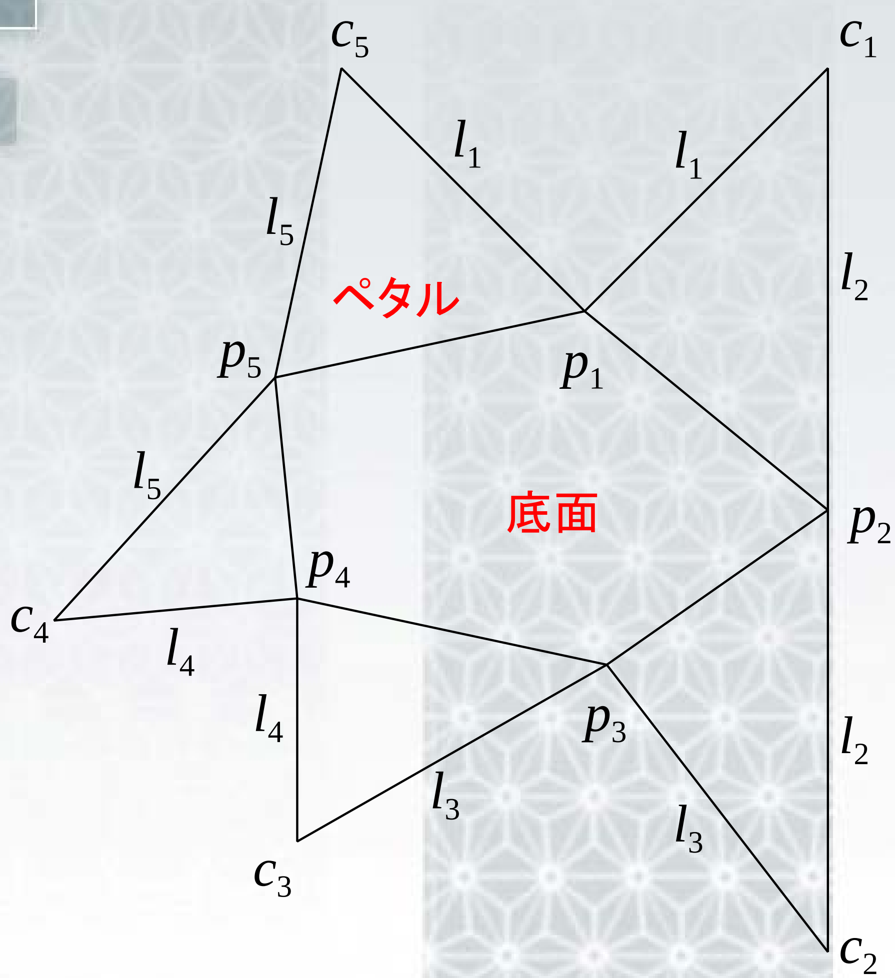
ピラミッド折り問題の多項式時間解法

Zachary Abel (MIT)
Erik Demaine (MIT)
Martin Demaine (MIT)
伊藤大雄(電気通信大学)
Jack Snoeyink (The University of North Carolina)
宇野毅明(NII)
上原隆平(北陸先端科学技術大学院大学)

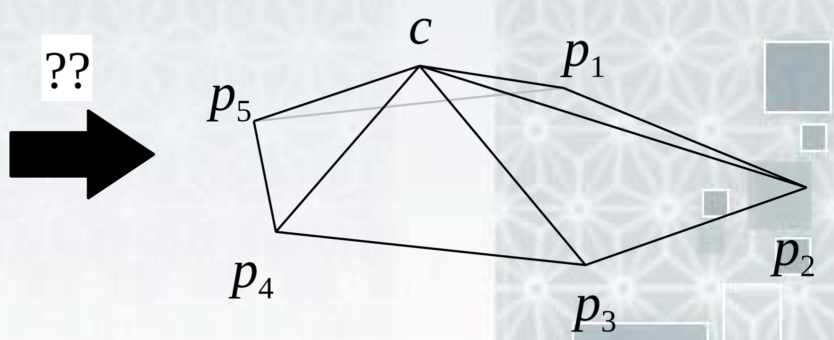
(凸凹)ピラミッド折り問題



計算幾何学
(計算折り紙)の問題

入力:

- 凸多角形の底面
- 長さの合っているペタル



出力:

(凸凹)ピラミッドは折れるか?

