I216 Computational Complexity and Discrete Mathematics

by
Prof. Ryuhei Uehara
and
Prof. Atsuko Miyaji

I216 計算量の理論と離散数学

上原隆平、宮地充子

Computational Complexity

- Goal 1:
  - *"Computable Function/Problem/Language/Set"*

- Goal 2:
  - How can you show "*Difficulty of Problem*"
    - There are *intractable* problems even if they are computable!
      - because they require too many resources (time/space)!
    - Technical terms;

      The class NP, P≠NP conjecture, NP-hardness, reduction

計算量の理論

- ゴール1:
  - *“計算可能な関数/問題/言語/集合”*

- ゴール2:
  - 「問題の困難さ」を示す方法を学ぶ
    - 計算可能な問題であっても、*手におえない*場合がある！
      - 計算に必要な資源（時間・領域）が多すぎるとき
    - 関連する専門用語;

      クラスNP, P≠NP予想, NP困難性, 還元

5. Computational Complexity

- Observation of the classes

Definition: Class P
Set L is in the class P ⇔
There exists a poly-time computable predicate R such that
for each $x \in \Sigma^*$, $x \in L \Leftrightarrow R(x)$

Definition: Class NP
Set L is in the class NP ⇔
There exists a poly q and a poly-time computable predicate R such that
for each $x \in \Sigma^*$, $x \in L \Leftrightarrow \exists w \in \Sigma^* : |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

Definition: Class coNP
Set L is in the class coNP ⇔
There exists a poly q and a poly-time computable predicate R such that
for each $x \in \Sigma^*$, $x \in L \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

5.計算量の理論

- **計算量クラスの定義を概観すると…**

クラスPの定義
集合LがクラスPに入る ⇔
以下を満たす多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow R(x)$

クラスNPの定義
集合LがクラスNPに入る ⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow \exists w \in \Sigma^* : |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

クラスcoNPの定義
集合LがクラスcoNPに入る ⇔
以下を満たす多項式qと多項式時間計算可能述語Rが存在:
各 $x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : |w| \leqq q(|x|)[R(x,w)]$

5. Computational Complexity

5.5. Relations in the Complexity Classes

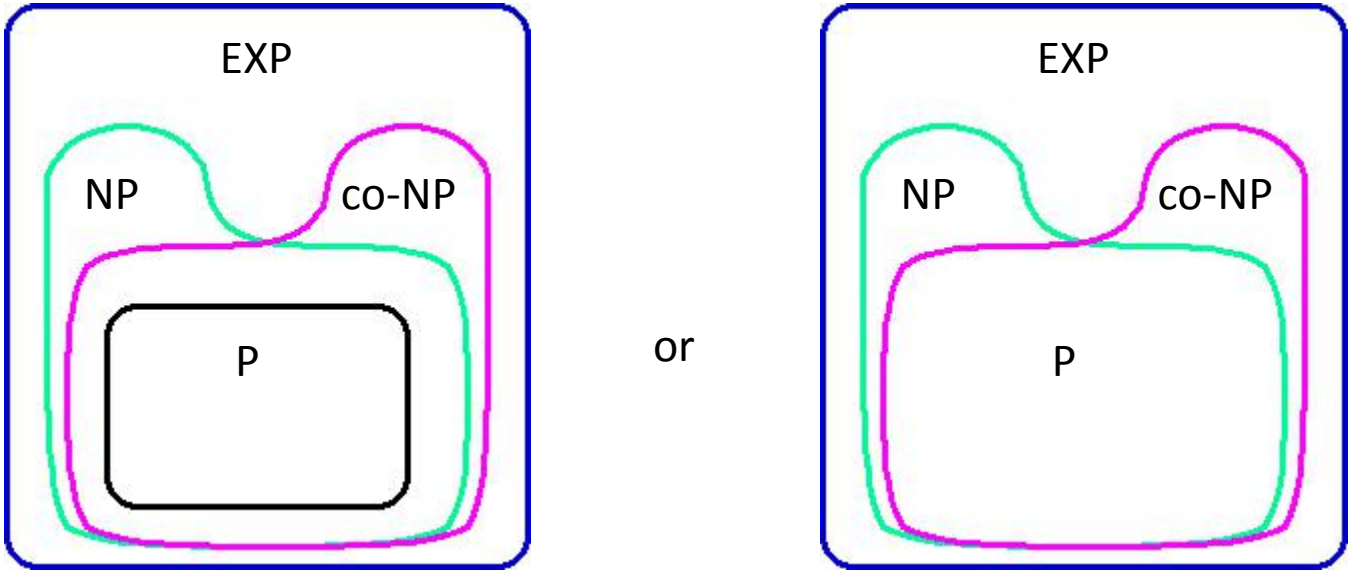
Theorem

(1) NP ⊆ coNP → NP = coNP

(2) coNP ⊆ NP → NP = coNP

(3) NP ≠ coNP → P ≠ NP

We strongly believe that P ≠ NP, and then we have

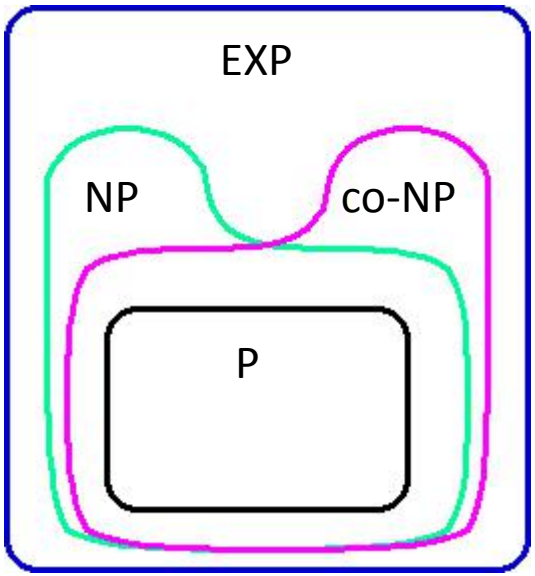


5.計算量の理論

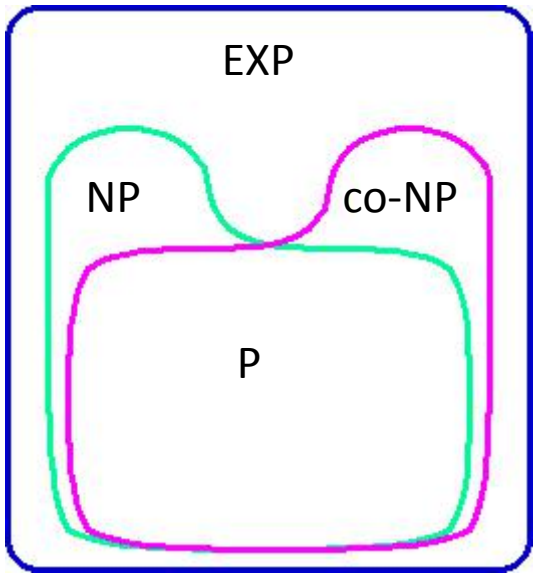
5.5. 計算量クラスの関係

定理
(1) NP ⊆ coNP → NP = coNP
(2) coNP ⊆ NP → NP = coNP
(3) NP ≠ coNP → P ≠ NP

P≠ NPが成立すると強く信じられているので,
以下の構造になっていると予想される.



または



6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Definition

Let *A* and *B* be arbitrary sets.

(1) function h: $A \rightarrow B$: polynomial-time reduction

$\Leftrightarrow$
- (a) h is a total function from Σ^* onto Σ^*
- (b) $x \in \Sigma^* [x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
- (c) h is polynomial-time computable.

(2) When there is a poly-time reduction from *A* to *B*, we say *A* is polynomial-time reducible to *B*.
Then, we denote by $A \leq_m^P B$

(…within polynomial time, hardness of *A* $\leqq$ that of *B*)

6. 多項式時間計算可能性の解析手法

6.1. 多項式時間還元可能性

定義

A と B を任意の集合とする.

(1) 関数 $h: A \to B$ が多項式時間還元である

$\Leftrightarrow$
- (a) h は Σ^* から Σ^* への全域関数である
- (b) $x \in \Sigma^* [x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
- (c) h は多項式時間計算可能である.

(2) A から B への多項式時間還元が存在するとき

A は B へ多項式時間還元可能であるといい,

$A \leq_m^P B$ とかく.

(…多項式時間程度の差を無視すれば，A の難しさ≦ B の難しさ)

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Theorem *A, B, C*: arbitrary sets

(1) $A \leq_m^P A$

(2) $A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P C \rightarrow A \leq_m^P C$

Definition

$$A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P A$$

$\equiv_m^P$ is an equivalence relation.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.1.多項式時間還元可能性

定理 *A, B, C*を任意の集合とする.

(1) $A \leq_m^P A$

(2) $A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P C \rightarrow A \leq_m^P C$

定義

$A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P A$

$\equiv_m^P$ は同値関係.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Theorem

(1) $2\mathrm{SAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{ExSAT}$

(2) $3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

Proof

(1) we have some proofs depending on definition:

(a) each instance of 2SAT is also in 3SAT if the definition is “at most 3 literals in a clause”.

