I482F　実践的アルゴリズム特論
10回目：$\mathcal{NP}$完全性と多項式時間還元

上原隆平
(uehara@jaist.ac.jp)

計算量のクラス

- 集合・問題・言語：
  - アルファベットΣ（典型的には$\Sigma=\{0,1\}$）に対して、全体集合
    $\Sigma^*=\{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \ldots\}$
    の部分集合のことを<u>言語</u>という。
  - 言語Lに対して、
    与えられた任意のxに対してLに属するかどうか
    を決める問題をその言語の<u>認識問題</u>という。

例12.1：

$L_1=\{0, 10, 100, 110, 1000, 1010, 1100, 1110, \ldots\}$
（L_1は偶数の自然数の2進数表記）

$L_2=\{10, 11, 101, 111, 1011, 1101, 10001, \ldots\}$
（L_2は素数の2進数表記）

プログラミング言語モデル

- ここでは
  - プログラミング言語は普通の手続き型言語（たとえばC）
    - 変数
    - 代入文
    - 条件判断(if 文)
    - 制御命令(goto 文)
  - データやプログラムは妥当なコード化がされている
    - アルファベットは$\Sigma=\{0,1\}$
    - 数値データは2進数表現
    - 文字列はASCIIコード

プログラムの実行時間

- あるプログラム P の実行時間は、入力の長さ n に対する関数 $f(n)$ で測る。ただし
  - $f(n)$ は
    - 入力の長さが<u>**高々 n**</u> の<u>**任意の入力**</u> x に対する
    - $P(x)$ の計算時間の<u>**上界**</u>

  を与える関数である。

任意の入力：その長さまでの最悪の入力を考える。

上界：過大評価している場合もある

高々n：nの増加に対して非減少な単調関数としてよい。

計算量のクラス

- 代表的な（＝この授業で出てくる）クラス

定義12.1: クラス$\mathcal{P}$
　言語 L がクラス$\mathcal{P}$に入る ⇔
　　　以下を満たすプログラム P と多項式 f が存在:
　　　任意の $x \in \Sigma^*$ に対して $P(x)$ は L の認識問題を $f(|x|)$ 時間で解く

定義12.2: クラス$\mathcal{EXP}$
　言語 L がクラス$\mathcal{EXP}$に入る ⇔
　　　以下を満たすプログラム P と指数関数 f が存在:
　　　任意の $x \in \Sigma^*$ に対して $P(x)$ は L の認識問題を $f(|x|)$ 時間で解く

クラス$\mathcal{EXP}$の中の最上位の問題は「手に負えない」

定義12.3: クラス$\mathcal{NP}$
　集合 L がクラス$\mathcal{NP}$に入る ⇔
　　　以下を満たすプログラム P と多項式 f と多項式 q が存在:
　　　任意の $x \in \Sigma^*$ に対して
- $\underline{x} \in L$ ならば $\exists w \in \Sigma^*$ $(|w| \leqq q(|x|))$ に対して $P(x,w)$ は L の認識問題を $f(|x|)$ 時間で解く
- $x \notin L$ ならばそのような w は存在しない

計算量のクラス

- 代表的な(＝この授業で出てくる)クラス

定義12.3:クラス$\mathcal{NP}$
集合 L がクラス$\mathcal{NP}$に入る ⇔
以下を満たすプログラム P と多項式 f と多項式 q が存在:
任意の $x\in\Sigma^*$ に対して
- $\underline{x}\in L$ ならば $\exists w\in\Sigma^*$ $(|w|\leqq q(|x|))$ に対して $P(x,w)$ は L の認識問題を $f(|x|)$ 時間で解く
- $x\notin L$ ならばそのような w は存在しない

補注:各 $x\in\Sigma^*$ に対して，上記を満たす $w_x\in\Sigma^*$ を x の(多項式長の)証拠という.
以下では,

$$\exists w\in\Sigma^*:|w|\leq q(|x|)\ \Rightarrow\ \exists_q w$$

と略記.

