

# 計算幾何学特論

## Computational Geometry

東京サテライト  
平成26年度講義  
担当: 上原隆平

# テーマ1: 計算幾何学 歴史的背景から応用分野まで

歴史的背景, 応用分野,  
計算幾何の基礎

# 計算幾何学とは

## 計算幾何学とは

幾何学に計算の複雑さの理論を導入して、幾何的な計算問題に対する効率の良いアルゴリズムを開発したり、あるいは問題の本質的な計算複雑さを解析する計算機科学の一研究分野である。

## 最初の論文は

Ron Grahamによる凸包計算のアルゴリズム

R.L. Graham, “An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set,” Information Processing Letters, 1, pp.132-133, 1972.

## 最初の博士論文は

D.T. Lee, University of Illinois, 1978.

M.I. Shamos, Yale University, 1978.

## 最初の国際会議は

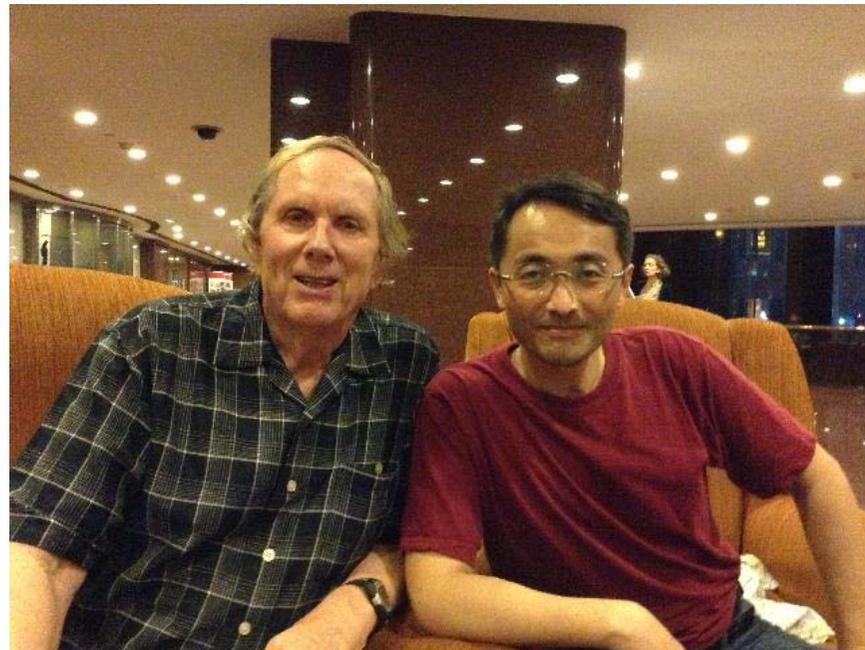
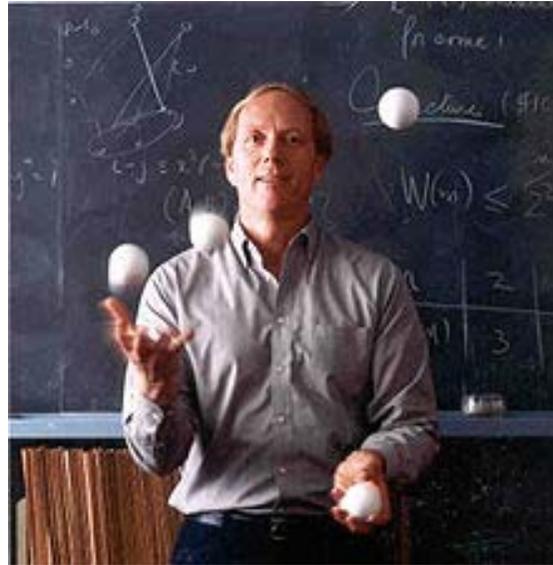
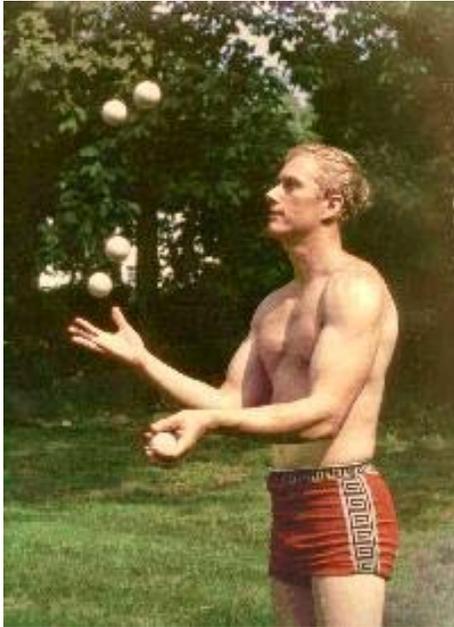
ACM Symposium on Computational Geometry, June 1985

Conference Chair: J. O’Rourke,

Program Committee: D. Dobkin, J. O’Rourke, F. Preparata, G. Toussaint

## 最初のテキストは

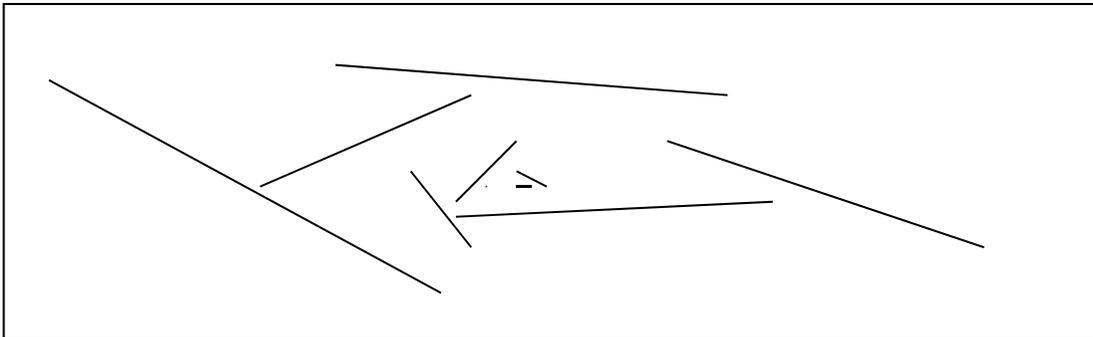
F.P. Preparata and M.I. Shamos: “Computational Geometry: An Introduction,” 1985 (日本語訳: 浅野孝夫, 浅野哲夫:「計算幾何学入門」, 総研出版, 1992).



# 幾何問題の難しさ

## 線分交差判定問題

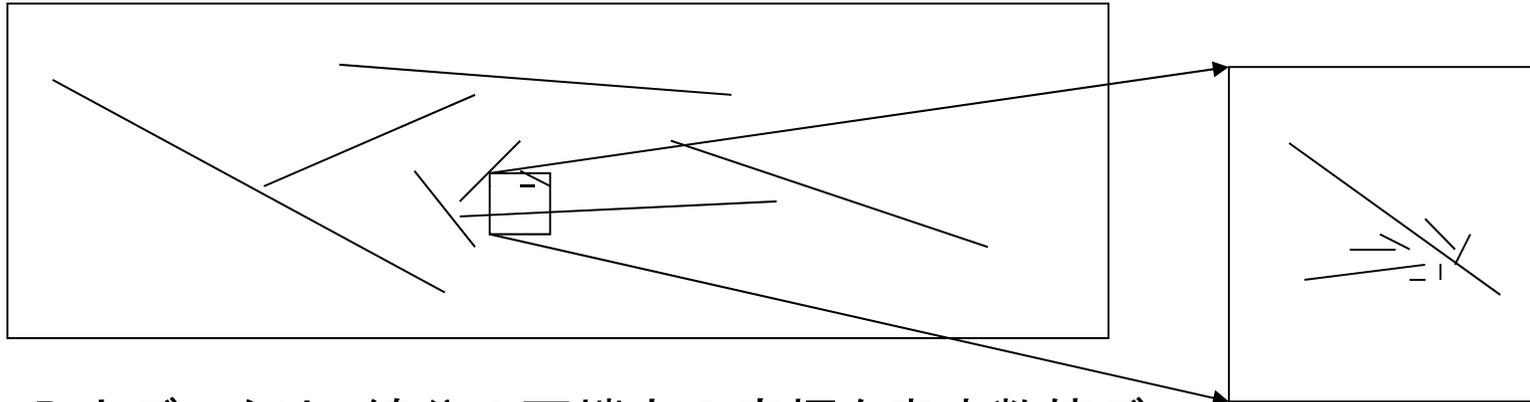
平面上に多数の線分が与えられたとき、その中に互いに交差する線分対があるかどうかを判定する問題.



