I216 Computational Complexity and Discrete Mathematics

by
Prof. Ryuhei Uehara
and
Prof. Atsuko Miyaji

I216 計算量の理論と離散数学

上原隆平、宮地充子

Computational Complexity

- Goal 1:
  - *"Computable Function/Problem/Language/Set"*

- Goal 2:
  - How can you show "*Difficulty of Problem*"
    - There are *intractable* problems even if they are computable!
      - because they require too many resources (time/space)!
    - Technical terms;

      The class NP, P≠NP conjecture, NP-hardness, reduction

計算量の理論

- ゴール1:
  - “計算可能な*関数/問題/言語/集合*”

- ゴール2:
  - 「問題の困難さ」を示す方法を学ぶ
    - 計算可能な問題であっても、*手におえない*場合がある！
      - 計算に必要な資源（時間・領域）が多すぎるとき
    - 関連する専門用語;

      クラスNP, P≠NP予想, NP困難性, 還元

5. Computational Complexity

5.0. Overview

- “Computable?”

➔How much cost is required for computation?

– Computational Complexity Theory

1. Studies on upper bound of computational cost
2. Studies on lower bound of computational cost
3. Structural studies on hardness of computation

5. 計算量の理論

5.0. 概要

- 「計算可能」

➔計算にどのくらいの資源(コスト)が必要か？

– 計算量の理論

1. 計算量の上界の研究
2. 計算量の下界の研究
3. 計算の困難性の階層構造の研究

5. Computational Complexity

5.0.1. **Studies on upper bound of computational cost**

Algorithm Theory: design of efficient algorithms

- Suppose we have an algorithm *A* which solves a problem *X* in at most time $T(n)$ for any input of size n.
- Then, an upper bound on the time complexity of the algorithm *A* is $T(n)$.

  [asymptotic worst case time complexity]

5.計算量の理論

5.0.1. 計算量の上界の研究

アルゴリズム論: 効率の良いアルゴリズムの設計

- アルゴリズム A が問題 X を大きさ n のどんな入力に対しても高々 $T(n)$ 時間で解けるとする.
- このとき，アルゴリズム A の時間計算量の上界は $T(n)$ である.

  [最悪な場合の漸近的な時間計算量]

5. Computational Complexity

5.0.2. **Studies on lower bound of computational cost**

If *any* algorithm for a problem *X* takes time $T(n)$ in the worst case, a lower bound on the time complexity of the problem *X* is $T(n)$.

- P ≠NP conjecture
- Robustness of crypto system

5.0.3. **Structural studies on hardness of computation**

Studies to characterize hardness in the level of "*xx*-hardness" hierarchical structure depending on the hardness

5.計算量の理論

5.0.2. 計算量の下界の研究

問題Xに対するどんなアルゴリズムも最悪の場合$T(n)$時間かかるとき，問題Xの時間計算量の下界は$T(n)$である.

- P ≠NP 予想
- 暗号システムの頑健性

5.0.3. 計算の困難性の階層構造の研究

問題の困難性に関する概念「xx困難性」の階層構造の特徴付けを研究する

5. Computational Complexity

5.1. Measuring Computation Time

5.1.1. Time complexity of a Turing machine

Definition:

Let *M* be a (deterministic) Turing machine that halts on all inputs.

The *running time* or *time complexity* of *M* is the function $f:\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N}$ s.t.

f(n) is the maximum number of steps of *M(x)* for all *x* of length *n*

In the case,

- we say that *M* runs in time *f(n)*
- *M* is an *f(n)* time Turing machine

We need further *tools* to estimate/compare algorithms

[Note]

- *f(n)* takes the maximum for all strings of length *n* (worst case complexity)
- usually, *f(n)* may be monotone increasing function, but…?