クラス$\mathcal{NP}$とは「入力サイズの多項式長の証拠が与えられたとき,
これが問題の条件を満たすかどうかを多項式時間で判定できる」
という性質をもつクラス

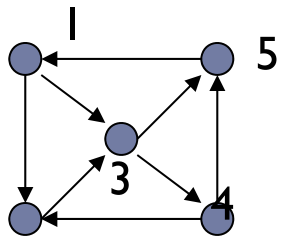
補足:$\mathcal{NP}$=**N**ondeterministic **P**olynomial

$\mathcal{NP}$問題の例

スターリングの近似式：$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

- ハミルトン閉路問題（DHAM）
  - 入力：有向グラフD（頂点は1～nで番号付けされているとする）
  - 出力：すべての頂点をちょうど一度づつ訪れる閉路はあるか？

例12.2：



頂点を訪れる順序は1～nの順列
<1,2,3,4,5>: ハミルトン閉路
<1,2,3,5,4>: ハミルトン閉路ではない
<1,4,3,2,5>: ハミルトン閉路ではない

全部で約 $n! \sim 2^{n \log n}$ 通りなので、素朴に全部試すと指数時間かかる。

プログラム P：
[入力] グラフ D と 1～n の順列 p
[出力] p の順に D の頂点を訪れて
　　　ハミルトン閉路になっていればYes、そうでなければNo

- プログラム P は $|D|, |p|$ に対する多項式時間アルゴリズム
- $D \in$DHAMならば、$\exists p$が「Dの証拠」の条件を満たす
- $D \notin$DHAMならば、どんなpも「Dの証拠」の条件を満たすことはできない

$\mathcal{NP}$集合であることの意味とは..

「計算機で解きたい問題」
としては自然な状況

- （とても）直観的な意味：与えられた問題が…
  - 解答を教えてもらえると、自分で多項式時間で確かめられる
  - 自分で解答を見つけるのは指数時間かかりそうに見える
    （本当に指数時間かかるかどうかは100万ドルの賞金問題）

ミレニアム問題
$\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$予想

- もう少し形式的には

多項式時間プログラムPを用いて，$x \in L$? を次のように判定できる.

```
for each  w ∈ Σ^{≤q(|x|)}  do
  if P(x, w)="yes" then accept end-if
end-for;
reject;
```

長さが$q(|x|)$以下の文字列をすべて列挙して調べれば，YesかNoかを判定できる.
ただ，そのような文字列は約 $2^{q(|x|)}$ 個（指数関数）存在することに注意.

上記の計算方式で認識できる集合を$\mathcal{NP}$集合と考えてよい.
ここから $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{NP}\subseteq\mathcal{EXP}$ という包含関係もわかる。

$\mathcal{NP}$問題の例

- 命題論理式充足性問題(SAT)
  入力 : n変数の命題論理式F
  質問 : Fを真にするTrue/Falseの割り当てがあるか？

- ナップサック問題(KNAP)
  入力 : 自然数の組$< a_1, a_2, \ldots, a_n, b >$
  質問 : $\sum_{i \in S} a_i = b$ となる添字の集合 $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ があるか？

- 箱詰め問題(BIN)
  入力 : 自然数の組$< a_1, a_2, \ldots, a_n, b, k>$
  質問 : 添字の集合$U=\{1, \ldots, n\}$を$U_1, \ldots, U_k$のk個に分割し,
  各jで $\sum_{i \in U_j} a_i \le b$ とすることは可能か？

- 頂点被覆問題(VC)
  入力 : 無向グラフGと自然数kの組$<G, k>$
  質問 : Gにk頂点の頂点被覆が存在するか？

頂点被覆 S:
どの辺 (u,v) も
u, v の一方は
S に含まれる

多項式時間還元可能性

B を解くプログラムがあれば
それで A を解くことができる

定義12.4:
AとBを任意の集合とする.
(1) 関数 h: A→B: 多項式時間還元(polynomial-time reduction)

$\Longleftrightarrow$ (a) h はΣ*からΣ*への全域的関数
(b) $x \in \Sigma^*[x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
(c) h は多項式時間計算可能.

(2) AからBへの多項式時間還元が存在するとき,
AはBへ多項式時間還元可能という(polynomial time reducible).
このとき, 次のように書く: $\boxed{A \leq_m^P B}$

直観的な意味:

$A \leq_m^P B$ とすると多項式時間の範囲内では,「Aの難しさ」$\leq$「Bの難しさ」

多項式時間還元の基本性質

定理:12.1 $A \leq_m^P B$ のとき,

(1) $B \in \mathcal{P} \rightarrow A \in \mathcal{P}$.

(2) $B \in \mathcal{NP} \rightarrow A \in \mathcal{NP}$.

(3) $B \in \mathcal{EXP} \rightarrow A \in \mathcal{EXP}$.