(b) each clause $(x \vee y)$ can be replaced by $(x \vee y \vee y)$.

(c) each clause $(x \vee y)$ can be replaced by $(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$.

In any case, they are poly-time reduction, and the original formula is satisfiable iff so is the resulting formula.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.1.多項式時間還元可能性

定理

(1) $2\mathrm{SAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{ExSAT}$

(2) $3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

証明

(1) 定義によっていくつかの証明が考えられる:

(a) 定義が「各項に高々3リテラル」の場合は，2SATの入力は3SATの入力としても有効なので，特に示すことはない.

(b) 各項 $(x \vee y)$ を単に $(x \vee y \vee y)$ で置き換えればよい.

(c) 各項 $(x \vee y)$ に対して新しい変数を導入して

$(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$

と置き換えてもよい.

どの場合も多項式時間還元で，元の論理式が充足可能である必要十分条件は，新しい式が充足可能であること.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Theorem

(1) $\mathrm{2SAT} \leq_m^P \mathrm{3SAT} \leq_m^P \mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{ExSAT}$

(2) $\mathrm{3SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

Proof (Outline)

(2) It is sufficient to show that $\mathrm{ExSAT} \leq_m^P \mathrm{3SAT}$ by (1).

Strategy:

For any given *F* in ExSAT, we construct another *F'* in 3SAT such that *F* is satisfiable iff *F'* is satisfiable.

To do that, we first construct the computation tree of *F*, and construct *F'* that represents the computation process of *F*.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.1.多項式時間還元可能性

定理

(1) $\mathrm{2SAT} \leq_m^P \mathrm{3SAT} \leq_m^P \mathrm{SAT} \leq_m^P \mathrm{ExSAT}$

(2) $\mathrm{3SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

証明 (概略)

(2) (1)より，$\mathrm{ExSAT} \leq_m^P \mathrm{3SAT}$ が成立することを示せばよい.

基本戦略:

ExSATの式 *F* が与えられたら，それに基づいて3SATの式*F'* を構成する. ただしここで*F*が充足可能である必要十分条件が*F'*が充足可能であるようにする. そのために，まず*F*の計算木を構築し，次に*F*の計算手順を表現する論理式*F'*を構築する.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

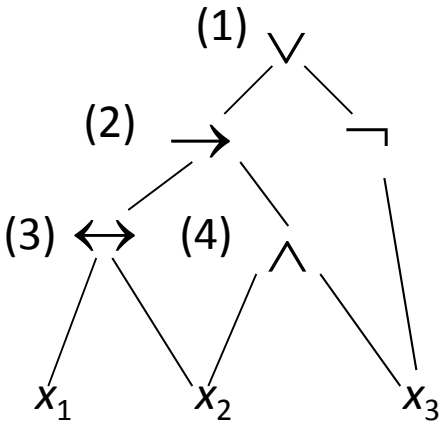
Theorem (2) $3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

Proof (Outline)

(2) It is sufficient to show that $\mathrm{ExSAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT}$ by (1).

Reduction from ExSAT to 3SAT by an example:

$$F(x_1, x_2, x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \rightarrow [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$



$$(1) V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$$

$$(2) V_2 \equiv [V_3 \rightarrow V_4]$$

$$(3) V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$$

$$(4) V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$$

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.1.多項式時間還元可能性

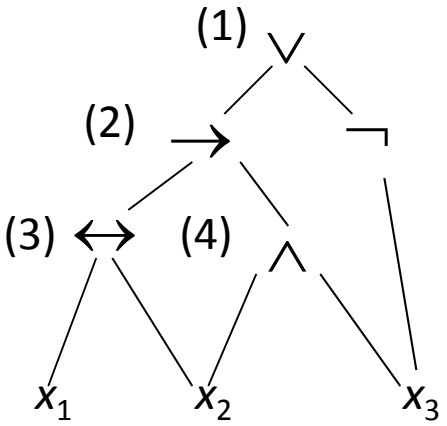
定理 (2) $3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

証明 (概略)

(2) $\mathrm{ExSAT} \leq_m^P 3\mathrm{SAT}$ が成立することを示せばよい.

ExSAT から 3SAT への還元を例で示す:

$$F(x_1, x_2, x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \rightarrow [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$



$$(1) V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$$

$$(2) V_2 \equiv [V_3 \rightarrow V_4]$$

$$(3) V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$$

$$(4) V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$$

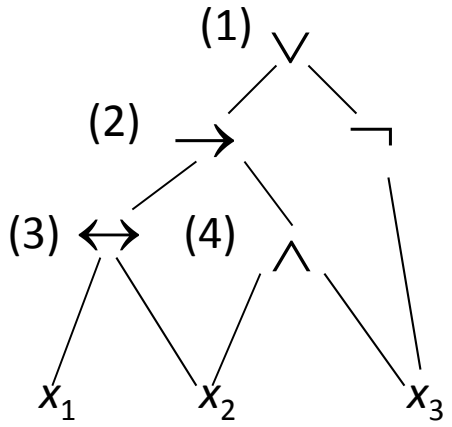
6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Theorem (2) $3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

Reduction from ExSAT to 3SAT by an example:

$$F(x_1, x_2, x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \rightarrow [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$



$$(1) V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$$
$$(2) V_2 \equiv [V_3 \rightarrow V_4]$$
$$(3) V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$$
$$(4) V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$$

$$F''(x_1, x_2, x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \rightarrow U_4]]$$
$$\wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

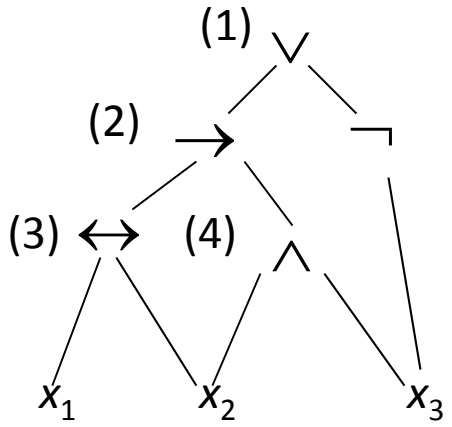
6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.1.多項式時間還元可能性

定理 (2) $3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

ExSAT から 3SAT への還元を例で示す:

$$F(x_1, x_2, x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \rightarrow [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$



$$(1) V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$$
$$(2) V_2 \equiv [V_3 \rightarrow V_4]$$
$$(3) V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$$
$$(4) V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$$

$$F''(x_1, x_2, x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \rightarrow U_4]]$$
$$\wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Theorem (2) $3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

Reduction from ExSAT to 3SAT by an example:

$$F''(x_1, x_2, x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \rightarrow U_4]] \wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

Then, by constriction, *F*() is satisfiable iff *F''*() is satisfiable.
We show *F''*() can be represented by an equivalent *F'*() in 3SAT.

$$\begin{aligned} U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg [U_2 \vee \neg x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2] \end{aligned}$$

The other cases are similar, and *F'*() is in 3SAT.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.1. 多項式時間還元可能性

定理 (2) $3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

ExSAT から 3SAT への還元を例で示す:

$$F''(x_1, x_2, x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \rightarrow U_4]] \wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

このとき構成から，*F*() は充足可能⇔*F''*()は充足可能.
F''() をこれと同値な3SATの要素 *F'*() で表現する.

$$\begin{aligned} U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg [U_2 \vee \neg x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2] \end{aligned}$$

他のケースも同様に変形でき，*F'*() は3SATの要素となる.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

6.2.1. Definition and basic properties

Definition

For a class C, if a set A satisfies

(a) $\forall L \in \mathrm{C}\ [L \leq_m^P A]$,

the set A is called C-hard (under $\leq_m^P$).

Moreover, if we have

(b) $A \in \mathrm{C}$,

then A is called C-complete.

Ex. Examples of NP-complete sets

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VC, etc.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.2.完全性

6.2.1. 定義と基本性質

定義

クラスCに対して，集合Aが次を満たすとき

(a) $\forall L \in \mathrm{C}\ [L \leq_m^P A]$

集合 A は($\leq_m^P$のもとで) C困難であるという.

さらに次を満たすなら

(b) $A \in \mathrm{C}$

A はC完全であるという.