人間なら、交差があるかどうかを「目で見て」判断できる。  
計算機には「目」がないから、計算だけで判定しなければならない。  
人間にとって簡単なことが計算機では難しいことは多い。

でも、線分交差判定問題は人間にとって本当に簡単か？

## 線分交差判定問題は人間にとって本当に簡単か？



入力データは、線分の両端点の座標を表す数値データ。

数値データに従って線分を平面上に描き、交差の有無を判定。

このとき、本当に交差は「見える」だろうか？

長い線分と短い線分が混在しているとき、縮尺をどのように選ぶかが問題。  
長い線分に合わせると、短い線分同士の交差は「見えない」  
短い線分に合わせると、長い線分がはみ出してしまう。

結局、何度も縮尺を変更しながら、線分を描画する必要がある。

## 問題のページ

線分交差検出問題とは何か. 数学的に述べよ.

入力: \_\_\_\_\_

出力: \_\_\_\_\_

入力と出力をどのような形式で表現するか.

A: 線分は端点の座標値で指定する

B: 直線の方程式と端点のx座標で指定する

線分の長さはどのように計算するか?

## 素朴な方法

与えられた線分の2つの端点のx, y座標をsx[], sy[], tx[], ty[]  
という配列を用いて蓄える。  
線分の本数をnとする。

```
double sx[100],sy[100]; // 始点の座標
double tx[100], ty[100]; // 終点の座標
int     n;              // 線分の本数
```

```
nの値を入力;
for(i=0; i<n; i++)
    sx[i], sy[i], tx[i], ty[i]を入力;
for(i=0; i<n-1; i++)
    for(j=i+1; j<n; j++)
        線分iとjは交差するかを計算
        if 交差する then YESを出力して終了
        NOを出力して終了
```

この方法では  
 $O(n^2)$ の時間が必要

もっと高速化できるか

問題： 前ページのプログラムはどんな入力に対しても線分数  $n$  の2乗に比例する時間がかかるか？

最も都合が良いときは何か？

$i=n/2$  のときに交差を発見して終わるとき、計算時間は  $n$  を用いてどのように表現できるか？

何が定数時間でできると仮定してよいか？

2線分が交差するかどうかはどのようにして判定できるか？

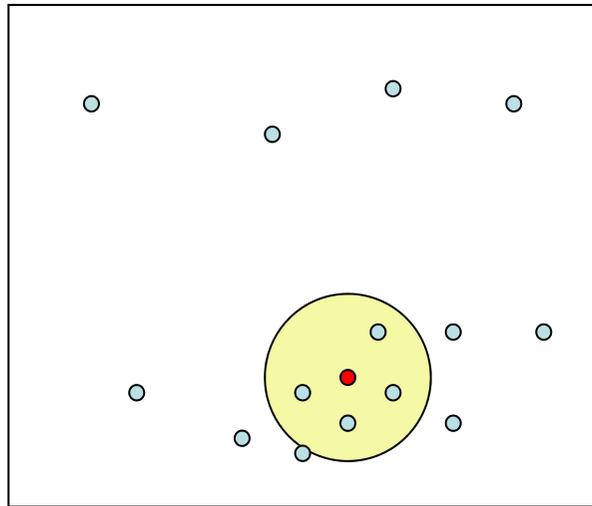
全く同じ線分が複数回含まれているときはどうするか？

他の線分に完全に含まれるような線分があったときはどうか？

# 幾何問題の難しさ(2)

## 郵便局問題

平面上に配置された多数の点(郵便局)の情報を計算機に蓄えておき、任意の点が質問として与えられたとき、質問点に最も近い点(郵便局)を答える問題.



人間なら,

質問点を与えられたら, その付近の点だけを対象にして物差しで距離を測り, 最も近い点を選ぶことができる.

計算機では,

すべてが数値データなので, 探索の対象を限定することが非常に難しい

## 1次元での探索:

データがソートされていれば, データ数 $n$ に対して,  $\log n$ 時間で探索可能

## 2次元での探索:

2分探索の構造を実現できるかが問題.

## 高次元では??

問題: 1次元での郵便局問題を定義してみよう.  
入力と出力は何か?

問題: 1次元の郵便局問題は $O(\log n)$ 時間で答えられるように  
前処理をすることができることを示せ.

5分テスト

**2次元の最近点問題を数学的に定義せよ.**

入力は何か:

出力は何か:

入力の点集合に対して予め前処理が可能なとき

そうでないとき.

## 素朴な方法

与えられた点のx, y座標をpx[], py[]という配列を用いて蓄える。  
点の個数をnとする。

```
double px[100],py[100]; // 点の座標
int     n;              // 点の個数
```

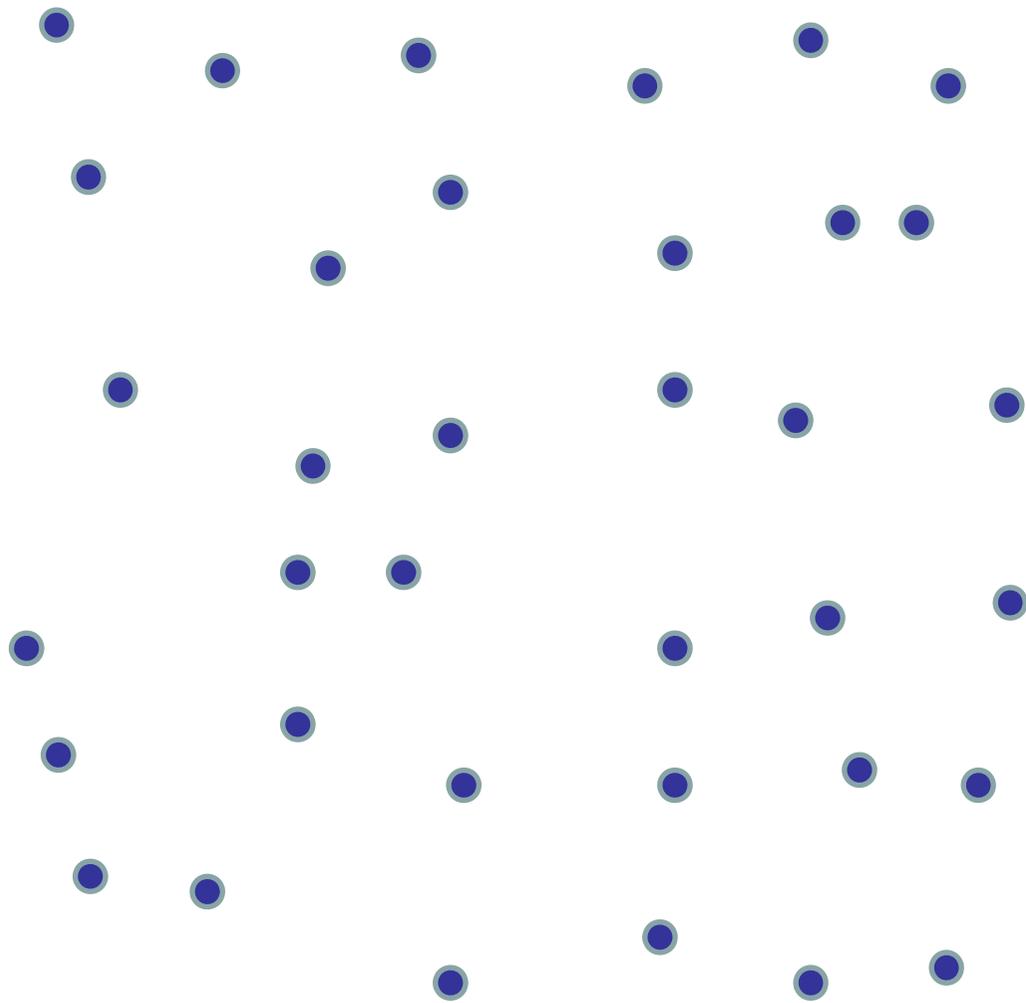
```
nの値を入力;
for(i=0; i<n; i++)
    px[i], py[i]を入力;
質問の点q(x, y)を入力
dmin = qと0番目の点との距離, im=0;
for(i=1; i<n; i++)
    d = qとi番目の点との距離;
    if d < dmin then { dmin = d; im = i; }
im番目の点が最も近いと報告して終了
```