例12.3:

ONE＝{1}と定義するとき，クラス$\mathcal{P}$のすべての集合Lについて $L \leq_m^P \mathrm{ONE}$ が成り立つ.

(∵)

$$h(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \in L \text{のとき} \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

と定義すると,

(a) hはΣ^*からΣ^*への全域的関数.

(b) $x \in \Sigma^*[x \in L \leftrightarrow h(x) \in \mathrm{ONE}]$

(c) hは多項式時間計算可能（$L \in \mathcal{P} \rightarrow x \in L$の判定も多項式時間内）

多項式時間還元における同値関係

定理12.2: A, B, C: 任意の集合

(1) $A \le_m^P A$

(2) $A \le_m^P B \wedge B \le_m^P C \to A \le_m^P C$

定義12.5: $A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \le_m^P B \wedge B \le_m^P A$

$\equiv_m^P$ は同値関係

多項式時間還元性のもとで同値な問題群

命題論理式の充足可能性問題の間の関係

2SAT　（命題論理式充足性問題：二和積形式）
3SAT　（命題論理式充足性問題：三和積形式）
SAT　（命題論理式充足性問題）
ExSAT　（拡張命題論理式充足性問題）

$$\mathrm{2SAT} \le_m^P \mathrm{3SAT}$$

- 高々k個…自明
- ちょうどk個…
  - 同じリテラルを使ってよいなら簡単。
  - だめなら…考えてみよう！

同様に,

$$\mathrm{3SAT} \le_m^P \mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{ExSAT}$$

$$\mathrm{2SAT} \le_m^P \mathrm{3SAT} \le_m^P \mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{ExSAT}$$

よってここで

$$\mathrm{ExSAT} \le_m^P \mathrm{3SAT}$$

が示せれば,

$$\mathrm{3SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$$

となる.

ExSATから3SATへの還元

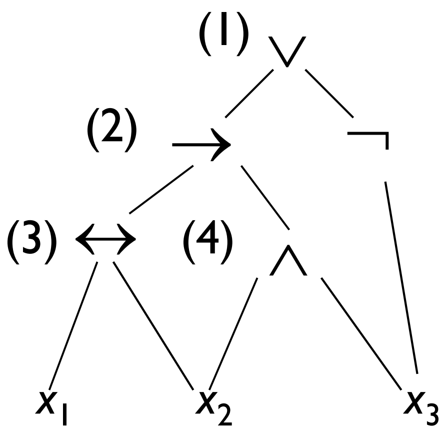
$$E_1(x_1,x_2,x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \rightarrow [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$

$$F_1(x_1,x_2,x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \rightarrow U_4]] \\ \wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

F_1の構成方法：E_1の計算木をボトムアップで計算する方法を模倣

このとき，[E_1が充足可能] $\leftrightarrow$[F_1が充足可能]

F_1は三和積形式に直しやすい形になっている．



$$(1) V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$$

$$(2) V_2 \equiv [V_3 \rightarrow V_4]$$

$$(3) V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$$

$$(4) V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$$

F_1を構成するために，$V_i \rightarrow U_i$とし，V_iの定義式を$\wedge$で結ぶ

ExSATから3SATへの還元

F_1 の構成方法より,
(1)各U_i の値を$V_i(x_1, x_2, x_3)$としない限り，F_1は真にはならない.
(2)各U_iの値を$V_i(x_1, x_2, x_3)$としたとき，$F_1 = E_1$

上の性質が成り立つことは，帰納法を用いるなどして証明可能.
証明は省略.

三和積形式への変換

次の関係を使って展開する:

$$a \rightarrow b = \neg a \vee b$$
$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) = (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$$

例:

$$\begin{aligned} U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg [U_2 \vee \neg x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2] \end{aligned}$$

他も同様に展開して整理すると、三和積形式に変形できる.
よって，すべて三和積形式に変形できることがわかる.

多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

困難性と完全性の定義と基本的な性質

定義12.5:
計算量クラス$\mathcal{C}$に対し，集合 A が次の条件を満たすとき，
A は($\leq_m^P$ の下で)$\mathcal{C}$-困難という.
(a) $\forall L \in \mathcal{C}\ [L \leq_m^P A]$

クラス$\mathcal{C}$のどの問題
と比べても同程度
には難しい

定義12.6:
計算量クラス$\mathcal{C}$に対し，$\mathcal{C}$-困難集合 A が $A \in \mathcal{C}$ を満たすとき，
A は($\leq_m^P$の下で)$\mathcal{C}$-完全という.