例. NP完全集合の例

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VC など

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

6.2.1. Definition and basic properties

Theorem. For any C-hard (or C-complete) set A,

(1) $A \in \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq P$ CP: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{P} \rightarrow A \notin \mathrm{P}$

(2) $A \in \mathrm{NP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq NP$ CP: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{NP} \rightarrow A \notin \mathrm{NP}$

(3) $A \in \mathrm{coNP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq coNP$ CP: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{coNP} \rightarrow A \notin \mathrm{coNP}$

(4) $A \in \mathrm{EXP} \rightarrow \mathrm{C} \subseteq EXP$ CP: $\mathrm{C} \not\subset \mathrm{EXP} \rightarrow A \notin \mathrm{EXP}$

Proof: CP: contraposition

(1) Let B be any C-set. Then, since A is C-hard,

$B \leq_m^P A$ and by the assumption $A \in \mathrm{P}$, we have $B \in \mathrm{P}$

(2), (3), (4) are similar.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.2.完全性

6.2.1.定義と基本性質

定理　C困難(またはC完全)な任意の集合Aに対して,

(1) $A \in$ P → C $\subseteq P$　　対偶: C$\not\subset$ P → $A \notin$P

(2) $A \in$ NP → C $\subseteq NP$　　対偶: C$\not\subset$NP → $A \notin$NP

(3) $A \in$ coNP → C $\subseteq coNP$　　対偶: C$\not\subset$ coNP → $A \notin$ coNP

(4) $A \in$ EXP → C $\subseteq EXP$　　対偶: C$\not\subset$EXP → $A \notin$EXP

証明:

(1) 任意のC集合をBとする. AがC困難であることから,

$B \leq_m^P A$ であり, $A \in$Pという仮定より $B \in$Pをえる.

(2), (3), (4) も同様.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

6.2.1. Definition and basic properties

Theorem. For any C-hard (or C-complete) set A,

(1) $A \in P \rightarrow C \subseteq P$ CP: $C \not\subset P \rightarrow A \notin P$

(2) $A \in NP \rightarrow C \subseteq NP$ CP: $C \not\subset NP \rightarrow A \notin NP$

(3) $A \in coNP \rightarrow C \subseteq coNP$ CP: $C \not\subset coNP \rightarrow A \notin coNP$

(4) $A \in EXP \rightarrow C \subseteq EXP$ CP: $C \not\subset EXP \rightarrow A \notin EXP$

Ex. : Meaning of Theorem for class NP

Let A be NP-complete set.

By the contraposition of Theorem (1) we have

$NP \neq P \rightarrow A \notin P$

That is, NP-complete sets are NP-sets that cannot be recognized in polynomial time unless P = NP.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.2.完全性

6.2.1.定義と基本性質

定理　C困難(またはC完全)な任意の集合Aに対して,

(1) $A \in$ P → C $\subseteq P$　　対偶: C$\not\subset$ P → $A \notin$ P

(2) $A \in$ NP → C $\subseteq NP$　　対偶: C$\not\subset$NP → $A \notin$ NP

(3) $A \in$ coNP → C $\subseteq coNP$　対偶: C$\not\subset$ coNP → $A \notin$ coNP

(4) $A \in$ EXP → C $\subseteq EXP$　　対偶: C$\not\subset$EXP → $A \notin$ EXP

例 : クラスNPに関する定理の意味するところ

NP完全集合をAとする.

定理(1)の対偶より:　NP≠P ➔ $A \notin$ P

つまり, NP完全集合はP=NPでない限り,

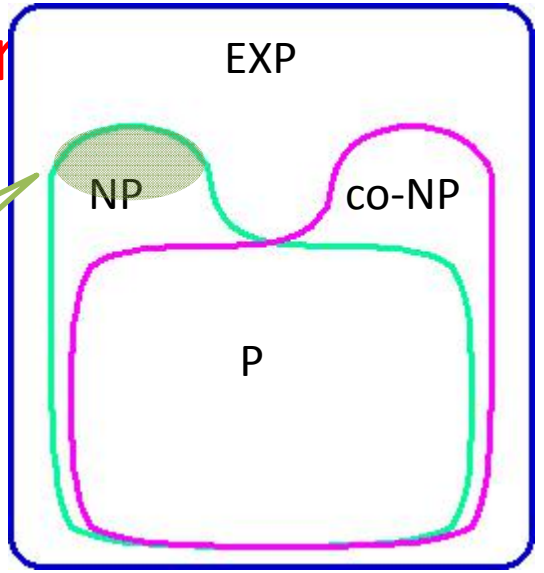
多項式時間では認識できないNP集合である.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

6.2.1. Definition and basic proper

NP-complete problems form the most difficult problems in the class NP.



Ex. : Meaning of Theorem for class NP

Let *A* be NP-complete set.

By the contraposition of Theorem (1) we have

$NP \neq P \rightarrow A \notin P$

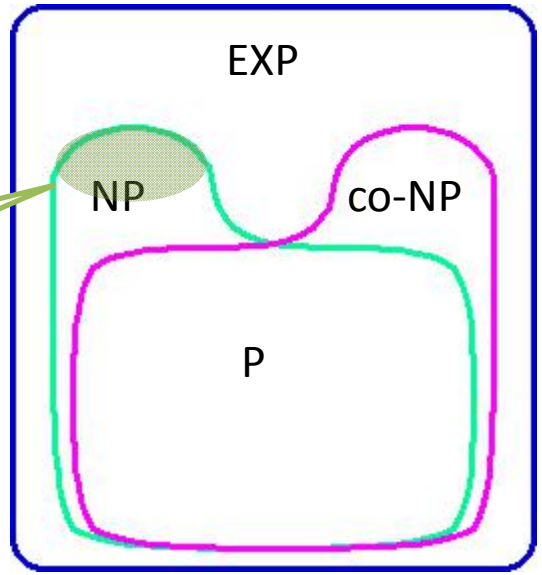
That is, NP-complete sets are NP-sets that cannot be recognized in polynomial time unless P = NP.

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.2.完全性

6.2.1.定義と基本性質

NP完全問題とは，クラスNPの中で最も難しい問題群を構成しているといえる.



例：クラスNPに関する定理の意味するところ

NP完全集合をAとする.

定理(1)の対偶より：　NP≠P ➔ $A \notin$ P

つまり，NP完全集合はP=NPでない限り，

多項式時間では認識できないNP集合である.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

6.2.1. Definition and basic properties

Theorem 6.4. *A*: any C-complete set

For any set *B* we have

(1) $A \leq_m^P B \rightarrow B$ is C-hard.

(2) $A \leq_m^P B$ and $B \in \mathrm{C} \rightarrow B$ is C-complete.

Proof :

By definition, $\forall L \in \mathrm{C}[L \leq_m^P A]$

By Theorem, $L \leq_m^P A \wedge A \leq_m^P B \rightarrow L \leq_m^P B$

Therefore, $\forall L \in \mathrm{C}[L \leq_m^P B]$

That is, *B* is C-hard.

Once you have an NP-complete problem *A*, it can be used to measure to the other problems

6.多項式時間計算可能性の解析手法

6.2. 完全性

6.2.1.定義と基本性質

定理　A:任意のC完全集合

任意の集合 B に対して以下が成立

(1) $A \leq_m^P B$ →B は C困難.

(2) $A \leq_m^P B$ かつ $B \in$ C → B は C完全.

証明:

定義より, $\forall L \in \mathrm{C}[L \leq_m^P A]$

定理より, $L \leq_m^P A \wedge A \leq_m^P B \rightarrow L \leq_m^P B$

よって, $\forall L \in \mathrm{C}[L \leq_m^P B]$

つまりBはC困難.

ひとたびNP完全問題 Aが得られたら, これを使って他の問題の困難性を「測定」できる.

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

Definition For a class C, if a set A satisfies
(a) $\forall L \in \mathrm{C}\ [L \leq_m^P A]$,
the set A is called C-hard (under $\leq_m^P$). Moreover, if we have
(b) $A \in \mathrm{C}$,
then A is called C-complete.

Theorem A: any C-complete set
For any set B we have
(1) $A \leq_m^P B \rightarrow B$ is C-hard.
(2) $A \leq_m^P B$ and $B \in \mathrm{C} \rightarrow B$ is C-complete.

Once you have an NP-complete problem A, it can be used to measure to the other problems

6. 多項式時間計算可能性の解析

6.2. 完全性

定義　クラスCに対して，集合Aが以下を満たすとき
(a) $\forall L \in \mathrm{C}\ [L \leq_m^P A]$
集合Aは($\leq_m^P$ のもとで)C困難であるという．さらに
(b) $A \in \mathrm{C}$
であれば，AはC完全であるという．

定理　A: 任意のC完全集合
任意の集合 B に対して以下が成立
(1) $A \leq_m^P B$ → B はC困難．
(2) $A \leq_m^P B$ かつ $B \in \mathrm{C}$ → B はC完全．

ひとたびNP完全問題Aが示されれば，それを用いて他の問題を測ることができる．

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

There are two ways to prove (NP-)completeness:

1. show 'for all L' according to the definition
   - Cook's Theorem; he simulated Turing machine by SAT in 1971!

Easy to handle since, e.g., 3SAT has a uniform structure.

