計算幾何学特論（担当：浅野）
2012 年度試験問題集

問題１： n 個の数値データが配列 $a[.]$ に格納されているものとする．任意の数値 x を与えて，x に等しいものがあれば，それは配列の何番目にあるかを答え，なければ -1 を返したい．
(1) ２分探索を行うためには，配列 $a[.]$ に蓄えられたデータはどんな性質を満たさなければならないか？
(2) ２分探索のアルゴリズムを擬似言語でプログラム風に記述せよ．
(3) ２分探索の効率を解析せよ．解析の経過も示すこと．
(4) 郵便局問題を定義し，座標値に関する単純な２分探索では問題が解決しないことを説明せよ．

問題２： 講義では，郵便局問題に対して，平面を同じサイズの小長方形領域（以下，セルと呼ぶ）に分割しておく方法について述べた．
(1) すべてのセルに少なくとも１点が入るように分割できたとする．このとき，質問点を含むセルと，それを取り巻く 24 個のセルに入っている点だけを調べて，質問点に最も近い点を求めれば，それが全体でも質問点に最も近い点であることを証明せよ．
(2) すべてのセルに少なくとも１点が入るようにセル分割ができた場合，セルの個数の上界を $O()$ 記法で与えよ．
(3) すべてのセルに１点以上，５点以下が入るようにセル分割できたとする．このとき，任意に与えられた質問点に最も近い点をどれだけ早く求めることができるか．$O()$ 記法で答えよ．
(4) 上に述べたような性質が成り立たないときには探索の効率が悪くなるが，計算効率が極端に悪くなるのはどのような場合か．ただし，外周のセルは全て１点以上を含んでいるものとする．

問題３： 平面上の n 個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ の重心点 g は，

$$x(g) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(p_i),\ y(g) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y(p_i)$$

で与えられる．ただし，$x(g), y(g)$ は，それぞれ点 g の x, y 座標を表すものとする．
(1) 点 q から n 個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ までの距離の２乗和

$$D(q) = \sum_{i=1}^{n} (x(q) - x(p_i))^2 + (y(q) - y(p_i))^2$$

を最小にする点は，実は重心点であることを証明せよ．
(2) 重心点は必ず凸包の内部に存在することを証明せよ．
(3) 凸包内部の点を定数時間で求める方法を示し，それが正しいことも証明せよ．

問題４： 講義では平面上の多角形について述べた．
(1) 多角形の定義を述べよ．
(2) 平面上の多角形が単純であるのはどんなときか．その性質を述べ，さらに単純でない多角形の例も示せ．
(3) 与えられた点列が単純な多角形を成すかどうかを判定する方法を示せ．何を基本的な操作とするかも述べること．
(4) ２つの多角形が共通部分をもつかどうかを判定するアルゴリズムを与えよ．ただし，アルゴリズムの効率は多項式時間である限り問題ではない．

問題5：3点 A, B, C が与えられたとき，$\angle ABC$ を，線分 AB を点 B の周りに反時計回りに線分 BC と重なるまで回転する際の角を表すことにする．このとき，$\angle ABC$ と $\angle ABD$ の大小を比較する方法を，三角形の符号付き面積を用いて表せ．

問題6：講義で凸包構成の素朴なアルゴリズムを説明した．S を与えられた n 点 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ の集合とし，S のすべての3点の組 (P_i, P_j, P_k) について，三角形 $\triangle P_iP_jP_k$ の内部に含まれる点を集合 S から取り除くという方法であった．これを次のように実装しよう．

```
for i=1 to n
   c[i] = 1;
for i=1 to n-2
   for j=i+1 to n-1
      for k=j+1 to n
         if c[k] = 1 then{
            for m=k+1 to n
               if Contain(i, j, k, m) then c[m] = 0;
         }
for i=1 to n
   if c[i] = 1 then output i;
```

ただし，Contain(i, j, k, m) は，3点で決まる三角形 P[i]P[j]P[k] の内部に点 P[m] が含まれれば真，そうでなければ偽を返す関数とする．
(1) 残念ながら，上のプログラムには致命的なバグがある．1つの行を書き直すとバグがなくなる．どの行をどのように直せばよいか．
(2) このプログラムでは正しく凸包上の点の集合が求まらないような例を示せ．ただし，4点だけで構成される例とすること．
(3) このアルゴリズムの計算時間を $O()$ 記法で示せ．
(4) このアルゴリズムでは三角形の内部に与えられた点が含まれるかどうかを判定する関数 Contain() が重要な役割を果たす．では，この関数では三角形の辺上に点 P[m] があったり，P[m] がいずれかの頂点と一致する場合をどのように扱うべきか，理由と共に答えよ．
(5) 上のプログラムでは配列 c[] を用いて，点 P[i] が凸包上にないことが分かれば c[i]=0 とした．それ以外に，配列 c[] は使わず，三角形内に含まれる点が見つかる度に，その点のインデックスをスタックなどに溜めていくという方法も考えられるが，その方法では非常に多くの点が記録されてしまうという問題がある．そのような都合の悪い場合を具体的に示せ．

