a'≦a<b≦b' を満たす折り目a', b' から、有限回の操作で (a,b) 内部に折り目をつけることができる。
  よって、この点は "Yes" インスタンスとなり、矛盾。
  ∴ "No" インスタンスも可算個で、|Si| は可算。

だから何？…この定理の持つ意味

- 折り紙の決定不能問題は…
  - 逆説的に折り紙モデルの「強力さ」を示している？
- 今後目指すべき方向は…
  - 誤差を許したモデル:
    例: 実数 r を区間 $[r\text{-}\varepsilon, r+\varepsilon]$ で表現する
  - アルゴリズム的に評価できるモデル:
    「折り紙で構成可能な実数空間」を詳しく調べる