I216 Computational Complexity and Discrete Mathematics Report (1)

2015, Term 1-1

Ryuhei Uehara(Room I67b, uehara@jaist.ac.jp)

Propose(出題): April 16 (Thu)

Deadline(提出期限): April 20 (Mon), 12:30pm.

Note(注意): Do not forget to handwrite your name, student ID, problems, and answers on your report. (レポートには氏名，学生番号，問題，解答を，すべて手書きで書くこと．)

Answer one of the following three problems in English or in Japanese. (以下の問題から１問選んで日本語か英語で答えよ．)

Problem 1 (5 points): Let $X_1, X_2, \ldots$ be the Turing machines, and $x_1, x_2, \ldots$ are their corresponding binary string. (That is, a string x_i is the binary code of the Turing machine X_i.) We denote the output of X_i with a binary input x by $X_i(x)$. For two strings x and y, their concatenation is denoted by $x \cdot y$ (e.g., $000 \cdot 111 = 000111$). Let f be the function defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} X_i(x_i) \cdot X_i(x_i) & \text{if } X_i \text{ halts for the input } x = x_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Prove that this function f is not computable. ($X_1, X_2, \ldots$ をチューリングマシンとし，$x_1, x_2, \ldots$ を対応する 2 進文字列とする．(つまり x_i はチューリングマシン X_i を 2 進文字列で記述したものである．) X_i に 2 進文字列 x を与えたときの出力を $X_i(x)$ と書くことにする．二つの文字列 x と y に対し，これらの連接を $x \cdot y$ と書く（例えば $000 \cdot 111 = 000111$ である）．ここで上の関数 f を考えると，これは計算不能であることを証明せよ．)

Problem 2 (5 points): The set N of natural numbers is enumerable. Now, prove that the set 2^N of subsets of N is *not* enumerable by diagonalization. (自然数の集合 N は可算無限集合である．N の部分集合の集合 2^N は非可算無限集合であることを対角線論法で証明せよ．) (Hint: For $S = \{1, 2, 3\}$, we have $2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.)

Problem 3 (5 points): For any given string x, we denote by $lo(x)$ and $oo(x)$ the indices of x in the pseudo-lexicographical ordering with length preferred and the usual lexicographical ordering, respectively. For example, we have $lo(\epsilon) = oo(\epsilon) = 1$, $lo(0) = oo(0) = 2$, $lo(1) = 3$, and $oo(00) = 3$. We also denote by $n < \infty$ when a number n is finite. Now, declare if each of the followings is true or false. If it is false, show a counterexample. In the followings, x denotes a string and n denotes a positive integer. (文字列 x に対して，長さ優先辞書式順序における x の出現順序を $lo(x)$，通常の辞書式順序における x の出現順序を $oo(x)$ と書くことにする．例えば $lo(\epsilon) = oo(\epsilon) = 1$, $lo(0) = oo(0) = 2$, $lo(1) = 3$, $oo(00) = 3$ である．またある数 n が有限であることを $n < \infty$ と書くことにする．このとき以下の記述が正しいか誤りかを判定せよ．誤りである場合は反例を示せ．ただし以下の記述中，x は文字列，n は正整数である．)

$$\forall x \, \exists n \, [\; |x| < \infty \rightarrow lo(x) < n \;] \tag{1}$$

$$\exists n \, \forall x \, [\; |x| < \infty \rightarrow lo(x) < n \;] \tag{2}$$

$$\forall x \, \exists n \, [\; |x| < \infty \rightarrow oo(x) < n \;] \tag{3}$$

$$\exists n \, \forall x \, [\; |x| < \infty \rightarrow oo(x) < n \;] \tag{4}$$