5.計算量の理論

5.1. 計算時間の評価

5.1.1. チューリングマシンの時間計算量

定義: どんな入力に対しても停止する(決定性)チューリングマシンをMとする. このときMの**実行時間**または**時間計算量**は以下を満たす関数 f:N→N である:

$f(n)$ は長さnのすべての入力xに対する$M(x)$のステップ数の最大値

このとき,
- Mの実行時間は $f(n)$時間
- Mは$f(n)$時間チューリングマシンという

アルゴリズムを評価/比較するためにはさらなる道具が必要.

[注意]
- $f(n)$ は長さnの文字列すべてに対する最大値をとっている (最悪の場合の実行時間)
- 通常, $f(n)$ は単調増加関数だが…?

5. Computational Complexity

5 minutes exercise:
Show one of three in Ex. 2.

5.1. Measuring Computation Time

5.1.2. Big-O notation

Definition: For functions f and g on natural numbers, if
$\exists c, n_0 > 0,\ \forall n \geqq n_0\ [f(n) \leqq c\, g(n)]$
then we say $f(n)$ is in the order of $g(n)$ and denote it by $f(n) = O(g(n))$.

Remark: the constants c and n_0 must be determined independently of n.

Ex. 1: The followings hold for any functions f, g and h on natural numbers:
1. $\forall n[\, f(n) \leqq g(n)] \rightarrow f(n) = O(g(n))$
2. $[\, f(n) = O(g)$ and $g(n) = O(h(n))] \rightarrow f(n) = O(h(n))$

Ex. 2: Prove the following:
1. $5n^3+4n^2+n=O(n^3)$
2. $5n^3+4n^2+n=O(n^4)$
3. $5n^3+4n^2+n\neq O(n^2)$

[Comment] Some people write as $f(n) \in O(g(n))$

5.計算量の理論

5.1.計算時間の評価

5.1.2. O記法

定義: 自然数上の関数 f と g に対し,
$\exists c, n_0 > 0, \forall n \geqq n_0 \ [f(n) \leqq c\, g(n)]$
が成立するなら, $f(n)$ は <u>オーダー $g(n)$</u> の関数といい, $f(n) = O(g(n))$ と書く.

<u>注意</u>: 定数 c と n_0 は n とは<u>独立に</u>決められる必要がある.

例1: 自然数上の任意の関数 f, g, h に対して以下が成立:
1. $\forall n[\, f(n) \leqq g(n)] \rightarrow f(n) = O(g(n))$
2. $[\, f(n) = O(g)$ and $g(n) = O(h(n))] \rightarrow f(n) = O(h(n))$

例2: 以下を示せ:
1. $5n^3+4n^2+n=O(n^3)$
2. $5n^3+4n^2+n=O(n^4)$
3. $5n^3+4n^2+n \neq O(n^2)$

[コメント] $f(n) \in O(g(n))$ と書く人もいる

5. Computational Complexity

5.1. Measuring Computation Time

5.1.3. Time complexity of a problem

Definition: Let Φ be a computing problem and $f(n)$ be a function over natural numbers. If we have a program A to compute Φ that runs in time $f(n)$ such that

$\exists c, n_0>0, \forall n \geqq n_0 [f(n) \leqq c\, g(n)]$

then we say that Φ is computable in $O(g(n))$ time, or time complexity of Φ is $O(g(n))$.

Remark: the constants c and n_0 must be determined independently of n.

Intuitively,

"problem Φ is computable within time $f(n)$" means

- time complexity of A may be less than $f(n)$.
- there may be a faster program to compute Φ than A does.

It only gives **an upper bound** of the complexity of the problem.

Our analysis may be improved

Better algorithm may be found

5.計算量の理論

5.1.計算時間の評価

5.1.3. 問題の時間計算量

定義: Φ を計算問題, $f(n)$ を自然数上の関数とする.
Φ を計算するプログラムA が $f(n)$ 時間で動作して以下を満たすとする.
$\exists c, n_0>0, \forall n \geqq n_0 \, [\, f(n) \leqq c\, g(n)]$
このとき Φ は $O(g(n))$ 時間で計算可能, または Φの時間計算量は$O(g(n))$である.

注意: 定数 c と n_0 はn とは独立に決められる必要がある.