背景(1)

- ある日，パズル関係の知人（西山輝夫氏）から手紙が届く…
  1. 折り紙の問題1：
     入力：周囲にペタルのついた三角形
     出力：ここから三角錐が折れるか？
     結論：接着される辺同士の長さが合っていて，
     十分長ければ可能
  2. 折り紙の問題2：
     入力：周囲にペタルのついた4角形
     出力：ここから4角錐（ピラミッド）が折れるか？
     観測：一般に2通りの折り方があり、凸と凹になる…？

（一般化）ピラミッド問題

入力：周囲にペタルのついた凸n角形

問題1：ここからn角錐（ピラミッド）が折れるか？

一般には「ならない」が、立体は折れることが多い

問題2：ピラミッドにならない場合，

問題2-1：凸多面体が折れるか？

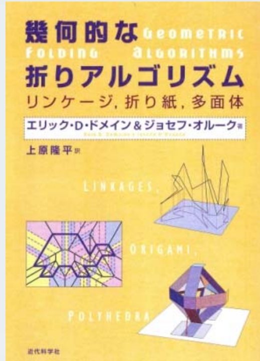
問題2-2：体積最大の立体が折れるか？

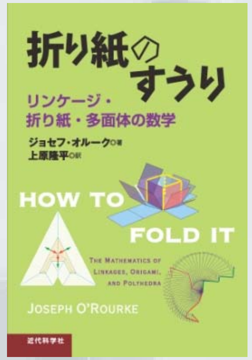
メタ問題2：二つの問題の解は違うのか？

メタ^{2}問題2：二つの問題の解が同じになるのはどんなときか？

底面の三角形分割ごとに異なる凸凹な立体が折れる

背景 (2)





- 「折り」と「展開」の問題
  - 1500年代に研究が始まったが，わかっていることは，あまりない
  - 近年，計算幾何学の有望なテーマ
- 最大の未解決問題（予想）:

どんな凸多面体も，辺に沿って切るだけで展開図に展開できる．ただし展開図とは，以下の条件を満たす多角形:

- 重なりを持たない（←これが難しい）
- 連結である

背景 (2)

- 最大の未解決問題(予想):

> どんな凸多面体も，辺に沿って切るだけで展開図に展開できる．ただし展開図とは，以下の条件を満たす多角形:
> - 重なりを持たない
> - 連結である

- ピラミッド問題は，凸多面体の展開の最初のステップの逆問題に見える…

既存の関連結果

1. アレクサンドロフの定理(1942)

幾何情報(距離情報と組合せ的な構造)が与えられたとき、「凸多面体の体積」は一意的に決まる。
⇒ほとんどの凸多面体は展開図と折り方が与えられるとユニークに決まる。

- 体積を求める多項式：Sabitov 1998.
- 構成的証明：Bobenko, Izmestiev 2008.
- 多項式時間アルゴリズム：Kane, et al. 2009.

…実行時間は $O(n^{456.5})$

⇒今回の問題は特殊なケースの研究

今回の結果(1)

1. 折り紙の問題1：

   入力：周囲にペタルのついた三角形

   出力：ここから三角錐が折れるか？

   結論：接着される辺同士の長さが合っていて，十分長ければ可能

…Sabitov の多項式で計算した体積^{2}が正であればよい。

$$V^2 = \frac{1}{144}[l_1^2 l_5^2(l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) + l_2^2 l_6^2(l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) + l_3^2 l_4^2(l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - l_1^2 l_2^2 l_4^2 - l_2^2 l_3^2 l_5^2 - l_1^2 l_3^2 l_6^2 - l_4^2 l_5^2 l_6^2].$$

今回の結果(2)

