計算幾何学特論：計算折り紙入門

上原　隆平
北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科教授
uehara@jaist.ac.jp

11月26日（水）	11月27日（木）
10:30-12:00	10:30-12:00
13:00-14:30	13:00-14:30
14:50-16:20	14:50-16:20

手取
川
金沢
能美市
白山山系

JAISTの特徴（上原私見）

- 大学院大学なので、学部がない
  - 研究に強い大学院（教員が研究をする時間が比較的ある）
  - セメスター制：授業は2カ月単位で進む（週に2回×15回）
  - 学生と教員の「距離」が近い

自己紹介

所属：
北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科 教授
DBLP

専門分野：理論計算機科学

- アルゴリズム
  特にグラフアルゴリズム
- 計算量
  特にパズル/ゲームの計算量
- 計算幾何学
  特に計算折り紙

エルデシュ数＝2
(Pavol Hell氏と共著)

JAIST ギャラリーの…

今日，ここにいる理由

Refine by AUTHOR
Ryuhei Uehara (103)
Erik D. Demaine (21)
Takeaki Uno (20)
Martin L. Demaine (14)
[top 4] [top 50] [all 92]

Refine by VENUE
CCCG (16)
ISAAC (10)
Theor. Comput. Sci. (TCS) (8)
WALCOM (6)
[top 4] [all 40]

Refine by YEAR
2013 (14)
2012 (15)
2011 (10)
2010 (15)
[top 4] [all 17]

計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- 折り紙(ORIGAMI)
  - 1500年代，おそらく紙の普及とともに自然発生的に…?アジアで…
  - 現在，ORIGAMI はすでに英語化していて，書店にも ORIGAMI コーナーがある.
  - 折り紙っぽいものも…

計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- 折り紙の急激な発展
  - 1980年代~1990年代，折り紙が急速に複雑化した.

前川の「悪魔」
1980年頃発表
（正方形1枚から
折れる！）

川崎ローズ
1985年頃発表
（正方形1枚
から折れる！）

Robert Lang のハト時計
1987年頃発表
（1×10の長さの長方形の紙
1枚から折れる！）

計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- コンピュータの利用と折り紙への応用
  - 1990年代以降，コンピュータを用いた折り紙デザインが発展

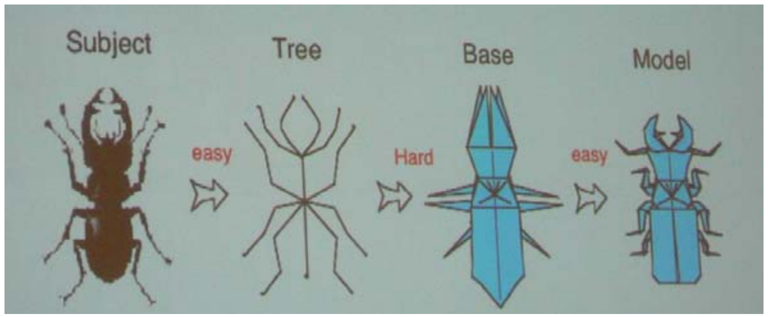
Robert Lang のハト時計
1987年頃発表
（1×10の長さの長方形の紙
1枚から折れる！）

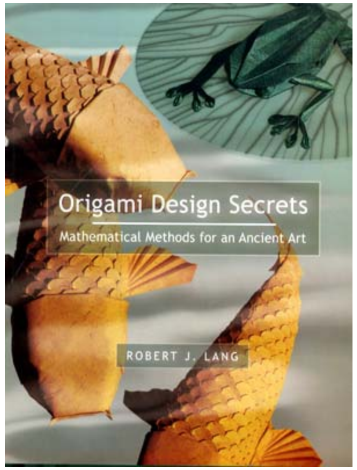
舘知宏のOrigamizer
2007年発表
（長方形の紙1枚から
10時間くらいで折れる）