Basically…
1. For any program in standard form,
2. simulate it by SAT formulae
   →pretty complicated and tedious

2. use some known complete problem as a seed
   - 3SAT$\leq_m^P$ DHAM, 3SAT $\leq_m^P$ VC, …
   - Thousands of NP-complete problems are reduced from 3SAT!
   - E.g., from "DHAM is NP-complete for general graphs", we have
     - DHAM is NP-complete even for planar graphs
     - DHAM is NP-complete even for graphs with max degree=3
     - DHAM is NP-complete even for bipartite graphs…

max degree=5

6.多項式時間計算可能性の解析

6.2.完全性

(NP)完全性を示す二つの方法:

1. 定義に忠実に「すべてのL'」に対して示す
   - クックの定理; 彼は1971年にSATでチューリングマシンのシミュレータを構築した！

例えば3SATは一様な構造を持っているので，扱いやすい．

基本的には…
1. 標準形で書かれたプログラムを
2. SATの命題論理式で模倣
   →非常に複雑＆面倒

2. すでに完全性が示されている問題をタネに使う
   - 3SAT$\leq_m^P$ DHAM, 3SAT $\leq_m^P$ VC, …
   - 千を超えるNP完全問題が3SATからの還元で示されている!
   - 例えば「一般のグラフ上でDHAMはNP完全」という結果から:
     - DHAMは平面グラフ上に限定してもNP完全
     - DHAMは最大次数3に限定してもNP完全
     - DHAMは二部グラフに限定してもNP完全…

最大次数5

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

Theorem VC is NP-complete

[Proof] Since VC $\in$ NP, we show 3SAT $\leq_m^P$ VC.

For given formula $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, we construct a pair $\langle G,k\rangle$ of a graph and an integer in polynomial time such that:

> There is an assignment that makes $F()=1$
> $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})
3. add the edge (l_{i1},x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1},x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

6.多項式時間計算可能性の解析

6.2.完全性

定理 VCはNP完全問題

[証明] VC ∈ NPなので3SAT$\leq_m^P$ VCを示せばよい.

与えられた論理式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ から以下の条件を満たすグラフと整数の組$<G,k>$を多項式時間で構成する:

> $F()=1$ とする割当てが存在する
> ⇔G が大きさ k の頂点被覆をもつ

Gの構成方法 (F は n 変数・m 項からなる):

1. Fの各変数 x_i に対して，頂点 x_i^+,x_i^- と辺 (x_i^+,x_i^-) を追加する
2. Fの各項 $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ に対して，頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と3辺 (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1}) を追加する
3. 各項 C_jに対して，リテラルl_{i1} が x_iなら辺 (l_{i1},x_i^+) を，¬x_i なら辺(l_{i1},x_i^-) を追加する
4. $k = n+2m$ とする

Theorem VC is NP-complete

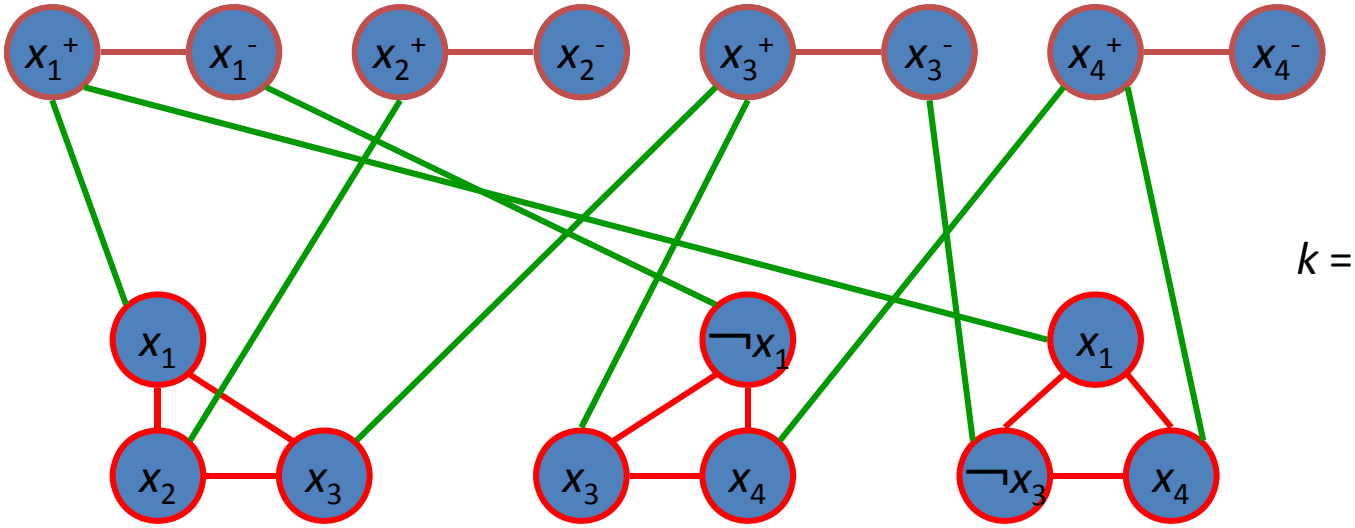
There is an assignment that makes $F()=1$
$\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})
3. add the edge (l_{i1},x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1},x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

定理 VCはNP完全問題

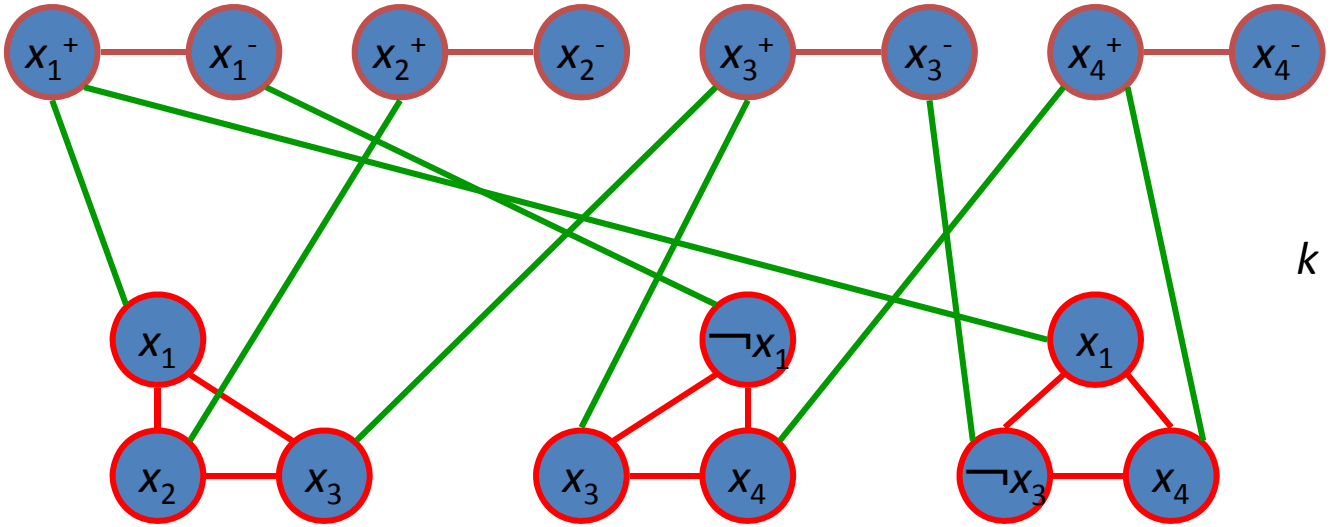
$F()=1$ とする割当てが存在する
⇔G が大きさ k の頂点被覆をもつ

Gの構成方法 (F は n 変数・ m 項からなる):

1. Fの各変数 x_i に対して，頂点 x_i^+, x_i^- と辺 (x_i^+, x_i^-) を追加する
2. Fの各項 $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ に対して，頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と3辺 (l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1}) を追加する
3. 各項 C_jに対して，リテラルl_{i1} が x_iなら辺 (l_{i1}, x_i^+) を，$\neg x_i$ なら辺 (l_{i1}, x_i^-) を追加する
4. $k = n+2m$ とする

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

Theorem VC is NP-complete

It is easy to see that the construction of G from F can be done in polynomial time of the size of F. Hence, we show that…

There is an assignment that makes $F()=1$
$\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Observation:

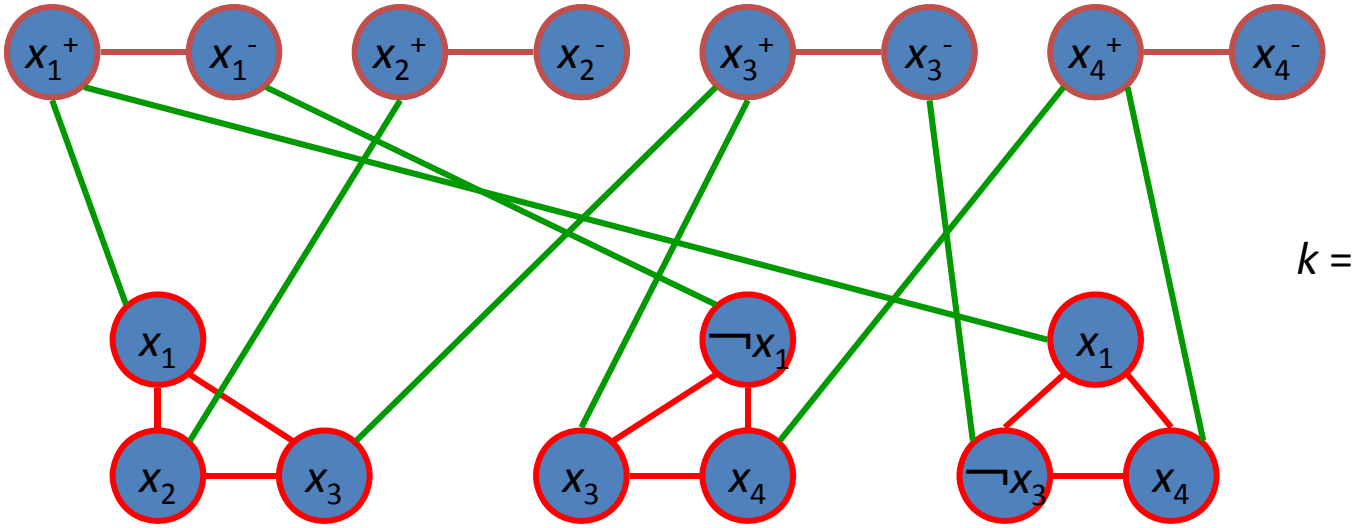
From the construction of G, any vertex cover S should contain
- at least one of x_i^+ or x_i^-
- at least 2 of 3 vertices in C_j

Hence we have $|S| \geqq n+2m = k$.