クラス$\mathcal{C}$の中で
もっとも難しい

例12.4： クラス$\mathcal{NP}$の完全集合の例
3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN,VCなど

多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

困難性と完全性の定義と基本的な性質

定理12.3: 任意の$\mathcal{C}$-困難集合(含:$\mathcal{C}$-完全集合)Aに対し,

(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$　　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$　　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$

(3) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$　　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

証明:

(1) Bを任意の$\mathcal{C}$集合とすると, Aは$\mathcal{C}$-困難だから, $B \leq_m^P A$

一方, $A \in \mathcal{P}$の仮定より, $B \in \mathcal{P}$

(2), (3), (4)も同様

定理12.3の意味(クラス$\mathcal{NP}$)

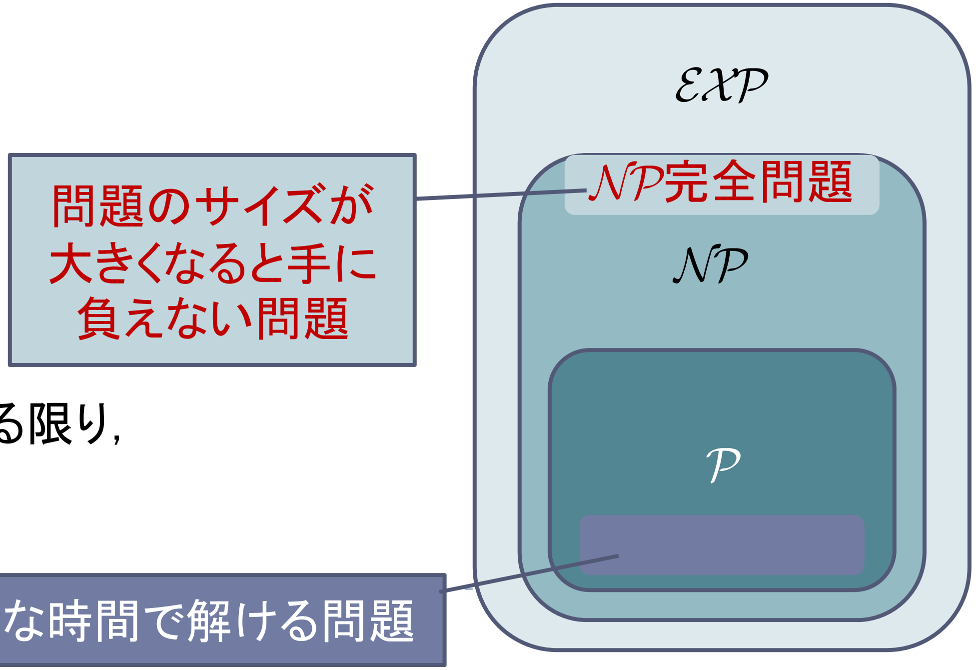
Aを$\mathcal{NP}$-完全集合とする.

定理12.3(1)の対偶より,

$\mathcal{NP} \neq \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

よって$\mathcal{NP}$-完全集合は$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$である限り,

多項式時間では認識できない.



多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

- 困難性と完全性の定義と基本的な性質

定理12.4: A: 任意の$\mathcal{C}$-完全集合
すべての集合Bに対し,
(1) $A \le_m^P B$ → Bは$\mathcal{C}$-困難.
(2) $A \le_m^P B \wedge B \in \mathcal{C}$ → Bは$\mathcal{C}$-完全.

完全集合が1つでも
見つかれば、そこから
芋づる式に困難性や
完全性を示すことができる。

証明:
定義12.5より, $\forall L \in \mathcal{C}[L \le_m^P A]$
定理12.2(2)より, $L \le_m^P A \wedge A \le_m^P B \to L \le_m^P B$
したがって, $\forall L \in \mathcal{C}[L \le_m^P B]$
すなわち, Bは$\mathcal{C}$-困難.

完全集合第1号
Cookの定理:3SATはNP完全集合
(証明: Turing Machine の計算プロセスを
すべて論理式で記述しなおす!!)