問題7：反時計回りの凸 m 角形 $(P[0], P[1], \ldots, P[m-1], P[m] = P[0])$ と反時計回りの凸 n 角形 $(Q[0], Q[1], \ldots, Q[n-1], Q[n] = Q[0])$ が与えられているものとする．また，凸 m 角形の頂点は，凸 n 角形のどの頂点よりも左にある（x 座標が小さい方向）にあるものと仮定する．この2つの凸多角形の上部外接線を求めるアルゴリズムを以下に示す．

```
u = 0;
for i=1 to m-1
   if px[i] > px[u] then u = i;
v = 0;
for j=1 to n-1
   if px[j] < px[v] then v = j;
do{
```

```
    while( LeftTurn(P[u], Q[v], Q[(v-1) mod n)])
        v = (v-1) mod n;
    while( RightTurn(Q[v], P[u], P[(u+1) mod m)])
        v = (v-1) mod n;
} while( LeftTurn(P[u], Q[v], Q[(v-1) mod n]));
Report (P[u], Q[v]) as a tangent line
```

(1) このアルゴリズムには致命的なバグが一つだけある．それを正せ．
(2) このアルゴリズムの計算時間が $O(m+n)$ であることを示せ．

問題８：(1) xy-平面の第１象限に n 個の点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ が与えられている．これらの点を x 軸の正方向となす角度の昇順に並べたい．その方法を具体的に述べよ．
(2) 反時計回りに並んだ n 個の頂点で定義される単純な多角形 P（自己交差のない多角形）と１点 q が与えられたとき，q が P の内部にあるかどうかを判定するアルゴリズムを与えよ．ただし，多角形のどの辺も水平ではないと仮定する．

問題９：講義では凸包構成のアルゴリズムとして, Graham 法，Jarvis 法，ソート法を説明した．
(1) それぞれの方法の計算時間を $O()$ 記法で与えよ．
(2) Jarvis 法の方が良いのはどんな場合か．
(3) ソート法は，最初に点を x 座標の順にソートした後，順に点を見て行って，凸包上にない点を削除していくという２段階構成になっている．どちらの段階の方が時間がかかるか．双方の計算時間を解析することによって答えよ．

問題１０：a と b を $0 \le a < b$ であるような整数とする．区分木 $T(a,b)$ について次の問に答えよ．
(1)$T(a,b)$ は何個の節点からなるか．漸化式を解いて答えよ．
(2)$T(a,b)$ の左部分木と右部分木は何か．$T()$ を用いた記号で答よ．また，それらは常に存在するか．
(3)$T(5,15)$ を描け．
(4) 区間 $a[7,10]$ と $b[6,8]$ を $T(5,15)$ に蓄えよ．
(5)$T(5,15)$ の５個の節点に分けて蓄えないといけない区間は存在するか？理由とともに答えよ．

問題１１：インタバル木について次の問に答えよ．
(1) 区間の集合として S_1 と S_2 を考えよう．S_1 は長い区間のみからなるが，S_2 は短い区間だけからなる．それらをインタバル木で表現したとき，それらの木の高さはどうなるか，比較せよ．理由と共に答えよ．
(2) 実数上の区間をインタバル木に蓄える場合を考えよう．何か不都合なことはあるか．インタバル木の定義に基づいて答えよ．
(3) インタバル木の節点数が最小になるのはどんな場合か．ただし区間の端点は 0 から 9 までの整数とする．たとえば，$\{[0,3],[1,6],[2,9],[4,5],[7,8]\}$ のような集合を考えることができる．ただし，偶数個 $(2k)$ の要素の中央値は小さい方から k 番目の要素とする．

問１２：平面上に水平線分と垂直線分が合計 n 本与えられているとき，それらの間の交点をすべて列挙するアルゴリズムについて考えよう．
(1) 素朴なアルゴリズムを記述せよ．ただし，同じ交点が重複して出力されないことを保証できるものでなければならない．重複を防ぐ仕掛けも説明し，計算時間を解析せよ．
(2) 平面走査法を適用するとき，３つのイベントを考える必要がある．それぞれを記述せよ．
(3) 平面走査法の計算時間を解析せよ．
(4) 平面走査法の方が素朴なアルゴリズムより効率が悪くなることはあるか？ここで効率が悪いとは，計算の時間のオーダーが真に悪いことを意味する．

問題１３：平面上に多数の軸平行な長方形（水平と垂直の辺をもつ長方形）が与えられたとき，互いに重なる長方形のペアが含まれるかどうかを判定するアルゴリズムを平面走査法に基づいて設計せよ．

問題１４：最小包含円について次の問に答えよ．

(1) 最小包含円を求める素朴なアルゴリズムを考えることができる．$P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ を平面上の点集合とする．このアルゴリズムでは，まず任意に１点 p を取り，そこから最も遠い点 p_i までの距離 r_1 を求める．次に p を中心として半径 r_1 の円を描くと，これは確かに P の包含円である．この円上に P の点が３点存在すれば，それが最小包含円であるので終ってよい．そうでなければ，半直線 pp_i の方向に円の中心を移動し，p_i を通る円が他の P の点 p_j を含むようになったところで止まる．次に，p_i と p_j の垂直２等分線上を同様に円の中心を動かし，３点目が円周上に来たところで止める．このときに得られた円を最小包含円として返す．このアルゴリズムが間違った答えを得るのはどんなときか．例を挙げて説明せよ．

(2)P を平面上の n 点からなる集合とする．どの４点も同一円周上にはないと仮定しよう．P の３点で決まる P の包含円で $n^2/4$ 個の異なる円が存在することはあるか？これを最遠点ボロノイ図の概念を用いて答えよ．

(3) 与えられた点集合の凸包の内部にある点は最小包含円には貢献しないことを証明せよ．