We have no extra vertex!!

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

定理 VCはNP完全問題

FからGの構成は，明らかに多項式時間で可能である．
したがって，以下を証明すればよい：

$F()=1$とする割当てがある
$\Leftrightarrow G$ が大きさkの頂点被覆をもつ

観測：

Gの構成方法から，頂点被覆 S は以下の頂点を必ず含む

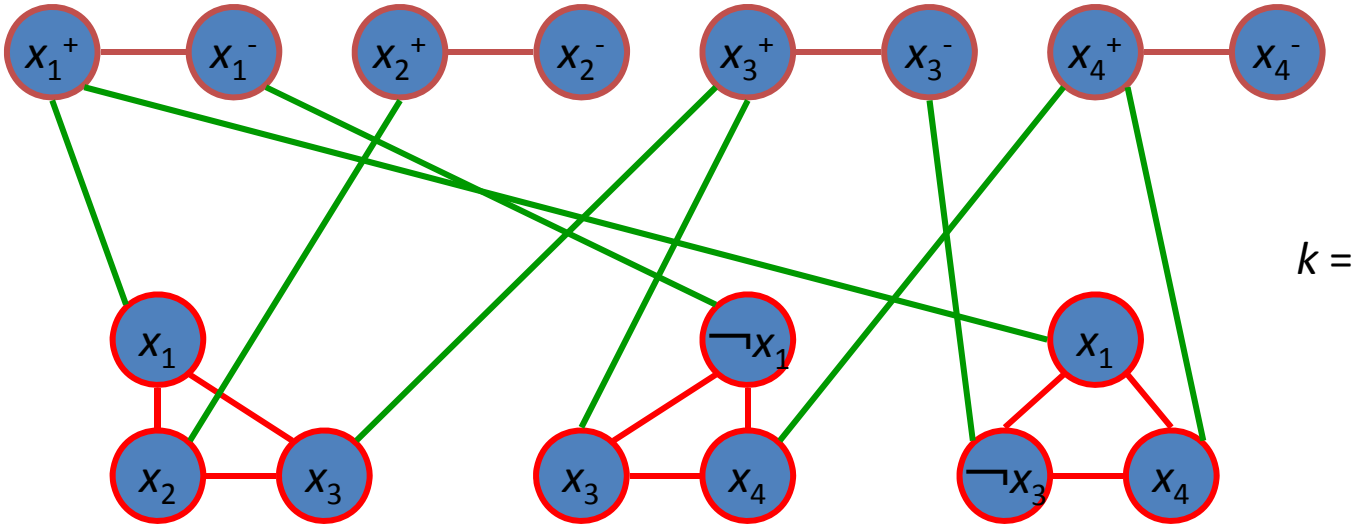
- x_i^+ or x_i^- から少なくとも一つ
- C_j の三つの頂点から少なくとも二つ

よって $|S| \geqq n+2m = k$

余分な頂点は一つもない！

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

Theorem VC is NP-complete

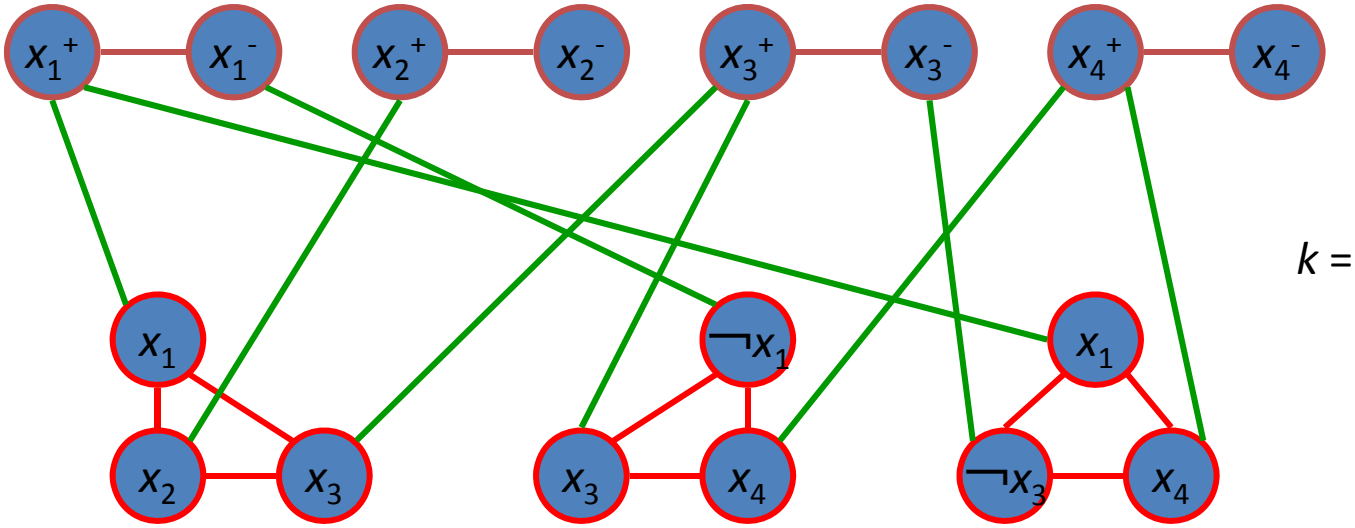
There is an assignment that makes $F()=1$
$\Rightarrow G$ has a vertex cover of size k

1. Put $\left\{ \begin{array}{l} x_i^+ \text{ if } x_i=1 \\ x_i^- \text{ if } x_i=0 \end{array} \right\}$ into S for each x_i.
2. Since each clause $C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ is satisfied, at least one literal, say l_{i1}, the edge (l_{i1},x_{i1}) is covered by the variable x_{i1}. Therefore, put the remaining literals (l_{i2},l_{i3}) into S.

$\Rightarrow$ From the Observation S is a vertex cover of size k.

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

定理 VCはNP完全問題

$F()=1$とする割当てがある
⇒G が大きさkの頂点被覆をもつ

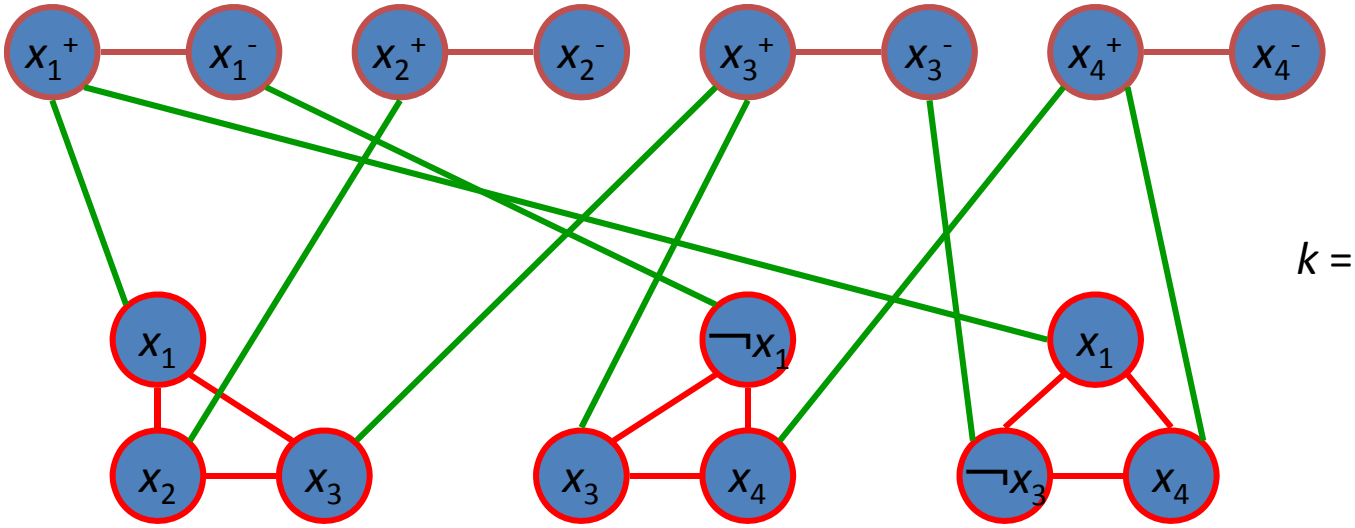
1.各 x_iに対して $\left\{ \begin{array}{l} x_i=1\text{なら}x_i^+ \\ x_i=0\text{なら}x_i^- \end{array} \right\}$ をSに