直観的には,
「問題 Φ が $f(n)$時間で計算可能」というとき,
・A の時間計算量は$f(n)$より小さいかもしれない
・A よりも速く Φ を計算するアルゴリズムがあるかもしれない
問題の複雑さに関する上界を与えているにすぎない

解析を改善できるかもしれない

より速いアルゴリズムが
見つかるかもしれない

5.*. Column: A history of the PRIME problem

PRIME
Input : a natural number n (binary representation)
Question: Is n prime?
PRIME $\equiv$ {n : n is prime}={2,3,5,7,11,13,17,...}

Stirling's Formula :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```
program Naive(input n);
begin
  for each i:= 1 < i < n do
     if n mod i = 0 then reject end-if
  end-for;
  accept
end.
```

try to divide by numbers between 2～n-1

log n · log i time

$O(l^6)$ time algorithm was developed in 2002!!

$$\text{running time} \le \sum_{1<i<n}(c\log n \log i + d)$$
$$= c\log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2)$$

When the length of n is l, l is approximately log n. So, the running time is $O(l^2 2^l)$.
Thus, time complexity of PRIME is $O(l^2 2^l)$.

5.*. 素数判定問題の歴史

PRIME
入力: 自然数 n (2進数で表現)
質問: n は素数か？
PRIME $=\{n : n$ は素数$\}=\{2,3,5,7,11,13,17,\ldots\}$

スターリングの公式:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```
program Naive(input n);
begin
  for each i:= 1 < i < n do
     if n mod i = 0 then reject end-if
  end-for;
  accept
end.
```

2〜n-1までのすべての数で実際に割ってみる

log n・log i time

$O(l^6)$時間アルゴリズムが2002年に開発された!!

$$\text{実行時間} \le \sum_{1<i<n}(c\log n\ \log i + d)$$
$$= c\log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2)$$

自然数 n を表現した文字列の長さを l とすると，l はおおよそ log nである.
したがって実行時間は $O(l^2 2^l)$ である.
よって PRIME の時間計算量は $O(l^2 2^l)$.である.

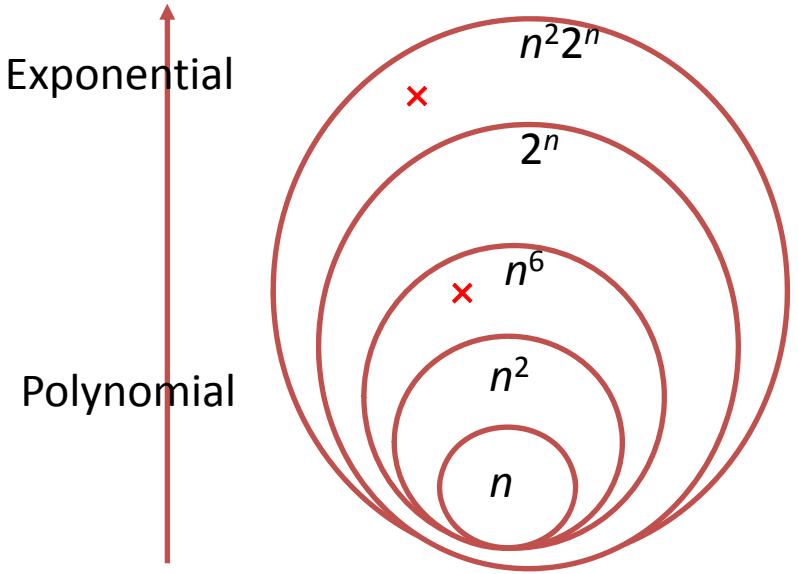
5. Computational Complexity

5.1. Time Complexity Classes

5.1.3. Time complexity of a problem

Definition: For a function $t(n)$ over natural numbers, the set of all sets (i.e. recognition problems) with time complexities $O(t(n))$ is called **$O(t(n))$-time complexity class**, and it is denoted by TIME($t(n)$). Such a function $t(n)$ is called a time limit.