1. 折り紙の問題2：

   入力：周囲にペタルのついた4角形

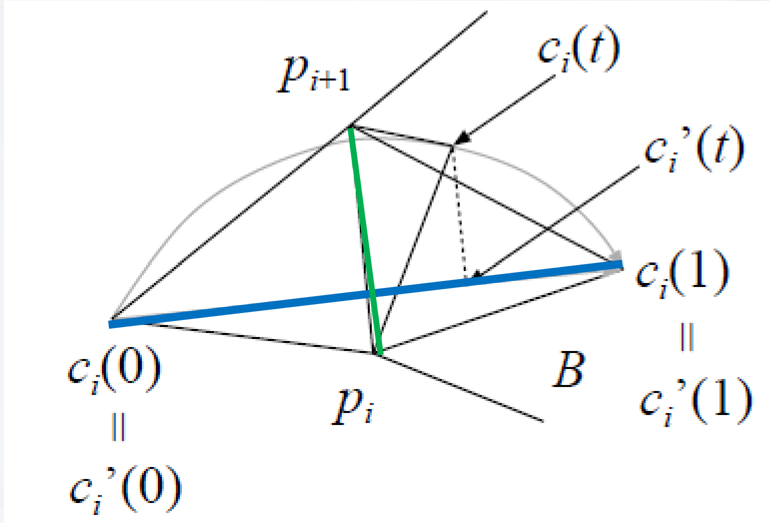
   出力：ここから4角錐（ピラミッド）が折れるか？

- 底面の4角形を対角線で切ると二つの4面体を接着した立体ができる
  1. 2通りの切り方で体積が同じ: ピラミッドができる
  2. 体積が異なるなら、一方は凸で一方は凹
  3. (凸な方だけできることもある)

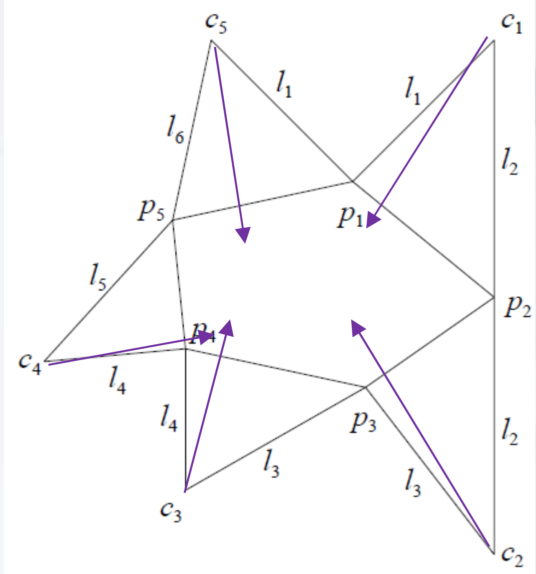
Sabitovの結果だけでは、ここから先は難しい…

重要な観察

頂点を折り返すとき、
頂点の写像の軌跡は
底面の辺に対する<u>垂線</u>となる



⇒ピラミッドを折るときの頂点の
動きを上から見ると、
「軌跡」が計算できる



(一般化)ピラミッド問題:解(1)