2. 各項 $C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ は充足されているので，少なくとも一つのリテラル l_{i1} に対して辺 (l_{i1},x_{i1}) は変数x_{i1}で被覆されている．そこで残りの二つのリテラル (l_{i2},l_{i3}) を S に

⇒ 観測 よりSは大きさkの頂点被覆．

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

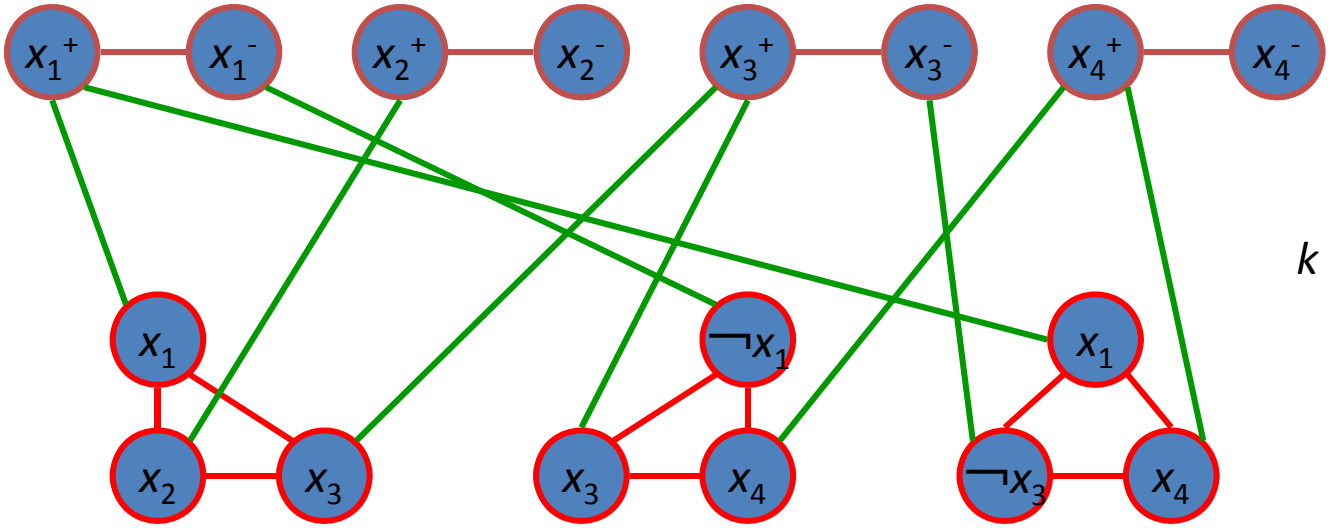
Theorem VC is NP-complete

If G has a vertex cover of size k, there is an assignment that makes $F()=1$

1. From Observation, a cover S contains $2m$ vertices from the clauses, and n vertices from the variables.
2. Thus the cover S contains exactly one of x_i^+ and x_i^- and exactly two literals of a clause C_j.
3. Hence each clause C_j contains exactly one literal l_i which is not in S, and hence incident edge should be covered by a variable vertex.

$\Rightarrow$ The following assignment satisfies F: $\begin{pmatrix} x_i=1 \text{ if } x_i^+ \text{ in } S \\ x_i=0 \text{ if } x_i^- \text{ in } S \end{pmatrix}$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



G

$k = 4+2 \times 3=10$

Q.E.D.

定理 VCはNP完全問題

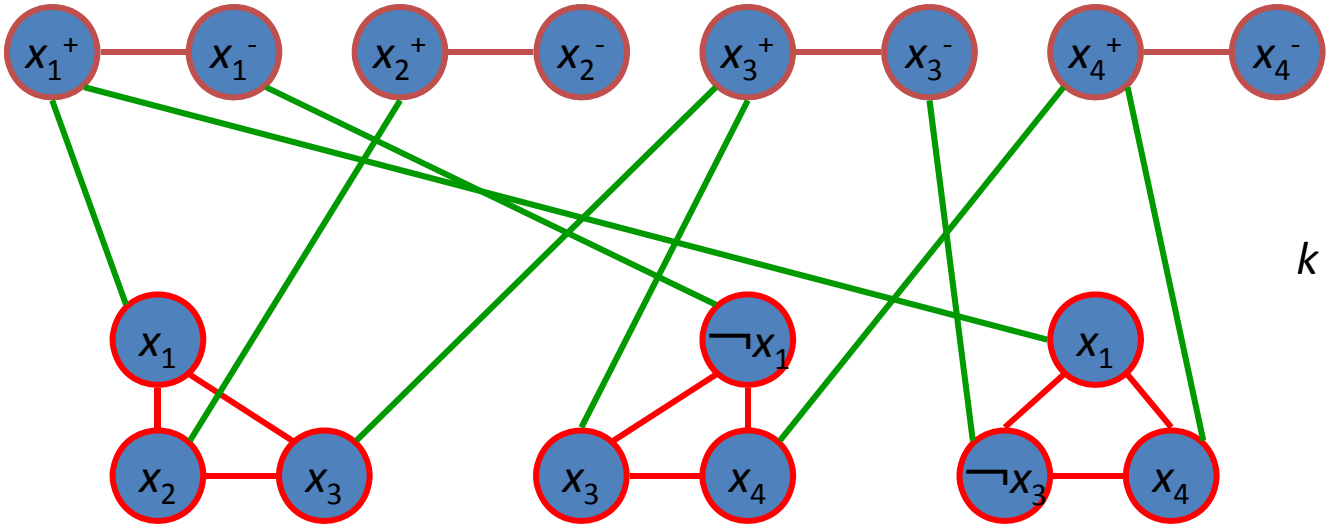
G が大きさkの頂点被覆をもつなら，$F()=1$とする割当てが存在する

1. **観測** より，被覆 S は各項から $2m$ 頂点含み，変数から n 頂点含む．
2. よって被覆 S はx_i^+ と x_i^- からちょうど一つと，各項C_jからちょうど二つのリテラルを含む
3. つまり各項 C_j はSに含まれないリテラルl_iをちょうど一つだけ含み，そこにつながる辺は変数頂点で被覆されている．

⇒ 以下の条件を満たす割当ては F を充足する：
$\begin{pmatrix} x_i^+ \in S \text{ なら} x_i=1 \\ x_i^- \in S \text{ なら } x_i=0 \end{pmatrix}$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



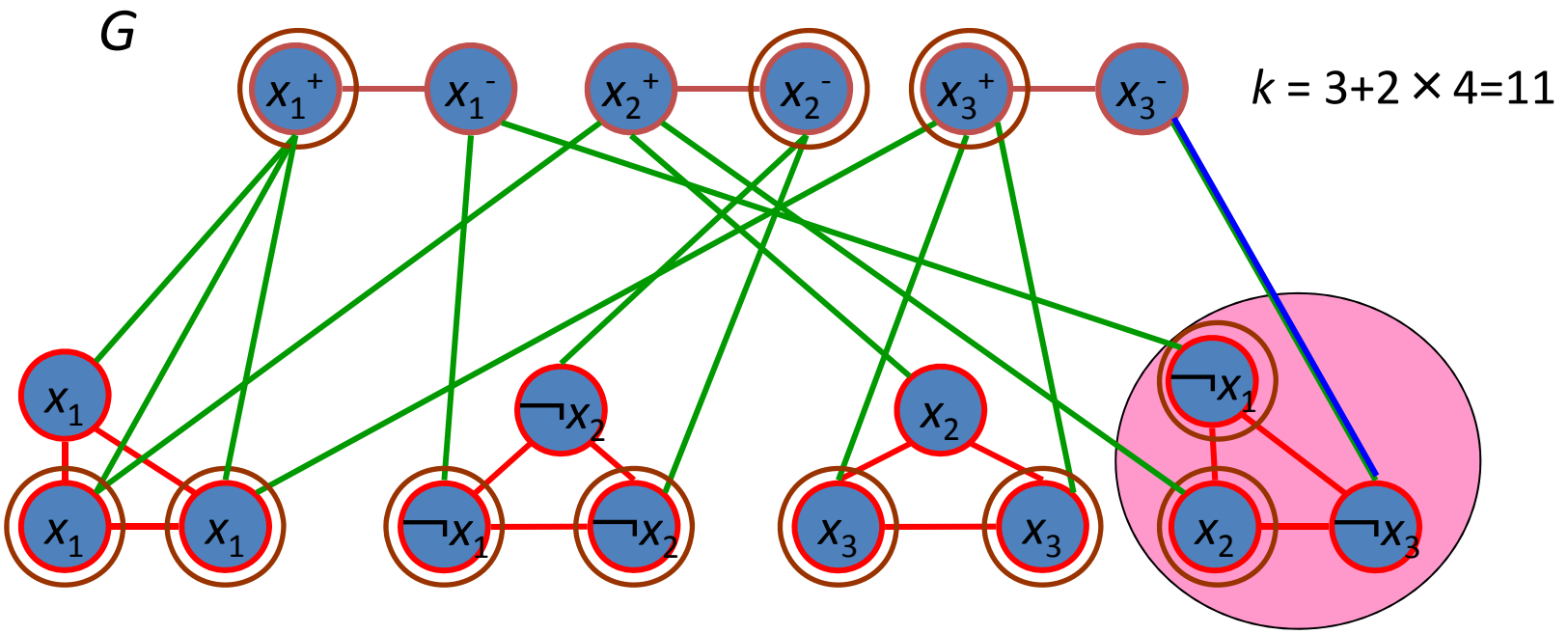
$k = 4+2 \times 3=10$

Q.E.D.