三谷純の回転対称な折り紙
2010年頃発表
（長方形の紙1枚から折れる）

折り紙とコンピュータサイエンス

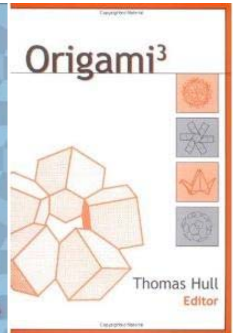
- 近年、むしろ海外で脚光をあびている
- 方法論の確立とソフトウェアの開発：
    - 1980年代：前川さんの「悪魔」
        - CAD的に「パーツ」を組み合わせる
          コンプレックス折り紙の発祥
    - 2000年代：Lang さんの TreeMaker
        - 与えられた「木構造」（距離つき）
          を正方形上に展開するソフト
        - さまざまな最適化問題を
          現実的な時間で計算

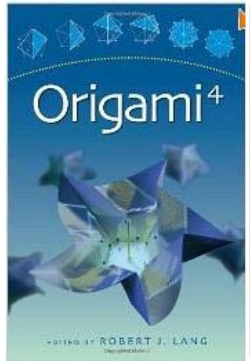


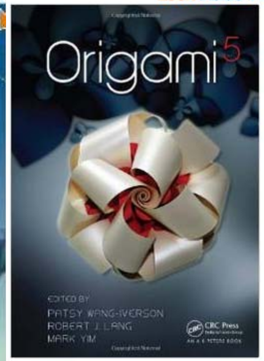


折り紙とコンピュータサイエンス

- 折り紙の科学に特化した国際会議：
  - 1989年12月@ Italy
    The International meeting of Origami Science and Technology
  - 1994年@滋賀県大津
  - 2001年3月@アメリカ
    The International meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (3OSME)
  - 2006年9月8日～10日@アメリカ
    4OSME
  - 2010年7月13日~17日@ シンガポール
    5OSME
  - 2014年8月10日~13日@東大
    6OSME







計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- “Computational Origami”の提案

  1990年代~

  計算幾何学の分野で「計算幾何」や「最適化問題」として「折り」の問題をとらえ始める

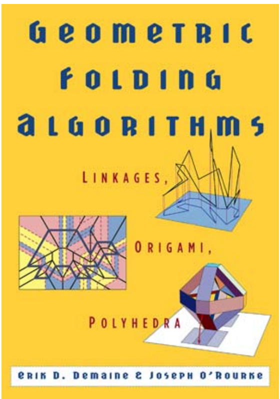
この分野の超著名な研究者 : Erik D. Demaine

- 1981年生まれ
- 20歳でカナダで博士号を取得し，
  そのままMITの教員になり，現在に至る
- 彼の博士論文のテーマが計算折り紙であった.

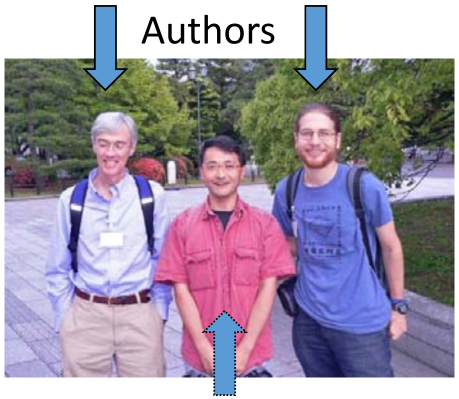
計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- 文献紹介

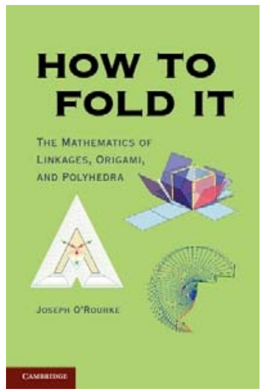
Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra
by J. O’Rourke and E. D. Demaine, 2007.



Authors



I, translated it to Japanese (2009).