入力:周囲にペタルのついたn角形

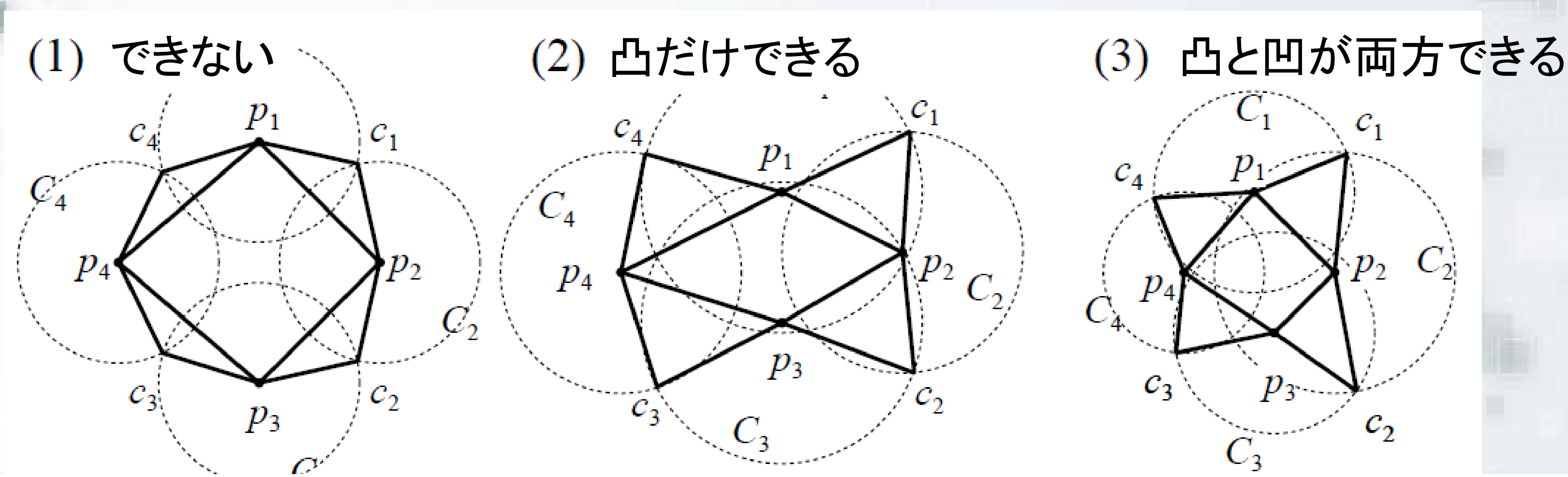
問題1:ここからn角錐(ピラミッド)が折れるか？

[解答] 各頂点からの垂線が1点で交わればよい！

（＋頂点が十分な高さを持つことも必要）

線形時間で簡単に判定できる。

例:



(一般化)ピラミッド問題:解(2)

入力:周囲にペタルのついたn角形

問題2:ピラミッドにならない場合,

問題2-1:凸多面体が折れるか?

問題2-2:体積最大の立体が折れるか?

[解] 多項式時間アルゴリズムがある。

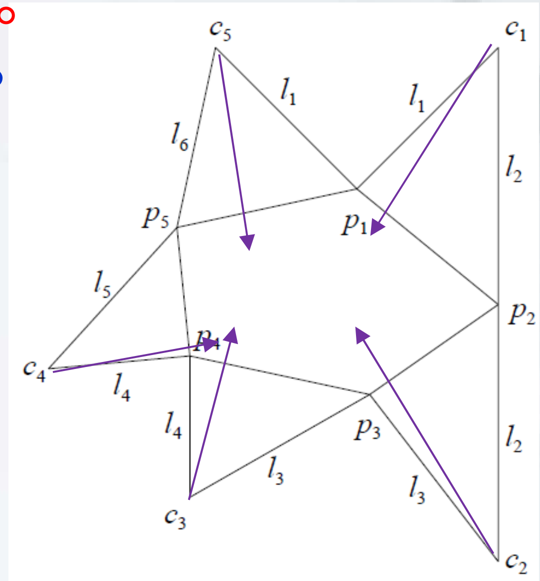
メタ問題2:二つの問題の解は違うのか?

[解] 一般に違う(凹>凸がある)

メタ²問題2:二つの問題の解が同じになるのはどんなときか?

[未解決] わかりません…

単純な動的計画法: O(n^3)
技巧を凝らすと: O(n^2)



(一般化)ピラミッド問題:解(3)

入力:周囲にペタルのついたn角形

問題2:ピラミッドにならない場合,

問題2-1:凸多面体が折れるか？

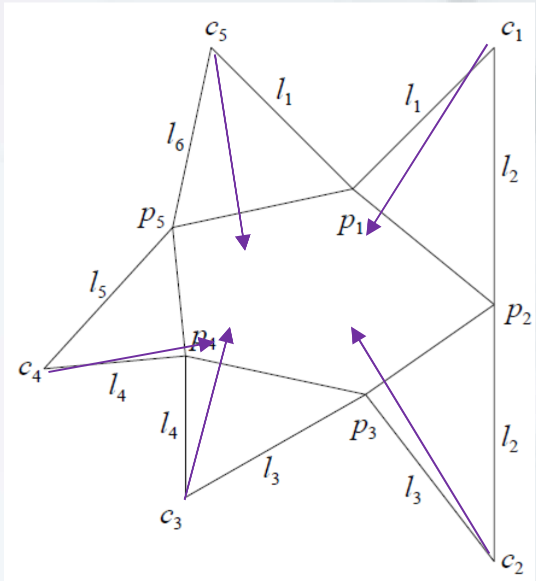
[定理] (ペタルが十分な長さがあるならば)