Theorem VC is NP-complete… Addition

What happen if the formula is not satisfiable?

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

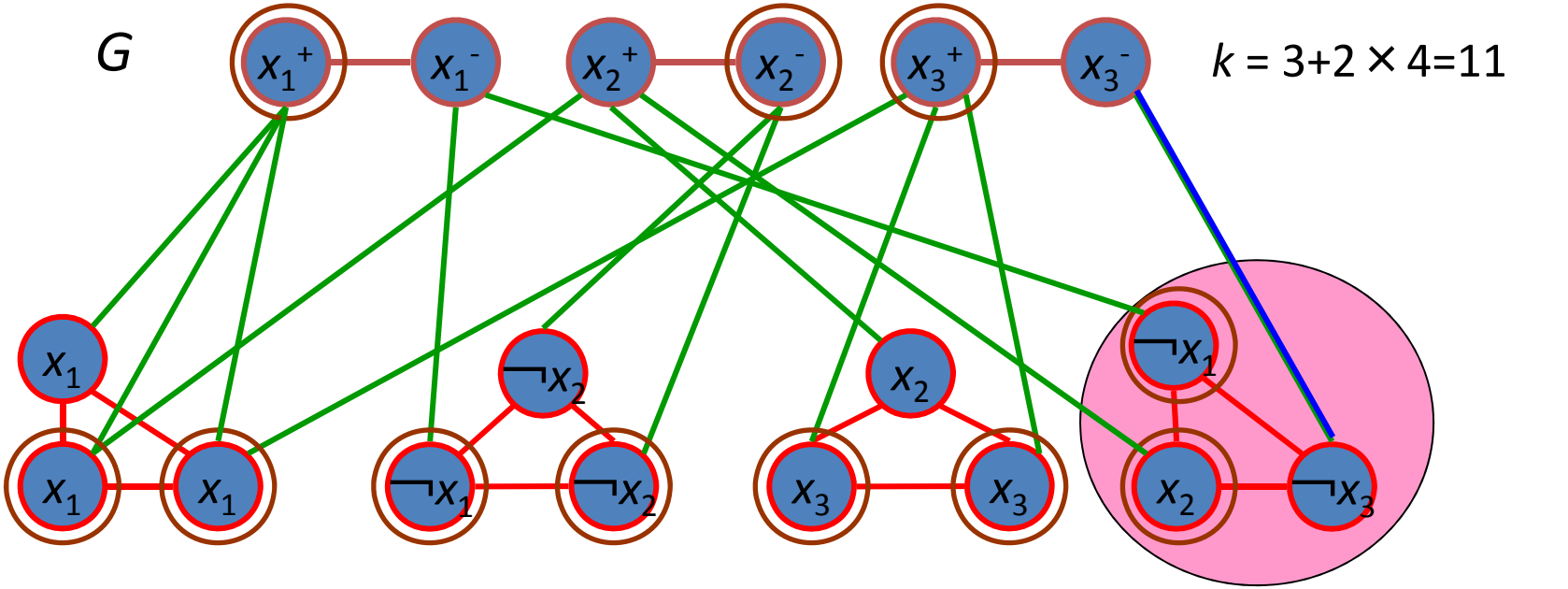


If *F* is unsatisfiable, it contains at least one clause s. t. each literal is *not* covered by a vertex. So, Vertex Cover should contain *three* literals in the clause. Hence any vertex cover has size at least *k*+1.

定理 VCはNP完全問題… 補足

命題論理式が充足可能でないときにはどうなるのか?

$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$



F が充足可能でないときには，ある項において頂どのリテラルも変数側の頂点によって被覆されない．よって頂点被覆集合はこの項のリテラルを三つともふくまなければならない．
したがって頂点被覆集合は少なくとも大きさk+1になる．

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

degree: the number of edges incident to a vertex

Theorem

DHAM is NP-complete even if maximum degree=5.

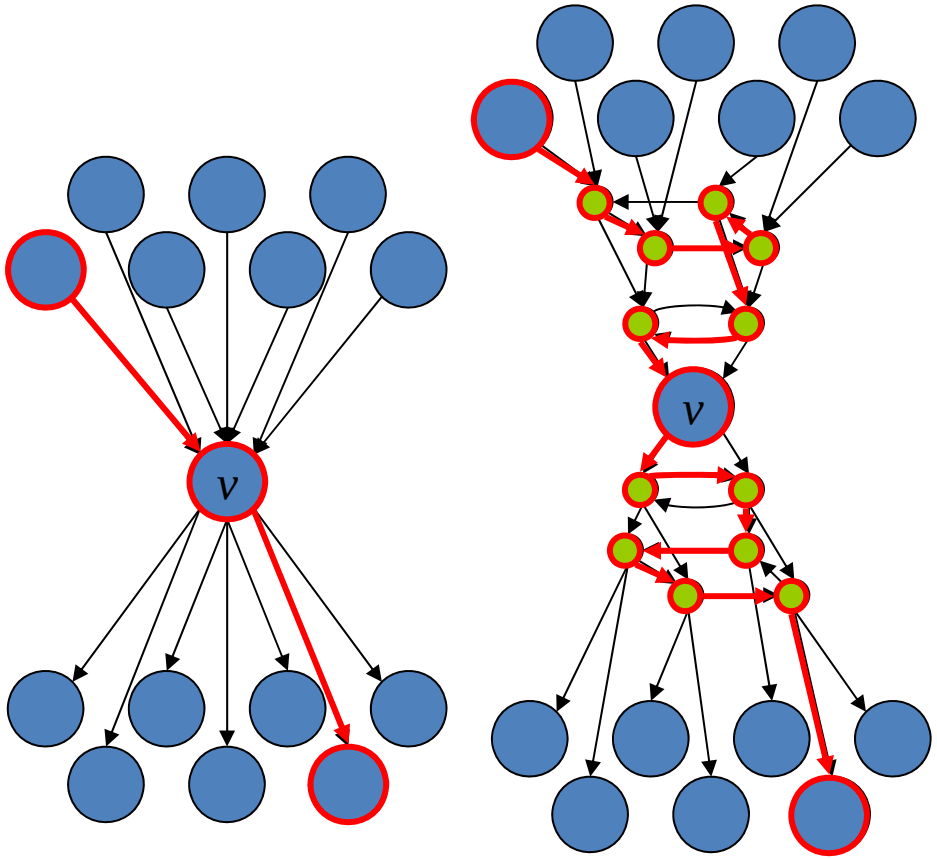
[Proof]

Since DHAM $\in$ NP, DHAM$_{\leqq 5}$ $\in$ NP.
We show DHAM $\leq_m^P$ DHAM$_{\leqq 5}$.

Idea:

Replace the set of “arcs to v” and the set of “arcs from v” by a right ‘gadget’.

A Hamiltonian cycle through *v* on the original graph corresponds to the Hamiltonian cycle through *v* on the resultant graph.



6.多項式時間計算可能性の解析

6.2. 完全性

次数: 頂点につながる辺の本数

定理

DHAM はグラフの最大次数が5でも NP完全

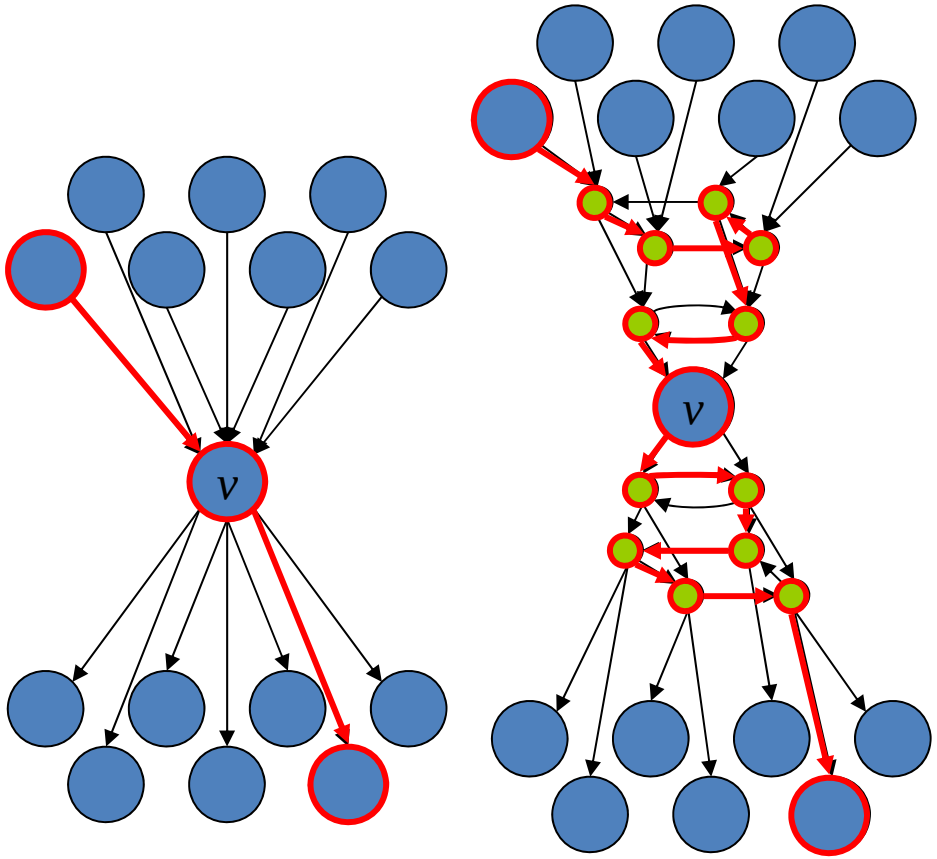
[証明]