この方法では  
 $O(n)$ の時間が必要

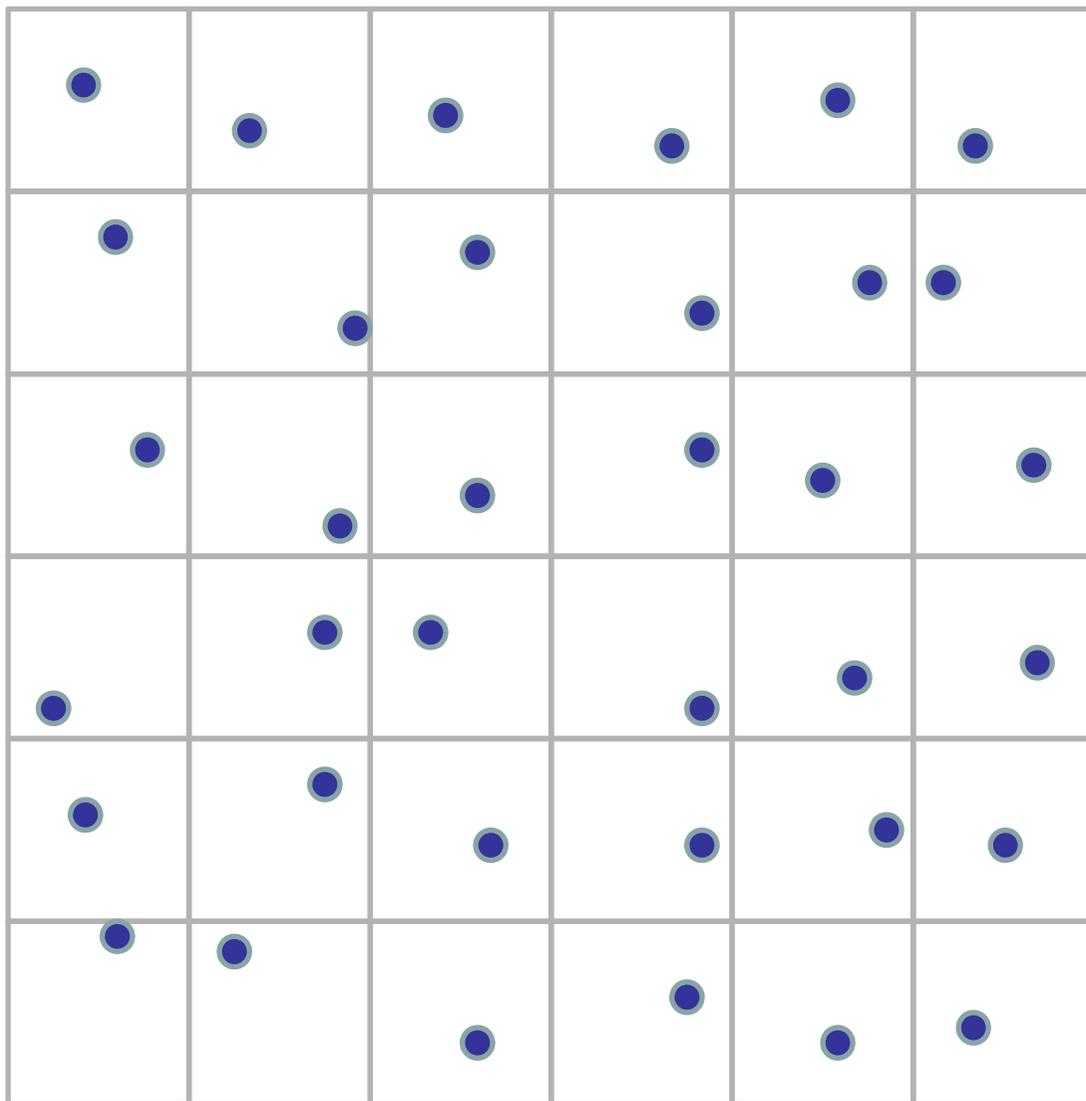
もっと高速化できるか

平面を小領域に  
分割してはどうか？

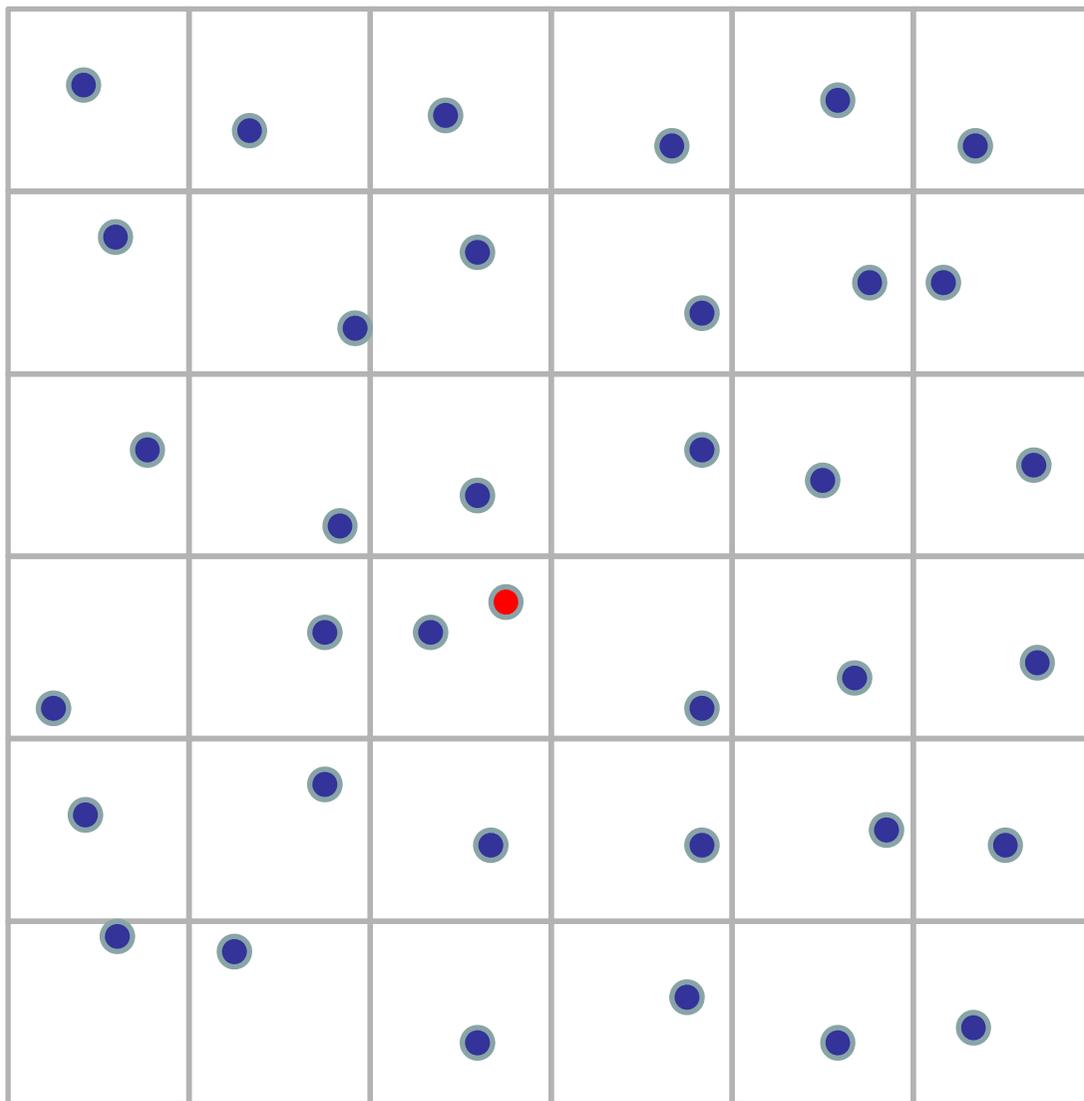
# 平面を小領域に分割しておく方法



# 平面を小領域に分割しておく方法

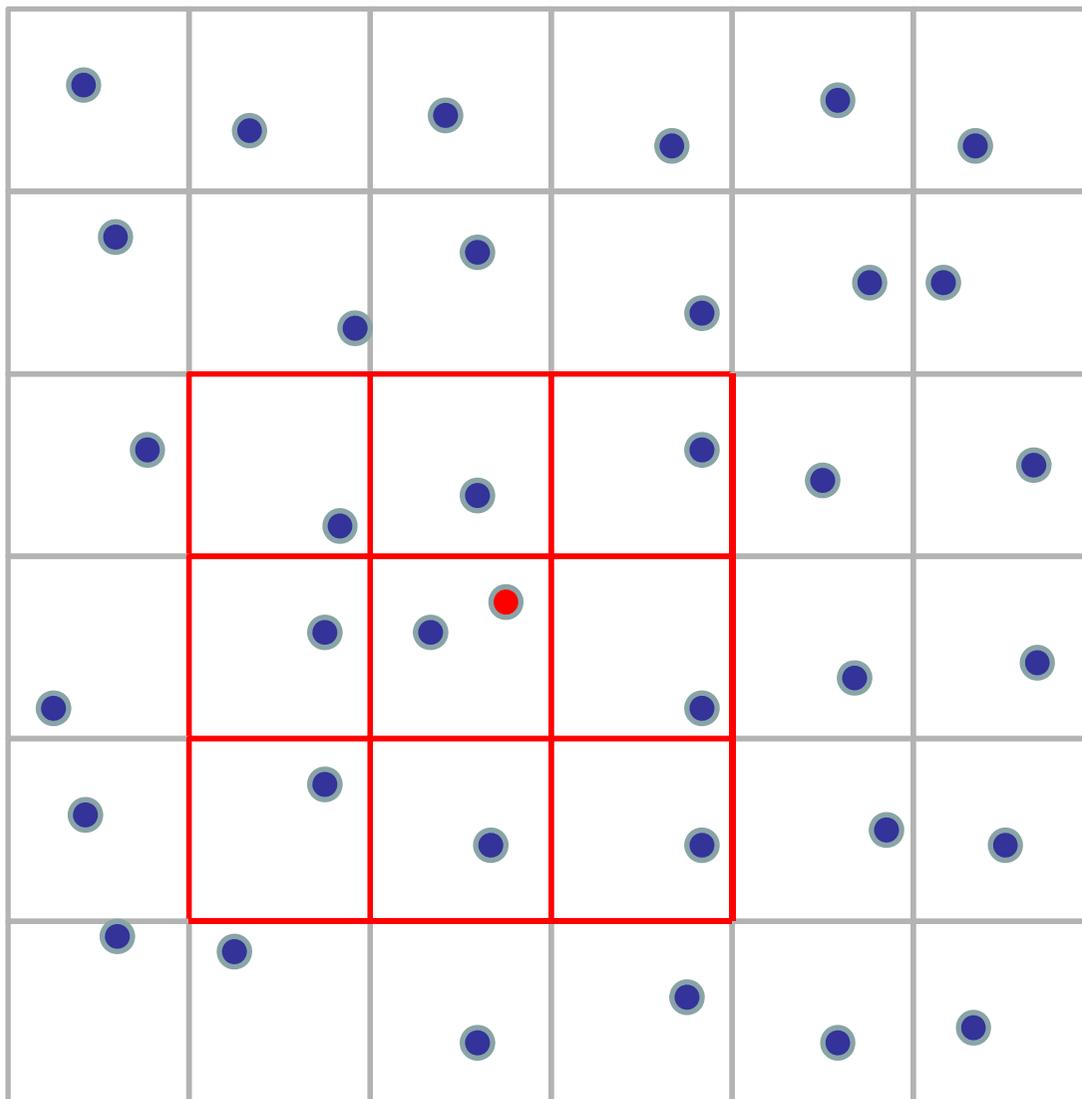


# 平面を小領域に分割しておく方法



質問点を指定

## 平面を小領域に分割しておく方法



質問点を指定

質問点を含む  
小領域(セル)  
を中心に3x3の  
セルの内部の  
点との距離を  
求める.

問題:  $n$ 個の点が理想的に均一に分布しているとき, 平面を  $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ のセルに分割したとすると, 1つのセルに含まれる点の個数は平均的に何個か?

問題: 点の分布が不均一の時でも, 前ページの方法は常に質問点に最も近い点を見つけると言えるか?

問題: 点の分布が非常に不均一の時, セルに分割する方法でうまく行かないのはどんなときか?

休憩

# 計算幾何学の応用

どんな分野に応用されているか:

コンピュータグラフィックス