1. いつでも折れる
2. 折る手順(＝ペタルの接着順序)を
   線形時間で計算できる。

[証明の核となるアイデア]

折る手順は Power Diagram

(一般化ボロノイ図)で計算できる！



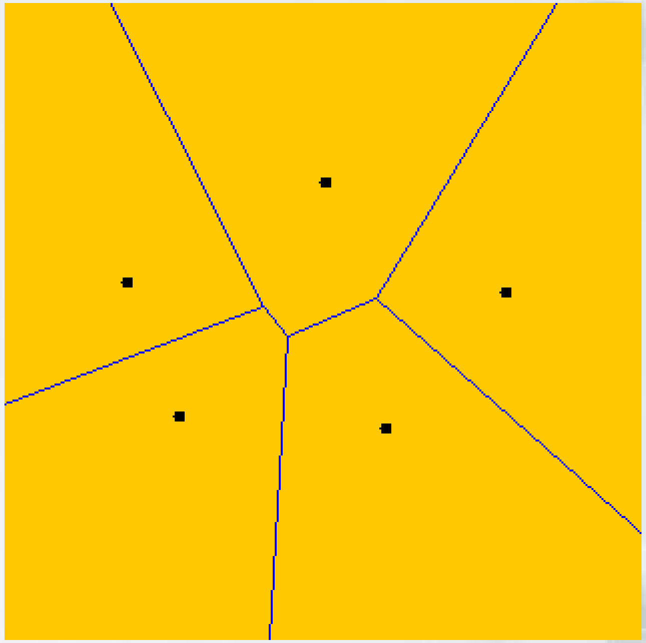
Power Diagram

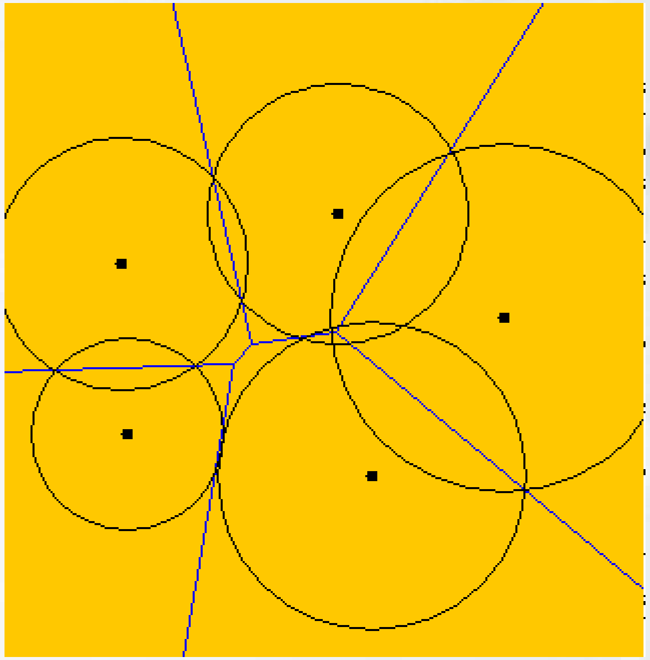
- ボロノイ図では
  各点対間に垂直
  2等分線を引く

- Power Diagram
  では各頂点に
  「重み」がある

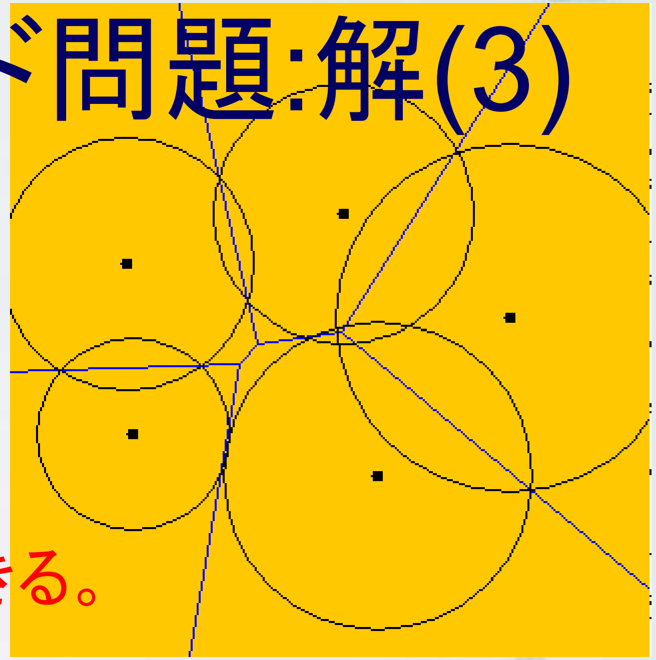
細かいけど重要な注意：点が凸に並んでいると、これらは「木」になり、閉路をもたない。