Ex. 1 PRIME was in TIME($n^2 2^n$),
but now it is in TIME(n^6).



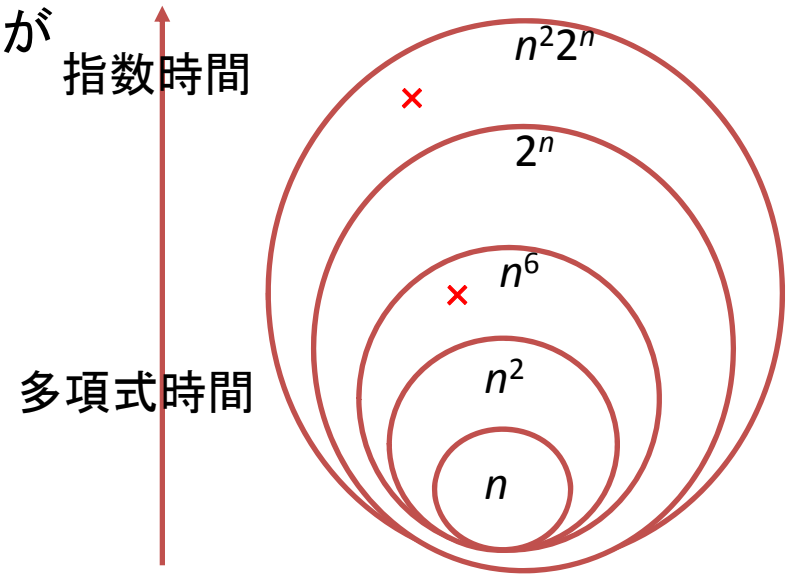
5.計算量の理論

5.1.計算時間の評価

5.1.3.問題の時間計算量

定義: 自然数上の関数 $t(n)$ に対して，時間計算量 $O(t(n))$ の集合(認識問題)全体の集合を **$O(t(n))$時間計算量クラス** とよび，TIME($t(n)$) とかく．こうした関数 $t(n)$ は制限時間と呼ぶ．

例1 PRIME は TIME($n^2 2^n$) の要素であったが
今は TIME(n^6) の要素．



5. Computational Complexity

5.1. Time Complexity Classes

5.1.3. Time complexity of a problem

Definition: For a function $t(n)$ over natural numbers, the set of all sets (i.e. recognition problems) with time complexities $O(t(n))$ is called **$O(t(n))$-time complexity class**, and it is denoted by TIME($t(n)$). Such a function $t(n)$ is called a time limit.

5.2. Representative time complexity classes

$$\mathrm{P} \equiv \bigcup_{p:\text{polynomial}} \mathrm{TIME}(p(l))$$

$$\mathrm{E} \equiv \bigcup_{c>1} \mathrm{TIME}(2^{cl})$$

$$\mathrm{EXP} \equiv \bigcup_{p:\text{polynomial}} \mathrm{TIME}(2^{p(l)})$$

C set : set in the complexity class C.
C problem : problem of recognizing a C set.

Problems not in P are intractable from the practical viewpoint…

5.計算量の理論

5.1.計算時間の評価

5.1.3.問題の時間計算量

定義: 自然数上の関数 $t(n)$ に対して，時間計算量 $O(t(n))$ の集合(認識問題)全体の集合を **$O(t(n))$時間計算量クラス** とよび，TIME($t(n)$) とかく．こうした関数 $t(n)$ は制限時間と呼ぶ．

5.2.代表的な計算量クラス

$$\mathrm{P} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(p(l))$$

$$\mathrm{E} \equiv \bigcup_{c>1} \mathrm{TIME}(2^{cl})$$

$$\mathrm{EXP} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(2^{p(l)})$$

C集合： 計算量クラスCに入る集合．
C問題： C集合の認識問題

ある問題がPに入っていないなら、現実的には手に負えない…

Ex.5.1: Polynomial makes no serious difference in the classes P, E, EXP.