基本図形どうしの交差判定, 任意に指定された点を含む図形の発見,  
指定された領域に存在する基本図形の発見, 隠面除去, 光線追跡法

地理情報処理

ラベル配置問題, 最短経路問題, 拡大縮小, 重ね合わせ

ロボティックス

動作計画問題(motion planning)

コンピュータビジョン

パターン認識

メッシュ生成

VLSI設計, CAD/CAM

データマイニング

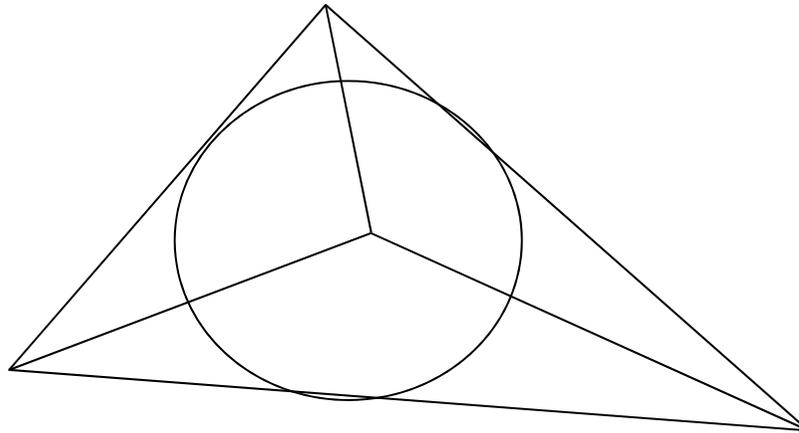
計算折り紙(Computational ORIGAMI)

直接的な応用の他にも幾何問題に変換することによって問題が見通しよく解けることもある.

(例)配列に数値データが蓄えられているとき, 配列の何番目から何番目までを取れば平均値が最大となるかを求める問題など.

# 初等幾何と計算幾何

- 三角形の内接円と外接円
- 内接円: 三角形の内側に接する円
- 角度の2等分線の交点



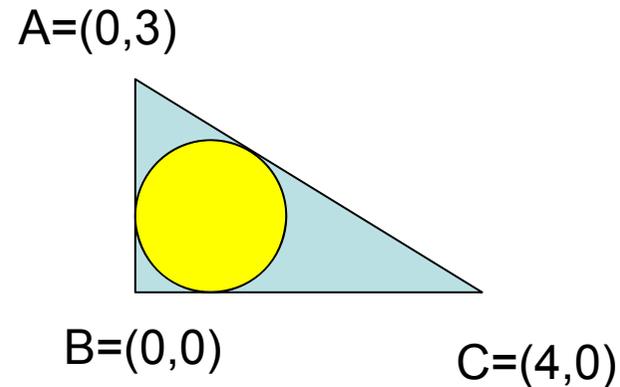
角度の2等分線の計算は？線分の交点は？

## 内接円の中心と半径を与える式

$$(x_I, y_I) = \frac{(x_1, y_1)|BC| + (x_2, y_2)|CA| + (x_3, y_3)|AB|}{|AB| + |BC| + |CA|}$$