http://pages.cpsc.ucalgary.ca/~laneb/Power/





(一般化)ピラミッド問題:解(3)



入力:周囲にペタルのついたn角形

問題2:ピラミッドにならない場合,

問題2-1:凸多面体が折れるか?

[定理] 線形時間で折る手順を計算できる。

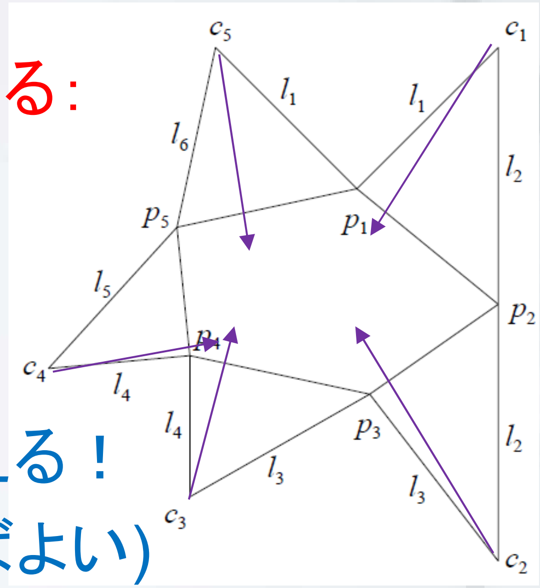
[証明の核となるアイデア]

折る手順は Power Diagram で計算できる:

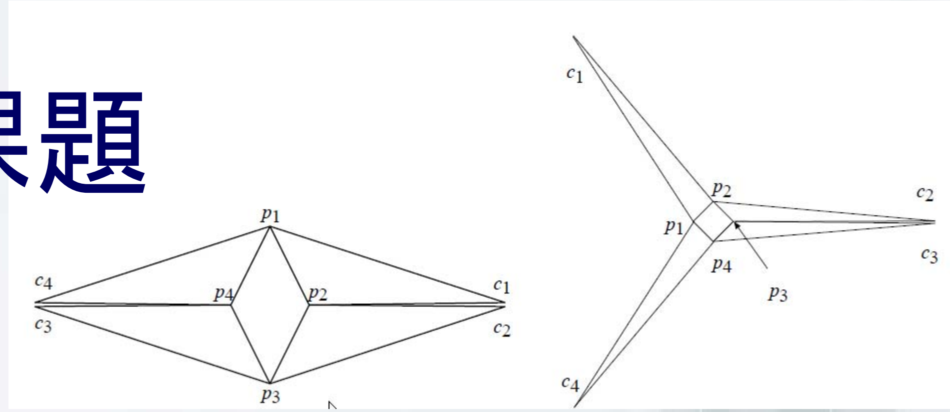
1. 底面の点 p_i が「点」
2. 付随する長さ l_i が「重み」
3. Power Diagram の線が頂点 c_i と

接着後にできる新たな頂点の軌跡を与える!

(Power Diagram の「木」に沿って貼ればよい)



まとめと課題



(一般化)ピラミッド問題

入力:周囲にペタルのついたn角形

問題1:ここからn角錐(ピラミッド)が折れるか？ OK!

問題2:ピラミッドにならない場合,

- 問題2-1:凸多面体が折れるか？ Nice!
- 問題2-2:体積最大の立体が折れるか？ Good! $O(n^2)$
- メタ問題2:二つの問題の解は違うのか？
- メタ^{2}問題2:二つの問題の解が同じになるのはどんなときか？ 未解決

頂点が底面からはみ出さなければ
凸が最大になりそうな気がするけれど…