2011

2012

今日のトピック

今日:複数の凸多面体が折れる展開図の研究

- 展開図と立体のとても悩ましい関係:最大の未解決問題
- 与えられた「展開図」を折って作れる(凸)「立体」

明日:「折り」のアルゴリズムと計算量の関係

- 折り紙の基本操作
- 折り紙のアルゴリズムと計算量
  - 1次元の紙における効率のよい折り方(アルゴリズムと計算量)
  - 1次元の紙における計算不能性(計算の理論)

(辺)展開図とは？

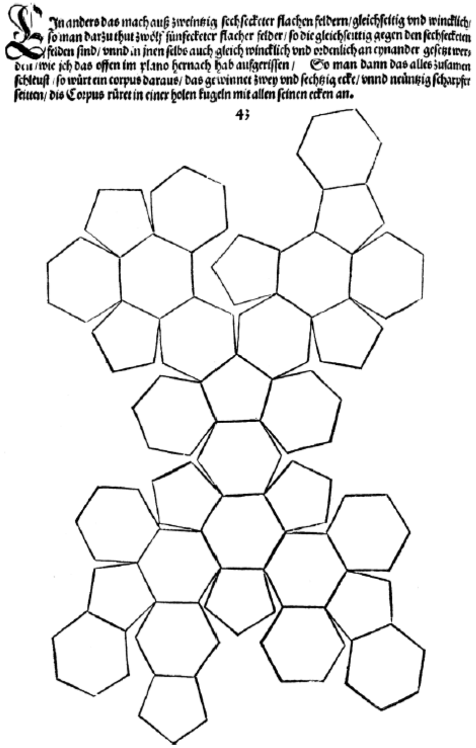
- (一般)展開図:多面体の表面を切って平面上に広げた多角形
  - 連結であること
  - 重なりを持たない単純多角形であること(便宜上、直線の集まりとする)

- (辺)展開図:多面体の辺に沿って切り広げた多角形
  - 展開の境界部分は多面体の辺からなる

★今日は「展開図」といえば一般の展開図という意味なので注意

展開図の簡単な歴史

- アルブレフト･デューラーの『画家マニュアル』(1525)



Ein anders das mach auß zweintzig sechseckheter flachen feldern/ gleichseitig vnd winckelich/ so man darzu thut zwölff fünfeckheter flacher felder/ so die gleichseittig gegen den sechseckheten felden sind/ vnnd in jnen selbs auch gleich winckelich vnd ordenlich an eynander gesetzt werden/ wie ich das offen im plano hernach hab aufgerissen/ So man dann das alles zusamen schleust/ so würt ein corpus daraus/ das gewinnet zwey vnd sechtzig ecke/ vnnd neüntzig scharpffer seitten/ dis Corpus rüret in einer holen kugeln mit allen seinen ecken an.

43

- 数多くの立体を辺展開図で記述していた
- どうも以下の成立を予想していた…?

未解決予想:
任意の凸多面体は辺展開図を持つ

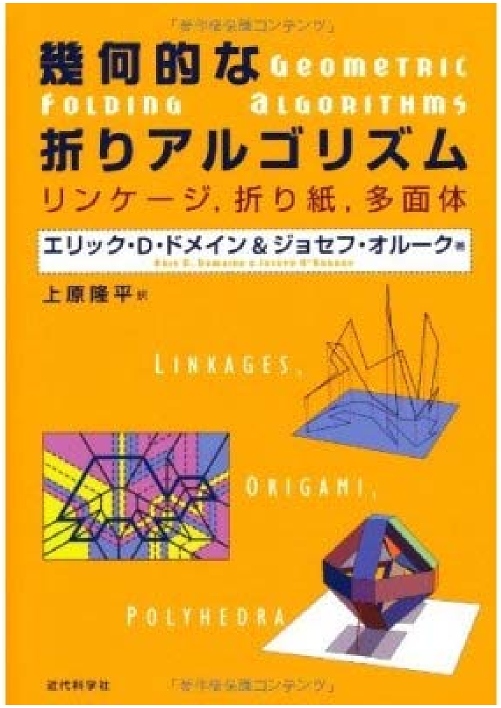
展開図の簡単な歴史

未解決予想：
任意の凸多面体は辺展開図を持つ

（今日はやらない）未解決予想の周辺の結果：

- 反例らしいものすら見つかっていない（当然？）
- 凹多面体なら反例がある
  （どんな辺展開も重なってしまう）
- 辺展開でなく一般展開なら可能
  （一般の点から各頂点に最短路を描いて切るという方法）
- ランダムな凸多面体をランダムに展開すると
  実験的にはほぼ確率１で重なってしまう