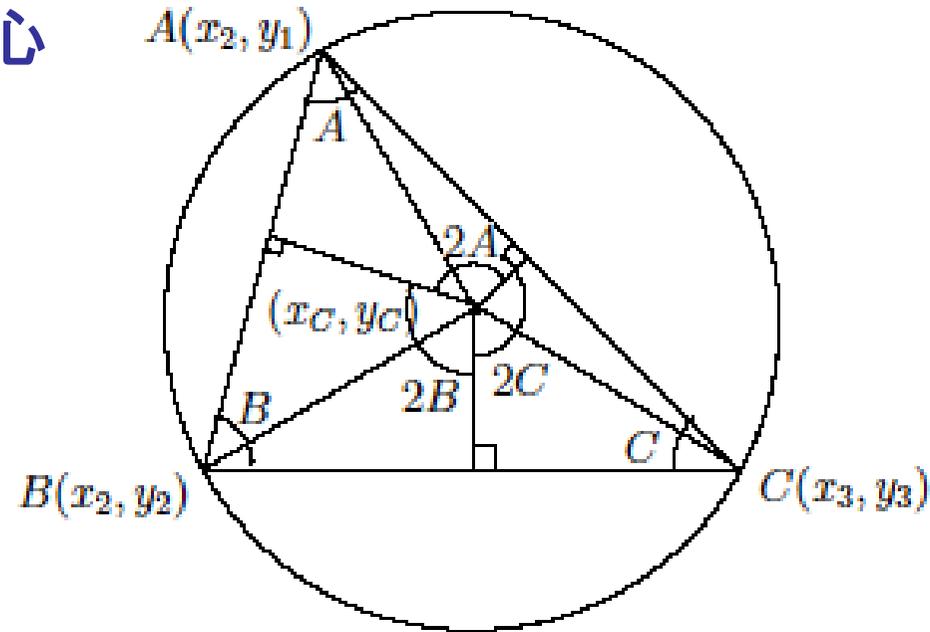
$$r_I = \frac{2S}{a + b + c}$$

A=(0,3), B=(0,0), C=(4,0)のとき



$$I = \frac{4(0, 3) + 5(0, 0) + 3(4, 0)}{3 + 4 + 5} = \frac{(12, 12)}{12} = (1, 1)$$

# 三角形の外心



$$x_C = \frac{\begin{vmatrix} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 & y_2 - y_1 \\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}$$

$$y_C = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}$$

2点の垂直2等分線を計算する方法を示せ.

そもそも垂直2等分線を計算するとは何をすることか？

A: 直線の方程式を求める

$y=ax + b$ の形？  $ax+by+c=0$ の形？

B: 垂直2等分線が通る2点の座標を求める.

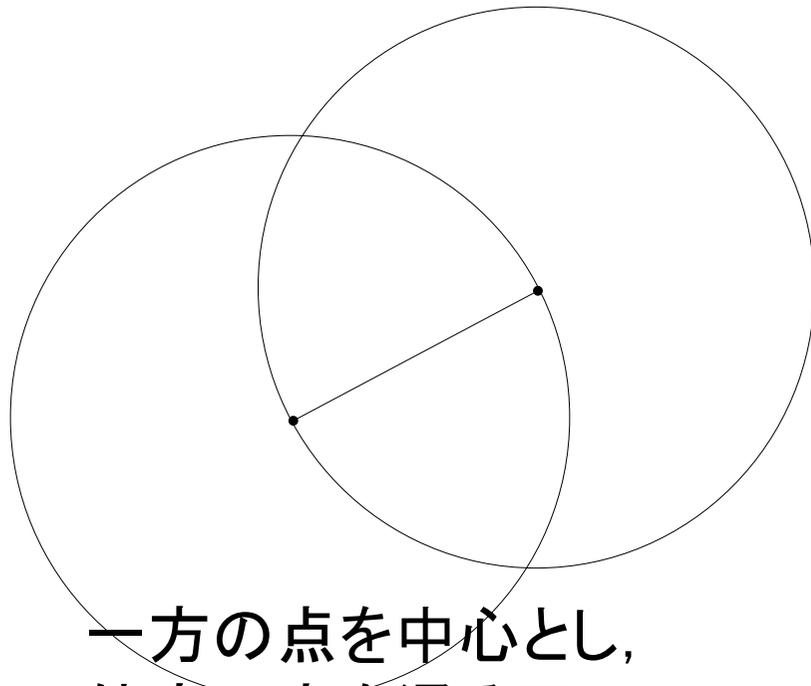
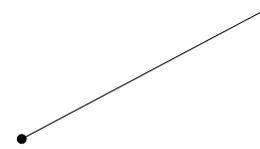
2点が水平線上にあるとき

2点が垂直線上にあるとき

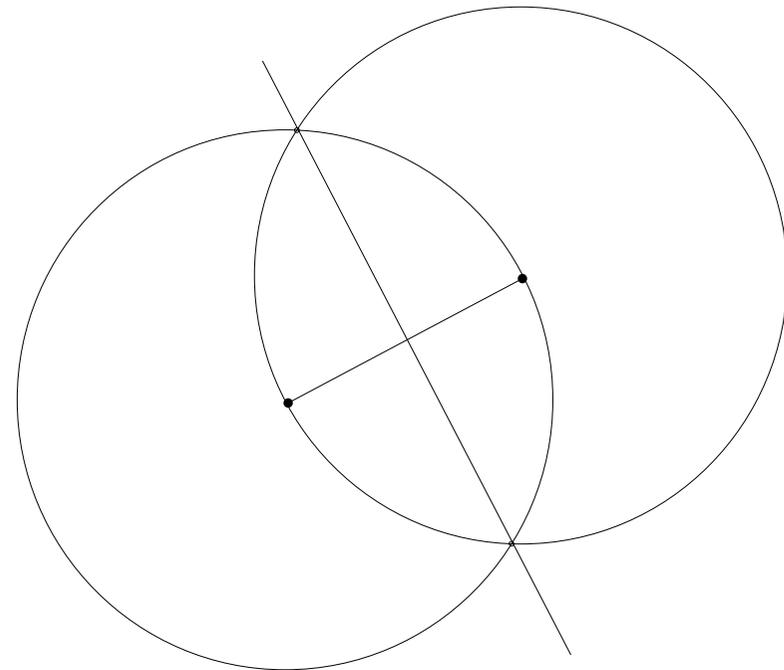
それ以外するとき

# 垂直2等分線の作図

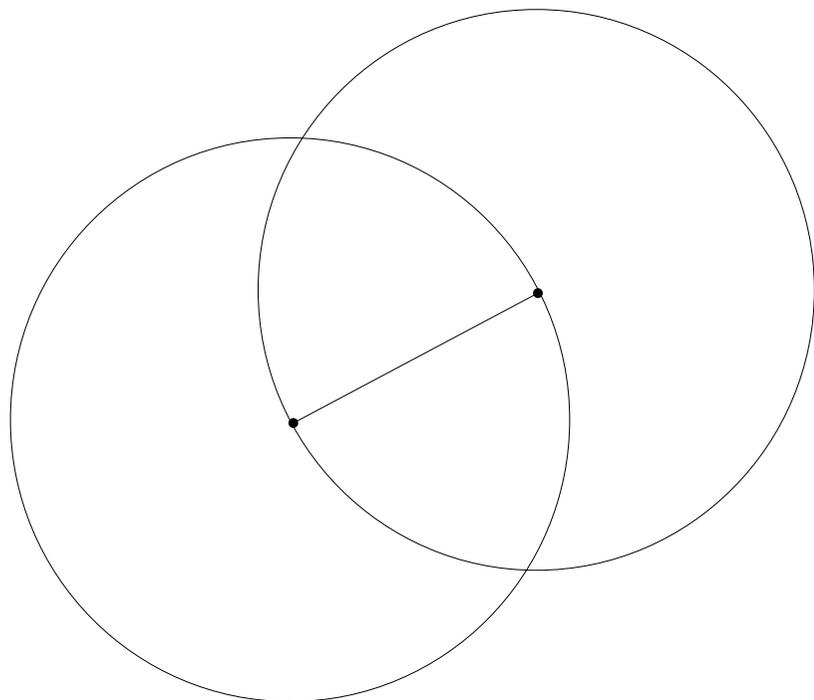
•  
•  
2点(a, b), (c, d)