多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

困難性と完全性の証明方法

($\mathcal{NP}$)完全性の証明方法
(I) 定義通りに[すべてのL]について示す
(II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: Cookの定理(SATでTMを模倣)

基本的には…
1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する
→とても大変(手間がかかる)

3SATなどは、
形式が一様なので
扱いやすい

(II)の例: 世の中の$\mathcal{NP}$完全性の証明のほとんど

DHAMは一般のグラフ上で$\mathcal{NP}$完全

DHAMは平面グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全
DHAMは「頂点の次数＝3」に限定しても$\mathcal{NP}$完全
DHAMは2部グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全…

多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

困難性と完全性の証明

定理12.5: 以下にあげる集合はすべて$\mathcal{NP}$-完全
(1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元)
(2) DHAM, VC (3SATからの還元)
(3) KNAP, BIN (3SATからの還元とKNAP $\leq_m^P$ BIN)

(II) $\mathcal{NP}$完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:
1. 3SAT $\leq_m^P$ VC
2. DHAM $\leq_m^P$ 頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合
Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度ずつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でも$\mathcal{NP}$完全。
高々2だと多項式時間で計算可能。

定理12.5(2) : VC は $\mathcal{NP}$ 完全問題

[証明] VC $\in \mathcal{NP}$ なので、3SAT $\leq_m^P$ VC であることを示せばよい。

論理式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ が与えられたとする。
Fから以下の条件を満たすグラフと自然数の組$\langle G, k\rangle$が
多項式時間で構成できることを示す:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^-と、辺(x_i^+, x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

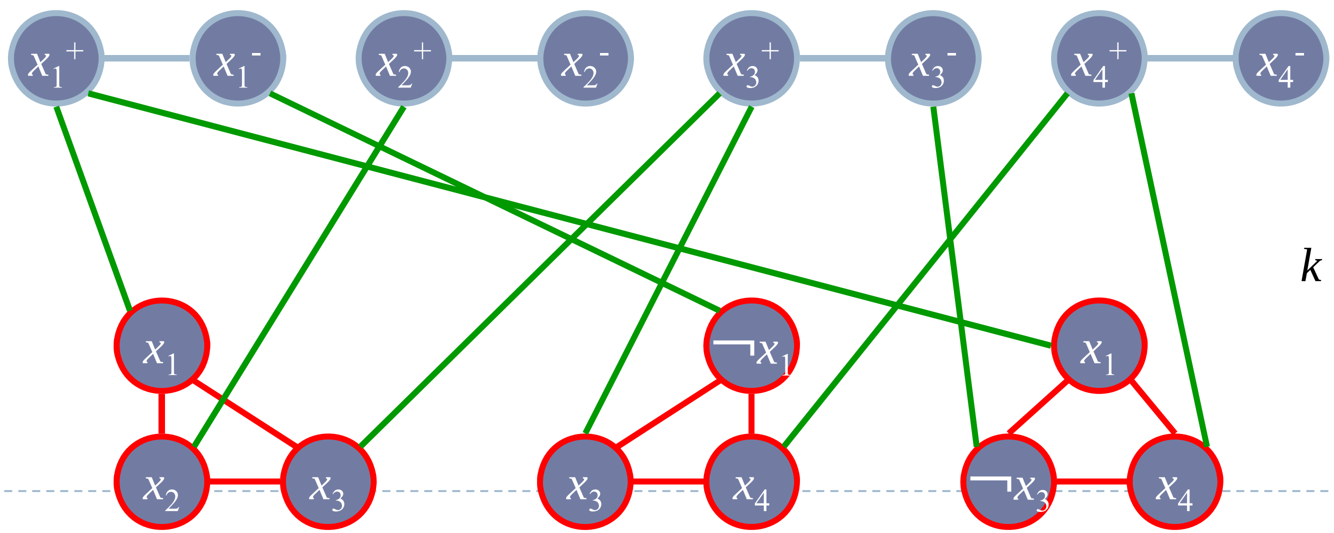
Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^-と、辺(x_i^+, x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺$(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})$を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1}, x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1}, x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

Gの構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能 。したがって以下を示せばよい:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