P: polynomial × polynomial→polynomial

E: linear power of 2 × polynomial → linear power of 2

EXP: poly. power of 2 × poly. → poly. power of 2

Ex.5.2: Complexity class of PRIME

Ex.4.7 → PRIME ∈ TIME(2^l)

Thus, PRIME ∈ E

$O(l^6)$time algorithm puts it into P!!

Def.5.1: T: set of time limits

$\bigcup_{t \in T}$TIME(t): T time complexity class

→It is denoted by TIME(T).

Theorem5.1 (1) $P = U_{c>0}TIME(l^c)$, (2) $EXP = U_{c>0}TIME(2^{l^c})$

例5.1: クラスP, E, EXPでは，多項式時間程度の違いは問題ではない.

P: 多項式 × 多項式→多項式

E: 2の線形乗 × 多項式 → 2の線形乗

EXP: 2の多項式乗 × 多項式 → 2の多項式乗

例5.2: PRIMEの計算量クラス

例4.7 → PRIME ∈ TIME(2^l)

故に， PRIME ∈ E

余談: 2002年に $O(l^6)$ のアルゴリズムが考案されたので、今ではP

定義5.1. T: 制限時間の集合

$\bigcup_{t \in T}$TIME(t): T時間計算量クラス

→これをTIME(T)と表す.

定理5.1: (1) P = $\cup_{c>0}$TIME(l^c), (2) EXP = $\cup_{c>0}$TIME(2^{l^c})

Theorem 5.1: (1) $P = \cup_{c>0} TIME(l^c)$, (2) $EXP = \cup_{c>0} TIME(2^{l^c})$

Proof: The proof of (2) is omitted.

T_1: set of polynomials of the form of l^c.

T_2: set of all polynomials

→ since $T_1 \subseteq T_2$, $TIME(T_1) \subseteq TIME(T_2)$

p: arbitrary polynomial (*p* is any element of T_2)

if the maximum degree of a polynomial *p* is *k*, $p(l) = O(l^k)$

Now, for any times t_1, t_2,

$t_1 = O(t_2)$ implies $TIME(t_1) \subseteq TIME(t_2)$

Therefore,

$TIME(p(l)) \subseteq TIME(l^k) \subseteq TIME(T_1)$

Therefore, $TIME(T_1) = TIME(T_2)$

Q.E.D.

定理5.1: (1) $P = \cup_{c>0} TIME(l^c)$, (2) $EXP = \cup_{c>0} TIME(2^{l^c})$

証明: (2)の証明は省略.

T_1: l^cという形の多項式の集合.

T_2: 多項式の全体

→ $T_1 \subseteq T_2$ なので, $TIME(T_1) \subseteq TIME(T_2)$

p: 任意の多項式 (pはT_2の任意の要素)

多項式pの最大次数をkとすると, $p(l) = O(l^k)$

ここで、すべての制限時間 t_1, t_2 に対し、

$t_1 = O(t_2)$ ならば $TIME(t_1) \subseteq TIME(t_2)$

したがって

$TIME(p(l)) \subseteq TIME(l^k) \subseteq TIME(T_1)$

よって $TIME(T_1) = TIME(T_2)$

証明終

5. Computational Complexity

5.2. Representative Time Complexity Classes

5.2.2. Representative problems and their complexity

5.2.2.1. Problem of evaluating propositional expression(PROP-EVAL)

Input : $<F, < a_1, a_2, \dots , a_n >>$

- F is an extended propositional expression
- $(a_1, a_2, \dots , a_n)$ is a truth assignment to F

Question : $F(a_1, a_2, \dots , a_n) = 1$?

(x,y)	$x \rightarrow y$ $(\neg x \vee y)$	$x \leftrightarrow y$ $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x))$
$(0,0)$	1	1
$(0,1)$	1	0
$(1,0)$	0	0
$(1,1)$	1	1

5.計算量の理論

5.2. 代表的な時間計算量クラス

5.2.2. 代表的な問題とその計算量

5.2.2.1. 命題論理式の評価 (PROP-EVAL)

入力 : $<F, < a_1, a_2, \dots , a_n >>$

- F は拡張命題論理式
- $(a_1, a_2, \dots , a_n)$ は F への真偽値割当て

質問 : $F(a_1, a_2, \dots , a_n) = 1$?