一方の点を中心とし、  
他方の点を通る円



2つの円の交点を求める



2つの円の交点:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$$

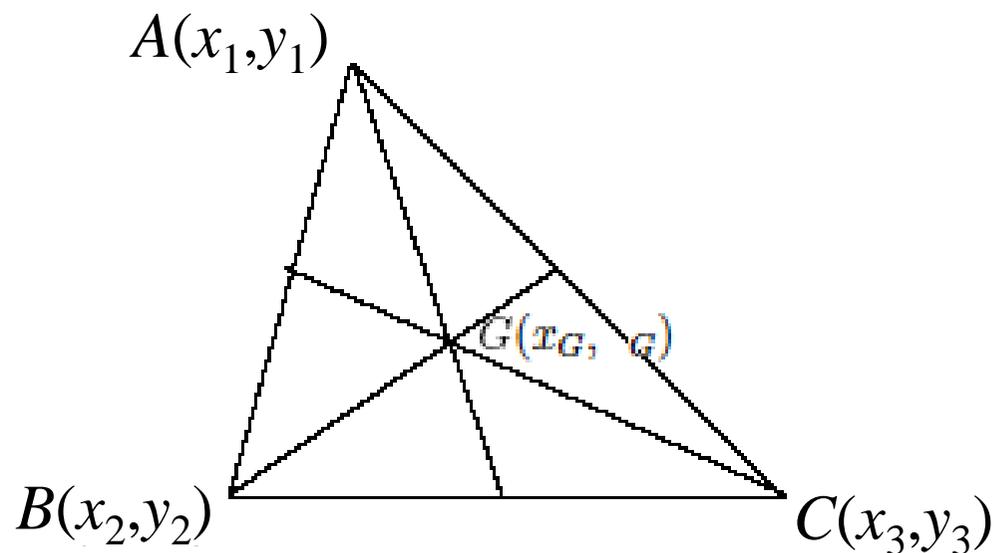
下から上を引くと

$$c^2 - a^2 + 2(a-c)x + d^2 - b^2 + 2(b-d)y = 0$$

$$2(a-c)x + 2(b-d)y + c^2 - a^2 + d^2 - b^2 = 0$$

これは垂直2等分線の方程式

## 三角形の重心



重心とは距離の2乗和を最小にする点

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^3 (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2 \sum_{i=1}^3 (x - x_i) = 0,$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2 \sum_{i=1}^3 (y - y_i) = 0$$

を満たす点を求めればよい.

$$x = (x_1 + x_2 + x_3)/3,$$

$$y = (y_1 + y_2 + y_3)/3$$

三角形の重心の別の定義を与えよ.

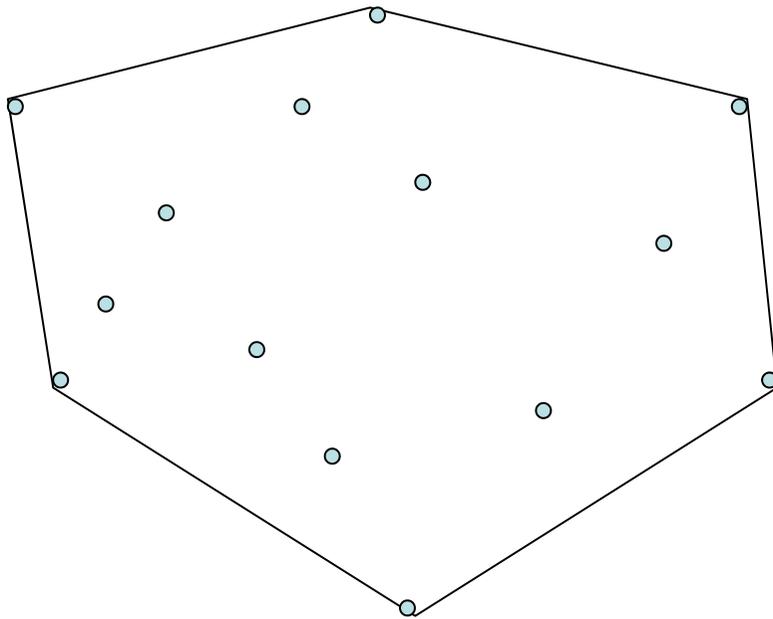
各頂点から対辺の中点に向けて線分を引く

それはどんな式で表現できるか

# 計算幾何学の代表的問題(1)

## 凸包構成問題:

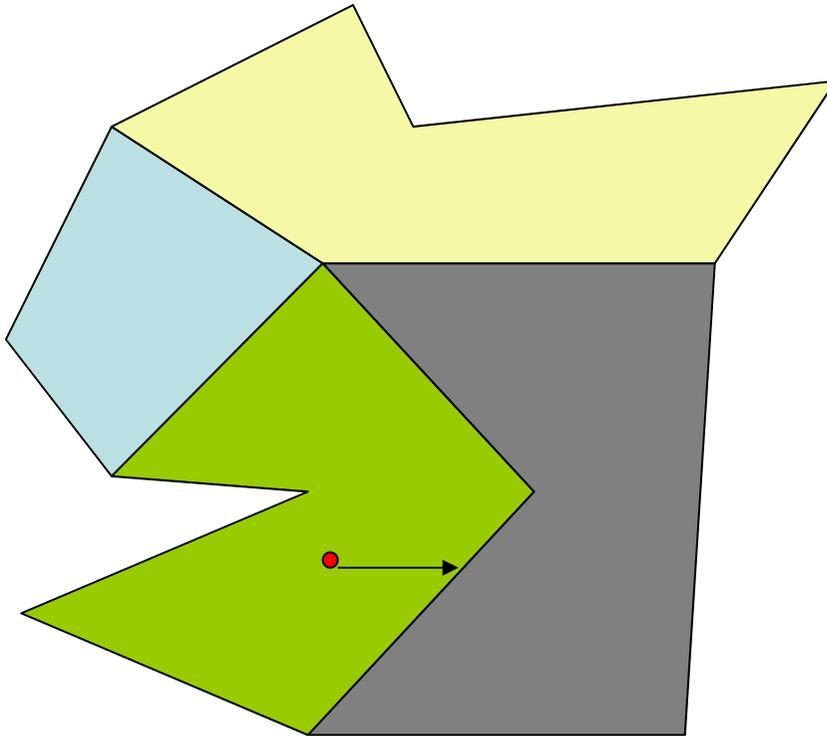
$n$ 個の点を与えられたとき, それらをすべて含む最小の凸多角形(凸多面体)を求めよ.



# 計算幾何学の代表的問題(2)

## 点位置決定問題

平面上に直線で描かれた平面地図が与えられているとき、  
質問点を含む領域の名前を求めよ。



質問点の付近だけを探索することによって、質問点を含む領域の名前を求めることができるか？

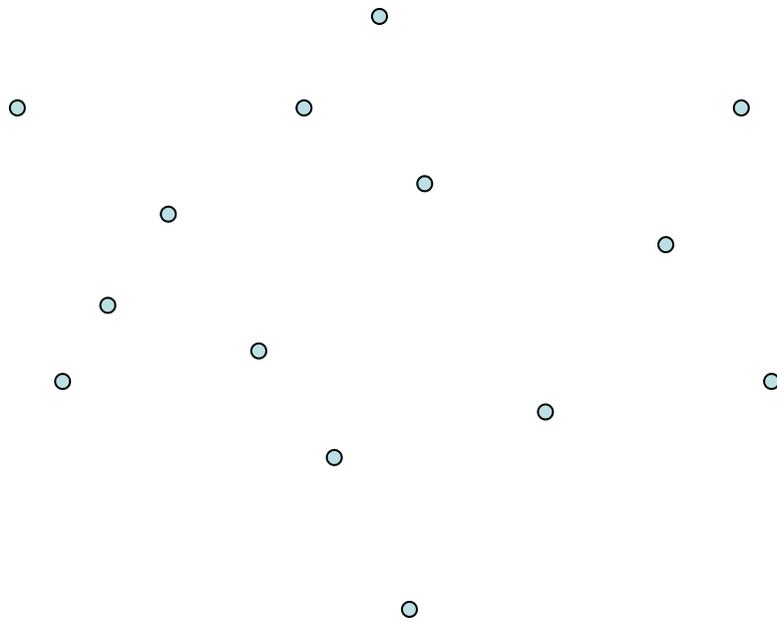
平面地図のすべての辺について、その左右の領域の名前を蓄えておくことが必要。

質問点から右に延ばした半直線が最初に交差する辺が求めればよいが、...