まとめ：<u>展開図に関してわかっていることは、ほとんどない</u>



もし興味があれば…

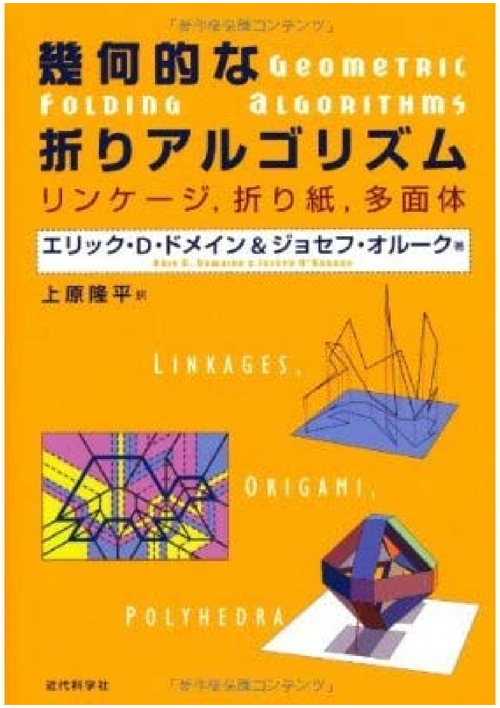
展開図の簡単な歴史

未解決予想:
任意の凸多面体は辺展開図を持つ

まとめ: 展開図に関してわかっていることは、
ほとんどない

本研究の興味の対象:

- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる（凸）多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- （凸）多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム



もし興味があれば…

展開図の簡単な歴史

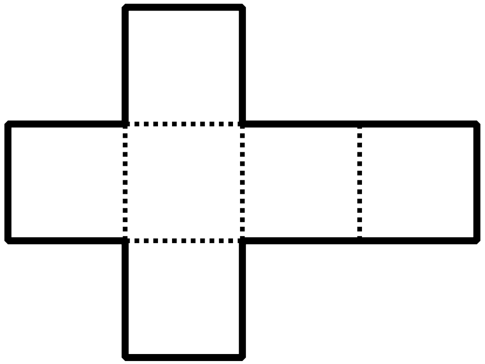
ポイント: 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

本研究の興味の対象:

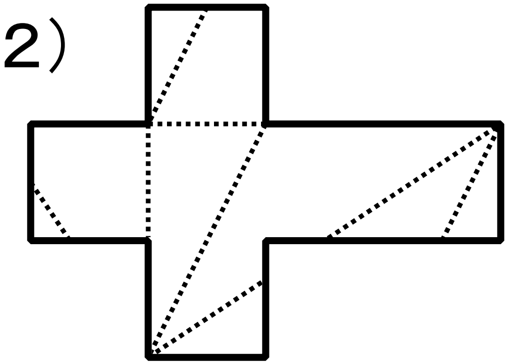
- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる（凸）多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- （凸）多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム

演習問題: 何が折れるでしょう？

（1）



（2）



ちなみにこの「ラテンクロス」からは85通りで23種類の異なる凸多面体が折れることが知られている.

今日の予定

1. <u>展開図の基礎的な知識</u>

1. 正多面体の共通の展開図

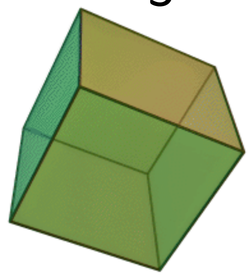
１時間目～２時間目

2. ペタル型の紙で折るピラミッド型：２時間目～３時間目

3. 複数の箱が折れる共通の展開図：３時間目

1. 展開図の基礎知識(1)