(x,y)	$x \rightarrow y$ $(\neg x \vee y)$	$x \leftrightarrow y$ $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x))$
$(0,0)$	1	1
$(0,1)$	1	0
$(1,0)$	0	0
$(1,1)$	1	1

5. Computational Complexity

5.2. Representative Time Complexity Classes

5.2.2. Representative problems and their complexity

5.2.2.1. Problem of evaluating propositional expression (PROP-EVAL)

Input : $<F, < a_1, a_2, \dots , a_n >>$

- F is an extended prop. expression
- $(a_1, a_2, \dots , a_n)$ is a truth assignment to F

Question : $F(a_1, a_2, \dots , a_n) = 1$?

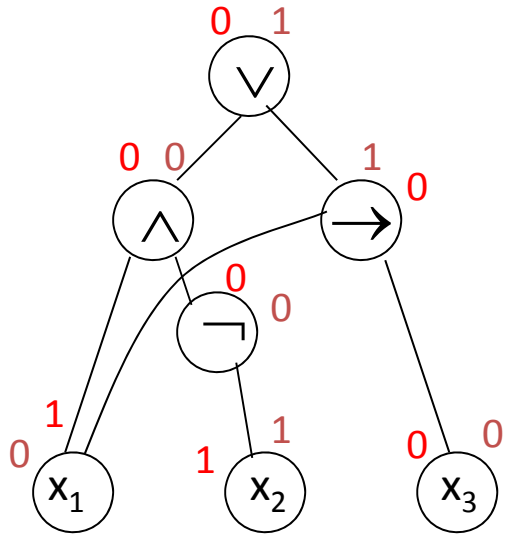
PROP-EVAL $\in$ P

Construct a *computation tree* from a code of F.
It is built in time $O(|F|^3)$.
Once computation tree is built,
we can easily obtain the value
$F(a_1, a_2, \dots , a_n)$ in a bottom-up fashion.

$F(0,1,0)=1$

$F(1,1,0)=0$

Ex. : $F(x_1, x_2 , x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \rightarrow x_3]$



computation tree

5.計算量の理論

5.2.代表的な時間計算量クラス

5.2.2.代表的な問題とその計算量

5.2.2.1.命題論理式の評価(PROP-EVAL)

入力 : $<F, < a_1, a_2, \dots, a_n >>$

- F は拡張命題論理式
- $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ は F への真偽値割当て

質問 : $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$?

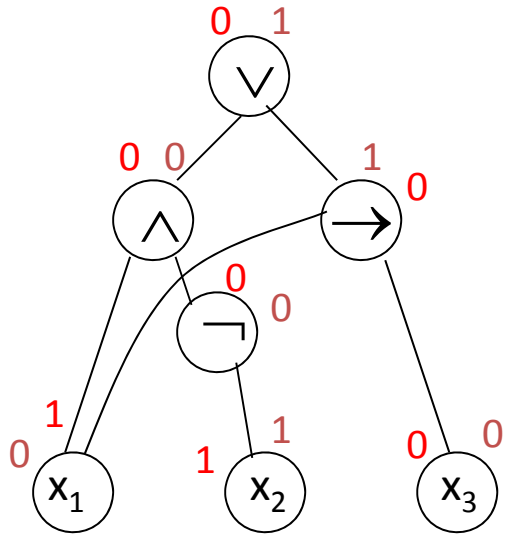
PROP-EVAL ∈ P

F のコードから<u>計算木</u>を作る.
構築に必要な時間は $O(|F|^3)$.
ひとたび計算木ができると,
ボトムアップに計算すると
$F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ の値は簡単に求まる.

$F(0,1,0)=1$

$F(1,1,0)=0$

Ex. : $F(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \rightarrow x_3]$



計算木

5. Computational Complexity

5.2. Representative Time Complexity Classes

5.2.2. Representative problems and their complexity

5.2.2.2. Satisfiability (SAT)

Input : <*F*> *F* is 2-conjunctive normal form

Question : Is there any assignment such that $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$?