# 計算幾何学の代表的問題(3)

## 最近点問題

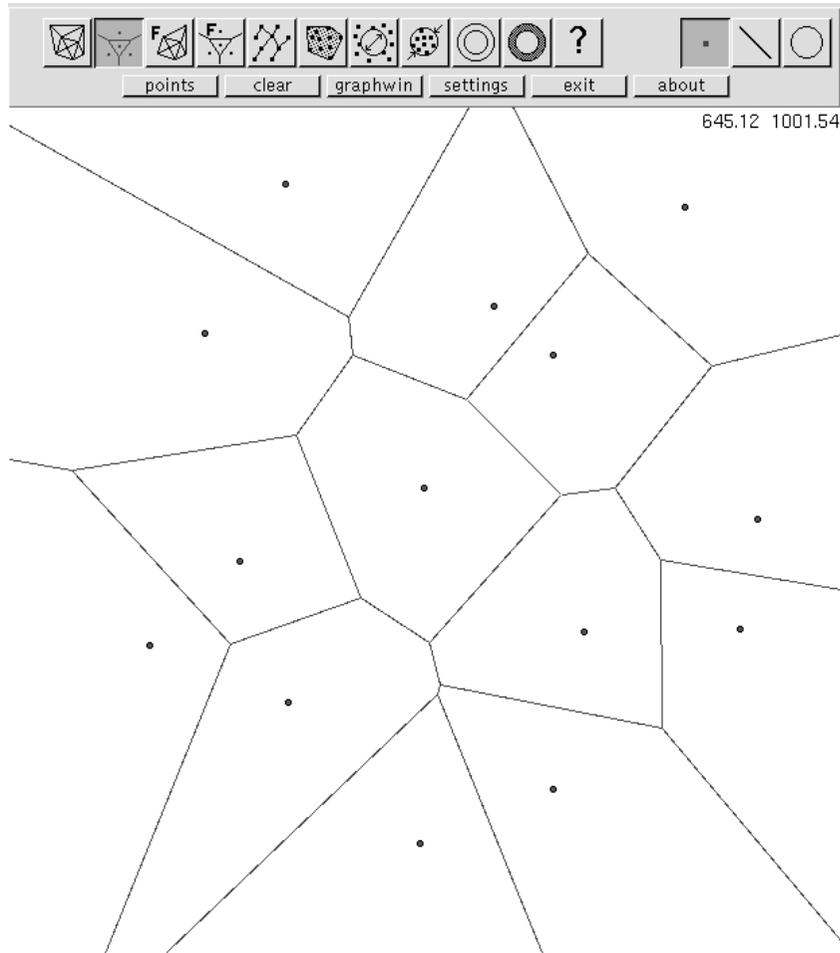
平面上に多数の点を与えられているとする。質問点を与えられたとき、それに最も近い点を求めよ。



すべての点との距離を求めれば、最近点を求めることはできるが、質問点の近くの少数の点だけを見て求めることは可能か？

## ボロノイ図の利用

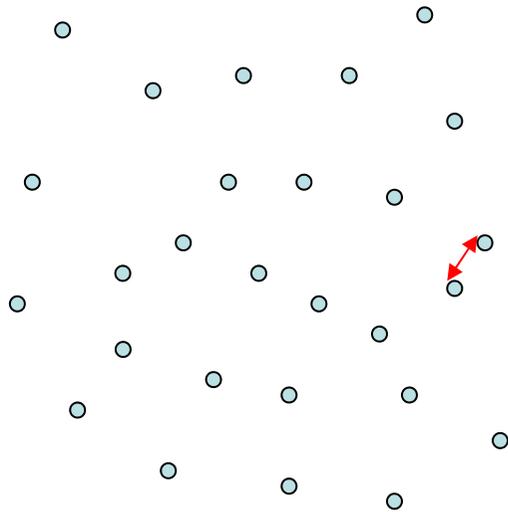
ボロノイ図： 平面を、どの点に最も近いかという関係で領域に分割したもの。  
2点の垂直2等分線の集まり。



# 計算幾何学の代表的問題(4)

## 最近点对問題

平面上に多数の点を与えられたとき、その中で最も近い点对を求めよ.



すべての点对を調べると  
点の個数の2乗に比例する  
時間が必要.

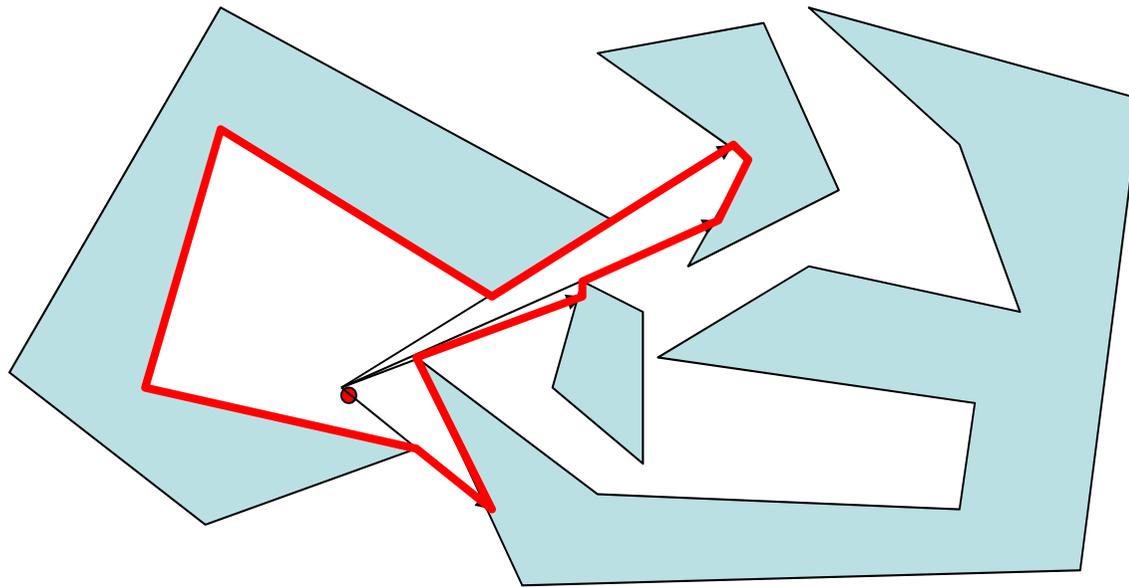
ボロノイ図を作れば, ボロノイ図で  
隣り合う点どうしの距離を求めるだけで  
最近点对が求まる.

ボロノイ図があれば, 線形時間で可能.

# 計算幾何学の代表的問題(5)

## 可視性問題

平面上に多数の多角形状の障害物が与えられているとき、任意に指定した点から見える部分を求めよ。



質問点 $q$ から見える部分を求めるものとする。

このとき、任意の点が $q$ から見えるかは、2点を結ぶ線分が辺と交わるかで判定できる。

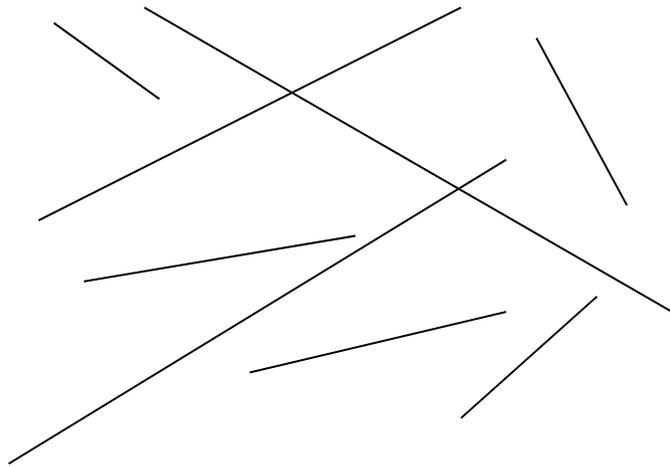
$q$ から見える点全部を求めるのは簡単ではない。



# 計算幾何学の代表的問題(7)

## 線分の交差判定, 交差列挙

平面上に多数の線分が与えられているとき, それらの中に互いに交差するものはあるか? あるいは, 交点をすべて列挙せよ.