DHAM ∈ NPなので DHAM$_{\leqq 5}$ ∈NP.
よってDHAM $\leq_m^P$DHAM$_{\leqq 5}$を示す

アイデア

「vに入る辺」や「vから出る辺」を
しかるべきガジェットで置き換える

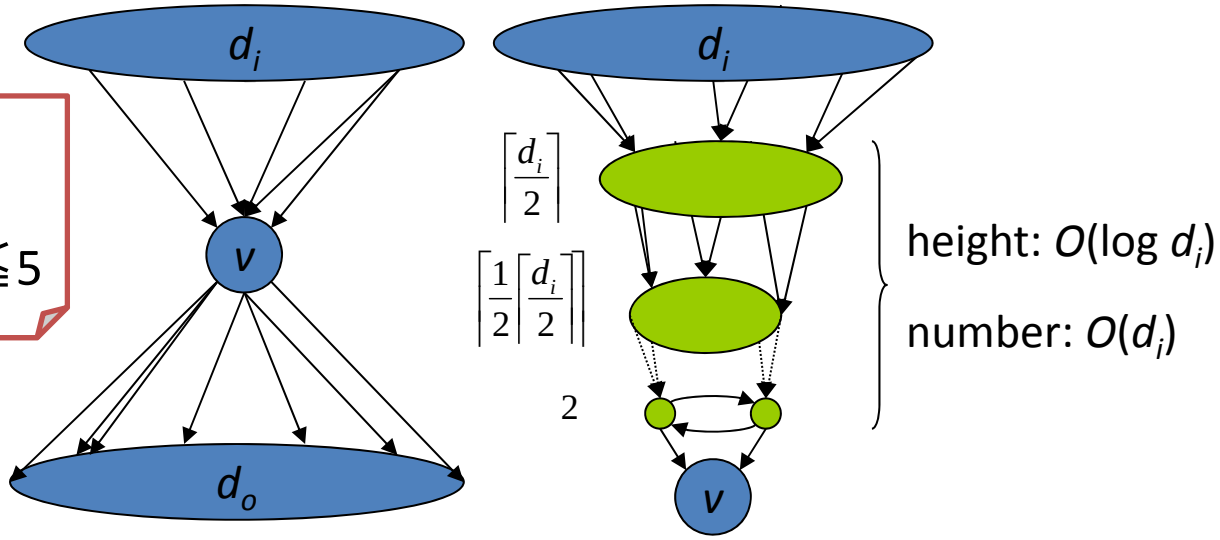
元のグラフでvを通る
ハミルトン閉路は，
置き換えたグラフでvを
通るハミルトン閉路に
対応づけられる.



6.2. Completeness

Theorem DHAM is NP-complete even if max. degree=5.

Points:
- Up to down via cycle
- Each vertex has deg≦5



[Proof (sketch)]

For each vertex v of degree≧6, replace the edges around v by the gadget.

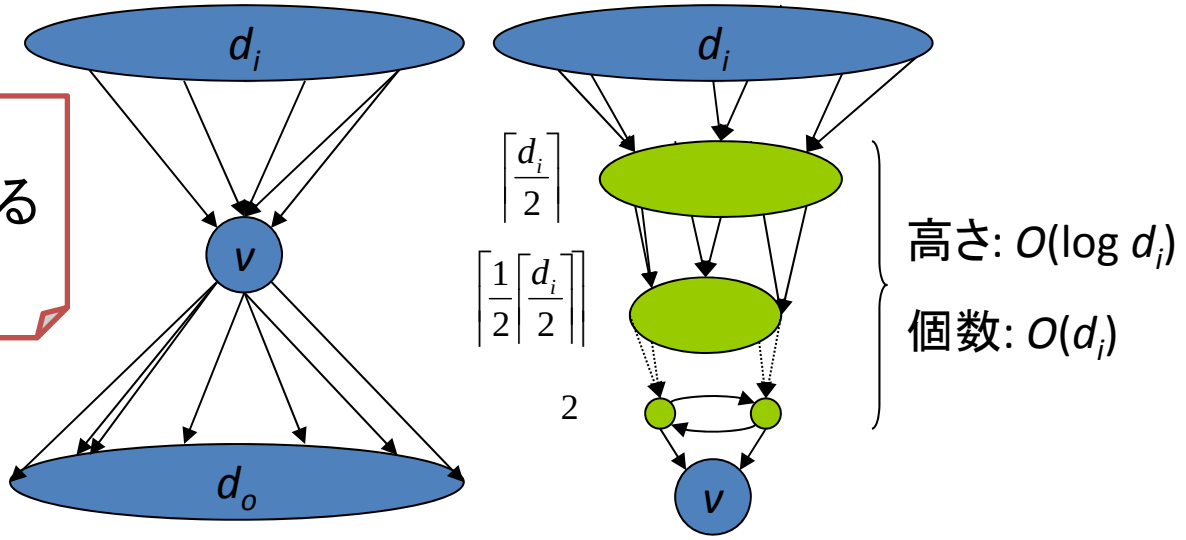
1. If the original graph G has n vertices with m edges, the resultant graph G' contains $O(n+m)$ vertices with $O(m)$ edges. Hence the reduction can be done in polynomial time of n & m.
2. Each vertex in G' has degree *at most* 5.
3. G has a Hamiltonian cycle ⇔ G' has a Hamiltonian cycle.

QED.

6.2.完全性

定理　DHAM はグラフの最大次数が5でも NP完全

ポイント:
- 上から下に閉路を通る
- 各頂点の次数≦5



[証明 (概要)]

次数≧6の各頂点 v に対して，v の頂点の周りの辺をガジェットで置き換える

1. もとのグラフ G の頂点数をn，辺数を m とすると，還元後に得られるグラフ G' の頂点数は $O(n+m)$ で辺数は $O(m)$ となる．よってこの還元はn と m の多項式時間で実行できる．
2. G' の各頂点の次数はたかだか 5.
3. G がハミルトン閉路をもつ ⇔ G' がハミルトン閉路をもつ

QED.

Addition (おまけ)

Many natural hard problems are either
- Poly-time solvable, or
- NP-hard

- R. Uehara, S. Iwata:
  Generalized Hi-Q is NP-complete,
  The Transactions of the IEICE, E73, p.270-273, 1990.
- P. Zhang, H. Sheng, R. Uehara:
  A Double Classification Tree Search Algorithm for
  Index SNP Selection, *BMC Bioinformatics*, 5:89, 2004.
- R. Uehara, S. Teramoto:
  Computational Complexity of a Pop-up Book,
  4th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, 2006.

- E. Demaine, M. Demaine, R. Uehara, T. UNO, Y. UNO:
  UNO is hard, even for a single player,
  Theoretical Computer Science, Vol. 521, pp.51-61, 2014.

- E. D. Demaine, Y. Okamoto, R. Uehara, and Y. Uno:
  Computational complexity and an integer programming model of Shakashaka,
  IEICE Trans. Vol. E97-A, No. 6, pp. 1213-1219, 2014.

Schedule(残りの予定)

- 5/7(Today): Report (2)
- 5/11(Mon): Last class (前半最後の講義)
  - Submission of the report (2) (レポート(2)提出)
  - Course Evaluation Questionnaire（授業アンケート）
  - Comments/Answers on report (2) will be given in the class
- 5/14(Thu): Class by Prof. Miyaji
- 5/18(Mon): mid-term exam (中間試験) (by Prof. Omote)
  - 40 points
  - Choices are;
    - Anything without electricity (w/o cell/ipad/…) (電子デバイス以外何でも)
    - Textbooks, copy of slides, and hand written notes (教科書/スライド/ノート)
    - Only pens and pencils (持ち込み不可)
  - Lesson 3~Lesson 6（講義3~講義6）,
    which means that “no diagonalization”