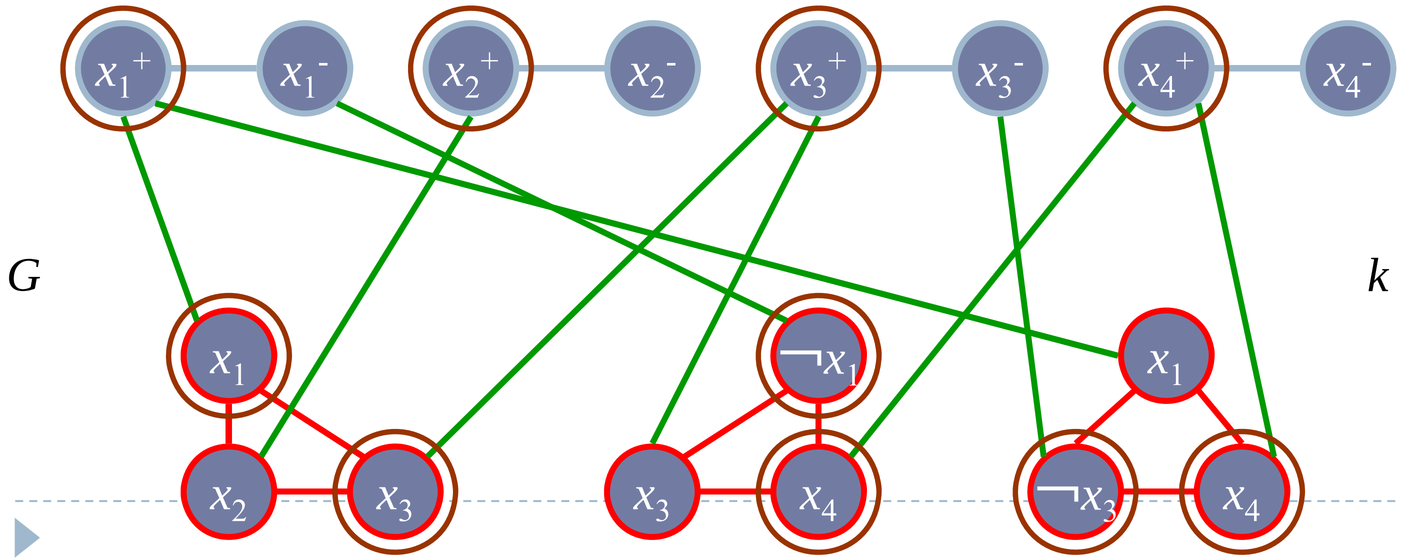
観察:

Gの構成から任意の頂点被覆Sは

- x_i^+, x_i^-のどちらかを含む
- C_jの3頂点中、最低2つ含む

よって $|S| \geqq n+2m = k$ である。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2 \times 3=10$

Fを1にする割当が存在する⇒Gがサイズkの頂点被覆を持つ

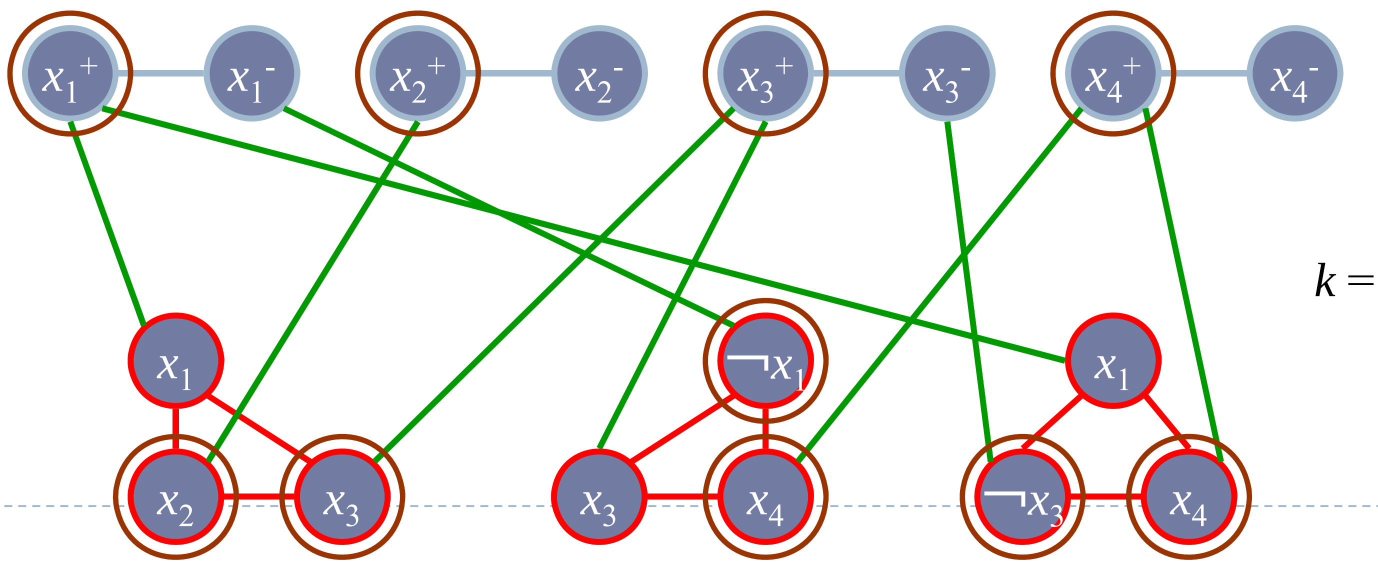
1. それぞれの変数 x_i が
$$\begin{cases} x_i=1 \text{なら } x_i^+ \text{を} S \text{に入れる} \\ x_i=0 \text{なら } x_i^- \text{を} S \text{に入れる} \end{cases}$$