すべての線分対について調べればよいが, それでは線分数の2乗に比例する時間が必要になる.

もっと早く判定できるか?

交点数は最悪の場合, 線分数の2乗に比例する.

交点数に比例する時間ですべてを列挙することはできるか?

# 計算幾何学の代表的問題(8)

## 多角形の基本図形分割

多角形の内部を指定された基本図形に分割せよ.

基本図形: 三角形, 台形, 凸多角形など.

### 高速化:

どれだけ早く分割できるか?

### 最適化:

基本図形の個数を最小にすることはできるか?

# 計算幾何の基礎

## 点の表現

座標を用いて表現するのが最も一般的  
2次元の場合には,  $p(x, y)$ のように表現.

2点間の距離:

ユークリッド距離  $\text{dist}(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

マンハッタン距離  $\text{dist}(p_1, p_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

$L_\infty$ 距離  $\text{dist}(p_1, p_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

$L_p$ 距離  $\text{dist}(p_1, p_2) = \sqrt[p]{(x_1 - x_2)^p + (y_1 - y_2)^p}$

# 計算幾何の基礎(2)

## 直線の表現

(1) 傾きとy切片による表現:  $y = ax + b$

y軸に平行な直線( $x = c$ の形)が表現できない.

(2) 3つのパラメータを用いた表現:  $ax + by + c = 0$

一つの直線の表現が一意に定まらないという欠点がある.

(3) 2点を通る直線として表現する方法:

2点(p, q), (r, s)を通る直線:  $(s-q)x - (r-p)y = ps - qr$

## 2直線の交点

$$l_1: (y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y = x_1y_2 - x_2y_1$$

$$l_2: (y_4 - y_3)x - (x_4 - x_3)y = x_3y_4 - x_4y_3$$

交点の座標(x, y)は

$$x = \frac{\xi(x_4 - x_3) - \eta(x_2 - x_1)}{\Delta}, y = \frac{\xi(y_4 - y_3) - \eta(y_2 - y_1)}{\Delta}$$

$$\xi = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \eta = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \\ y_4 - y_3 & x_4 - x_3 \end{vmatrix}$$

# 計算幾何学の基礎(3)

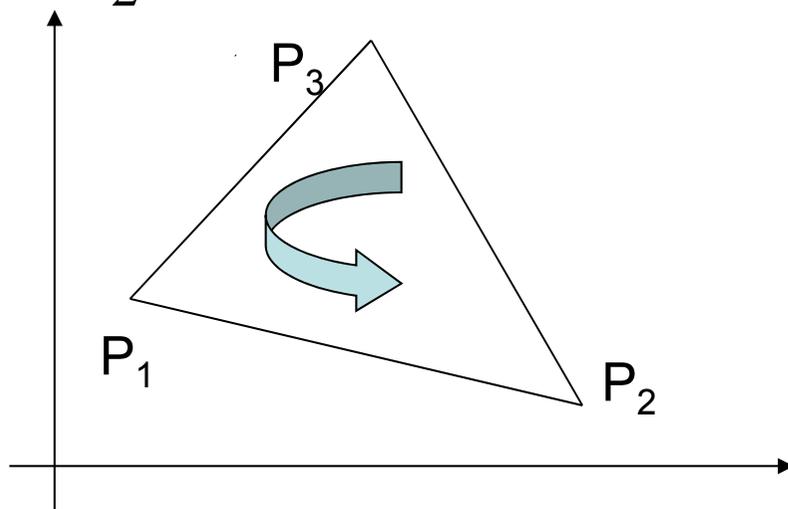
## 線分のパラメータ表現

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  を結ぶ線分 :

$$x = (1 - \mu)x_1 + \mu x_2, \quad y = (1 - \mu)y_1 + \mu y_2, \quad \mu \in [0, 1]$$

## 三角形の面積

$$\text{面積} = \frac{1}{2} ((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))$$



面積  $> 0$ : 反時計回り  
面積  $< 0$ : 時計回り  
面積  $= 0$ : 一直線上の3点  
**三角形の符号付面積**

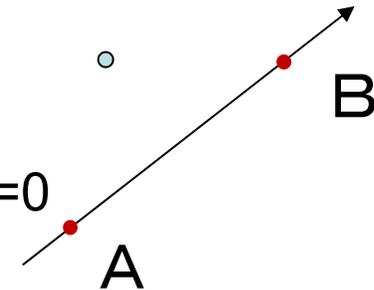
# 計算幾何学の基礎(4)

## 有向線分と点との位置関係

点pが有向線分ABの左側にある $\rightarrow$ 面積(A,B,p) $>0$

点pが有向線分ABの右側にある $\rightarrow$ 面積(A,B,p) $<0$

点pが有向線分ABを含む直線上にある $\rightarrow$ 面積(A,B,p) $=0$



## 2線分の交差判定

(1)線分を含む直線の式を求めた後, それらの交点を求め, それが両方の線分に含まれるかどうかを判定する.

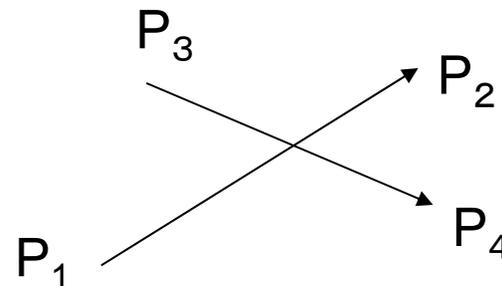
交点計算に除算を含むので, 計算誤差に弱い.

(2)三角形の符号付面積を用いる方法:

2端点 $P_1P_2$ を結ぶ線分と, 2端点 $P_3P_4$ を結ぶ線分が交差するための条件:

$$\Delta(P_1, P_2, P_3) \times \Delta(P_1, P_2, P_4) < 0, \text{ and}$$

$$\Delta(P_3, P_4, P_1) \times \Delta(P_3, P_4, P_2) < 0$$



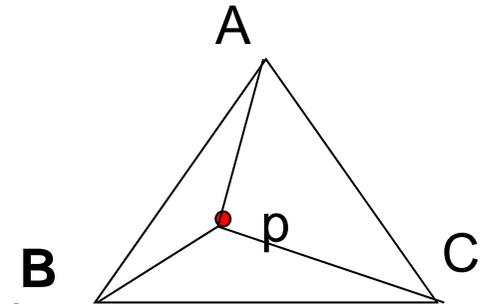
# 計算幾何学の基礎(5)

## 三角形の内部と外部の区別

与えられた点pは三角形ABCの内部に含まれるか？

### 内部にある条件:

面積(A,B,p)>0 and 面積(B,C,p)>0 and 面積(C,A,p)>0  
ただし, 三角形ABCは反時計回りに方向付けられていること.



計算誤差の話

## 2つの角度の比較

第一象限に2点p, qがあるとき, 対応するx軸からの角度の大きさを比較したい:

(1) tanの値を用いると比較可能.

具体的には,  $y(p)/x(p) - y(q)/x(q)$  の符号を求めればよい.

この方法はx座標が小さいときに計算誤差が大きくなる.

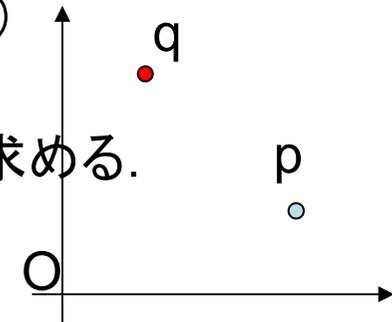
$y(p)x(q) - y(q)x(p)$  の符号を求めてもよい(除算がない)

(2) 三角形の符号付面積を求める方法:

原点Oと2点p, qで構成される三角形(O, p, q)の符号を求める.

符号>0 → 角度q > 角度p

符号<0 → 角度q < 角度p



問題: 平面上に $n$ 個の点を与えられているとき, それらを点 $(x_0, y_0)$ の回りに角度順にソートする方法を示せ(この点から右へ垂直方向に延びる半直線を反時計回りに回転するものとして角度を定義する).  
ただし, 点 $(x_0, y_0)$ は入力のどの点とも一致しないことを仮定してよい.