S

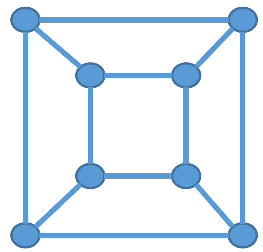


凸多面体Sの頂点と辺から構成されるグラフをGとする

[全域木定理(その1)]
Sの<u>辺展開</u>におけるカットラインは、G上の全域木である

系:すべての辺展開においてカットの長さは同じ

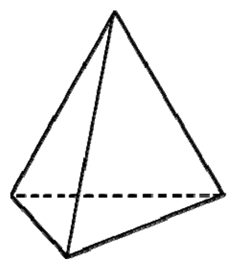
G



[証明]
- すべての点を訪れること:
  カットされない頂点があると、平坦に開けない
- 閉路をもたないこと:
  閉路があると、展開図がばらばらになってしまうため、連結にならない

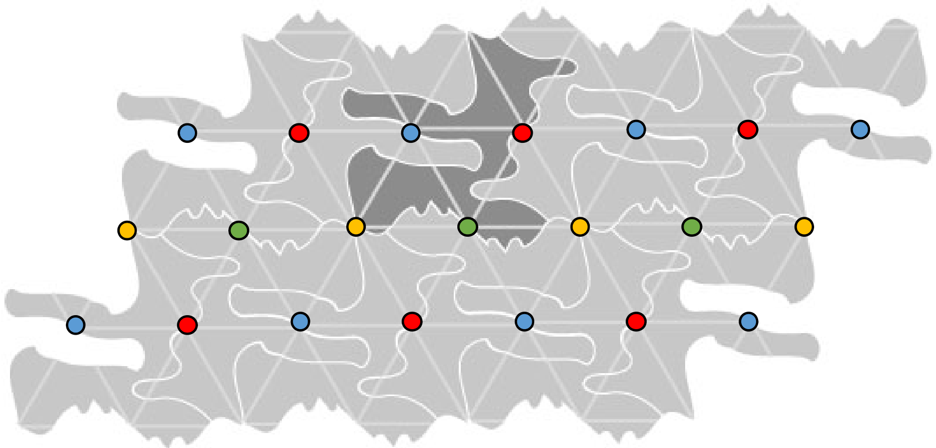
[全域木定理(その2)]
Sの<u>一般展開</u>におけるカットラインは、S上ですべての頂点を張る木である

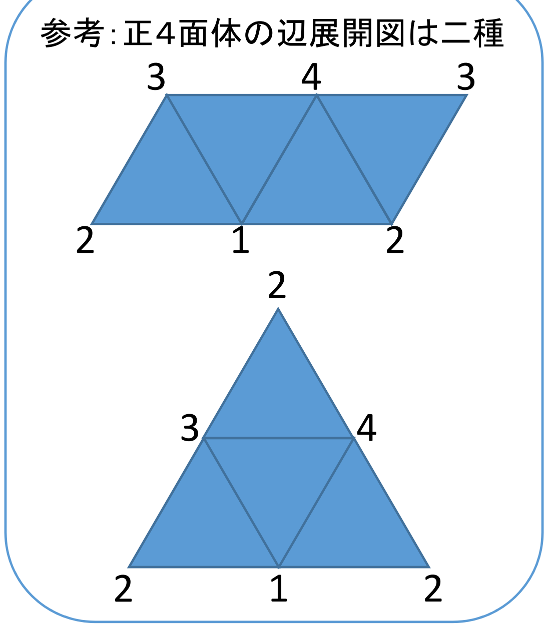
1. 展開図の基礎知識(2)



正4面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

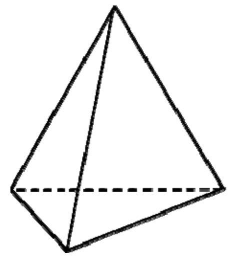
[正4面体の展開図定理(秋山 2007)]
正4面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。
(1) **P** は **p2 タイリング。**つまり180° 回転で敷詰め可能
(2) **回転中心**の **4** 頂点が正三角格子をなす
(3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない





1. 展開図の基礎知識(2)

P



正4面体の（一般）展開図に関する特徴づけ

[正4面体の展開図定理(秋山 2007)]
正4面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。
(1) **P** は **p2 タイリング。**つまり180° 回転で敷詰め可能
(2) **回転中心**の **4** 頂点が正三角格子をなす
(3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

Tile-Makers and Semi-Tile Makers, Jin Akiyama, *The Mathematical Association of America*, Monthly 114, pp. 602-609, 2007.