Conjunctive Normal Form (CNF)

$F = (\bigcirc \vee \bigcirc \vee \dots \vee \bigcirc) \wedge (\bigcirc \vee \dots \vee \bigcirc) \wedge \dots \wedge (\dots)$

- described by $\wedge$ of $\vee$ of literals.

k SAT: Each closure contains *k* literals

exactly/at most

We can define 3SAT, 4SAT similarly.

SAT consists of any CNF.

ExSAT consists of any extended propositional expression.

5.計算量の理論

5.2.代表的な時間計算量クラス

5.2.2.代表的な問題とその計算量

5.2.2.2. 充足可能性 (SAT)

入力 : <*F*> *F* は 2-和積標準形

質問 : $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$とする真偽値割当てが存在するか？

和積標準形 (CNF)

$F = (\bigcirc \vee \bigcirc \vee \ldots \vee \bigcirc) \wedge (\bigcirc \vee \ldots \vee \bigcirc) \wedge \ldots \wedge (\ldots)$

- リテラルの∨の∧で表現される式

k SAT: 各項が *k* 個のリテラルを含む

ちょうど/たかだか

3SAT, 4SATも同様に定義できる.

SAT は任意の CNF を許す

ExSAT は拡張命題論理式（∨, ∧, →, ↔）を許す

5. Computational Complexity

5.2. Representative Time Complexity Classes

5.2.2. Representative problems and their complexity

5.2.2.3. Graph reachability problem (ST-CON)

Input : $\langle G,s,t \rangle$: an undirectd graph G, $1 \leqq s,t \leqq n(=|G|)$

Question : Does G have a path from s to t?

5.2.2.4. Euler cycle problem (DEULER)

Input : $\langle G \rangle$: a directed graph G

Question : Does G have an Euler cycle?

5.2.2.5 Hamiltonian cycle problem (DHAM)

Input : $\langle G \rangle$: a directed graph G

Question : Does G have a Hamiltonian cycle?

Actually,
directed/undirected
cycle/path
do not matter

- Cycle is a path that shares two endpoints.
- Euler cycle is a cycle that visits all edges once.
- Hamiltonian cycle is a cycle that visits all vertices once.

5.計算量の理論

5.2.代表的な時間計算量クラス

5.2.2.代表的な問題とその計算量

5.2.2.3. グラフの到達可能性問題 (ST-CON)
入力 : $\langle G,s,t\rangle$: 無向グラフ G, $1 \leqq s,t \leqq n(=|G|)$
質問 : G は s から t への経路を持つか？

5.2.2.4. オイラー閉路問題 (DEULER)
入力 : $\langle G\rangle$: 有向グラフ G
質問 : G はオイラー閉路を持つか？

5.2.2.5 ハミルトン閉路問題 (DHAM)
入力 : $\langle G\rangle$: 有向グラフG
質問 : G はハミルトン閉路を持つか？

実際には,
有向/無向
閉路/パス
という違いは問題にならない

- 閉路とは両端点を共有する経路.
- オイラー閉路とはすべての辺をちょうど一回通る閉路.
- ハミルトン閉路とはすべての頂点をちょうど一回通る閉路.

5. Computational Complexity

5.2. Representative Time Complexity Classes

5.2.2. Representative problems and their complexity

It is known that :

- The following problems are in P :
  - ✓PROP-EVAL, 2SAT, ST-CON, DEULER
- The following problems are in E, but…
  - ✓3SAT, DHAM

The class NP between P and E?

5.計算量の理論

5.2.代表的な時間計算量クラス

5.2.2.代表的な問題とその計算量

以下は既知：

- 以下の問題はPの要素：
  - ✓PROP-EVAL, 2SAT, ST-CON, DEULER
- 以下の問題はEの要素だが…
  - ✓3SAT, DHAM

PとEの間(?)にあるクラスNP