[直感的な説明]
平面上で正４面体を４回、
上手に転がすと、元に戻る。
各面にインクをつけて転がすと
平面全体にスタンプを押せる。

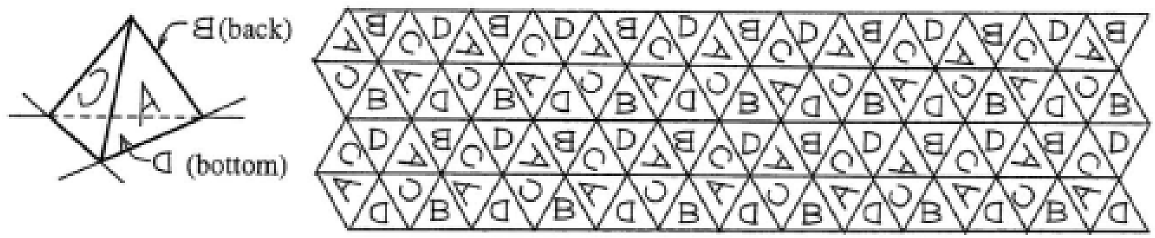
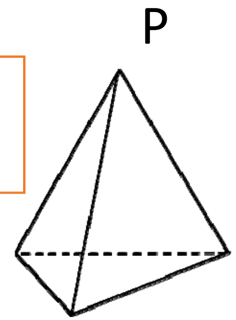


Figure 2.1. Carved regular tetrahedron R and the tiling by stamping with *R*.

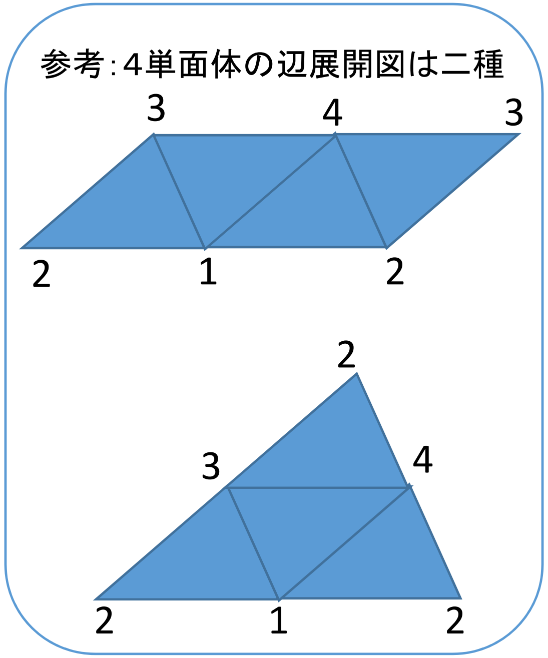
1. 展開図の基礎知識(3)

4単面体(Tetramonohedron):
4つの面が合同な4面体



4単面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

[4単面体の展開図定理(秋山、奈良 2007)]
4単面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。
(1) **P** は **p2 タイリング。**つまり180° 回転で敷詰め可能
(2) **回転中心**の **4** 頂点がその単面による三角格子をなす
(3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない



[直感的な説明]
正三角形を全体にゆがませればよい。

1. 展開図の基礎知識：演習問題

正多面体の一般展開図の最短カットの長さは？

- 正4面体にはわりと美しい最適解があります
  - 最適解とその証明ができればなおよし
- 正8面体と正6面体
  - 最適解を見つけるのは、なんとかなると思う
  - 最適性を示すのは、手間がかかります
- 正20面体と正12面体
  - 最適解を見つけるのはちょっと大変かも