2. それぞれの項$C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ は充足されているので、最低1つのリテラル(l_{i1})については変数との間の辺(l_{i1},x_{i1})は x_{i1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル(l_{i2},l_{i3})を S に入れる。

⇒ **観察** より、Sはサイズkの頂点被覆になる。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2\times 3=10$

Gがサイズkの頂点被覆を持つ$\Rightarrow$ Fを1にする割当が存在する

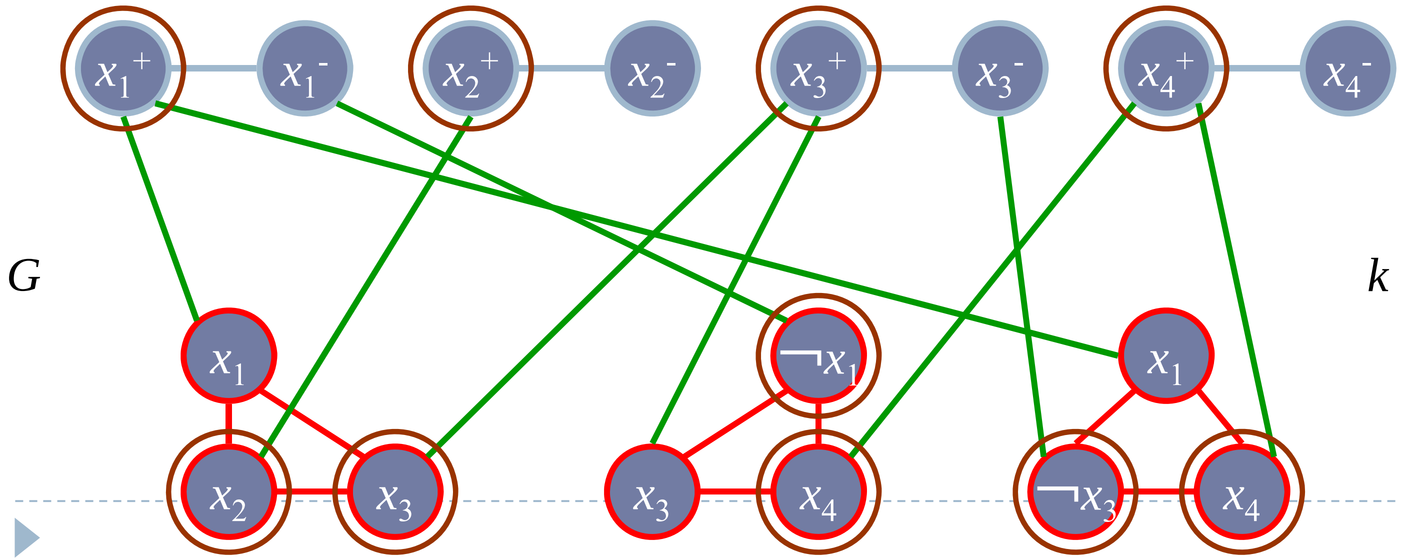
1. **観察** より、被覆Sは項から$2m$個、変数からn個の頂点を含む。

2. さらに各変数x_iについてはx_i^+かx_i^-の一方しか、
   各項C_jについてはちょうど2つの頂点しかSに含むことができない。

3. よって各項C_jはSに含まれないリテラルl_iを含むが、
   これに付随する辺は他方が被覆されていなければならない。

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} x_i^+ \text{が} S \text{に含まれるなら } x_i=1 \\ x_i^- \text{が} S \text{に含まれるなら } x_i=0 \end{array} \right) \text{という割当は} F \text{を充足する。}$$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



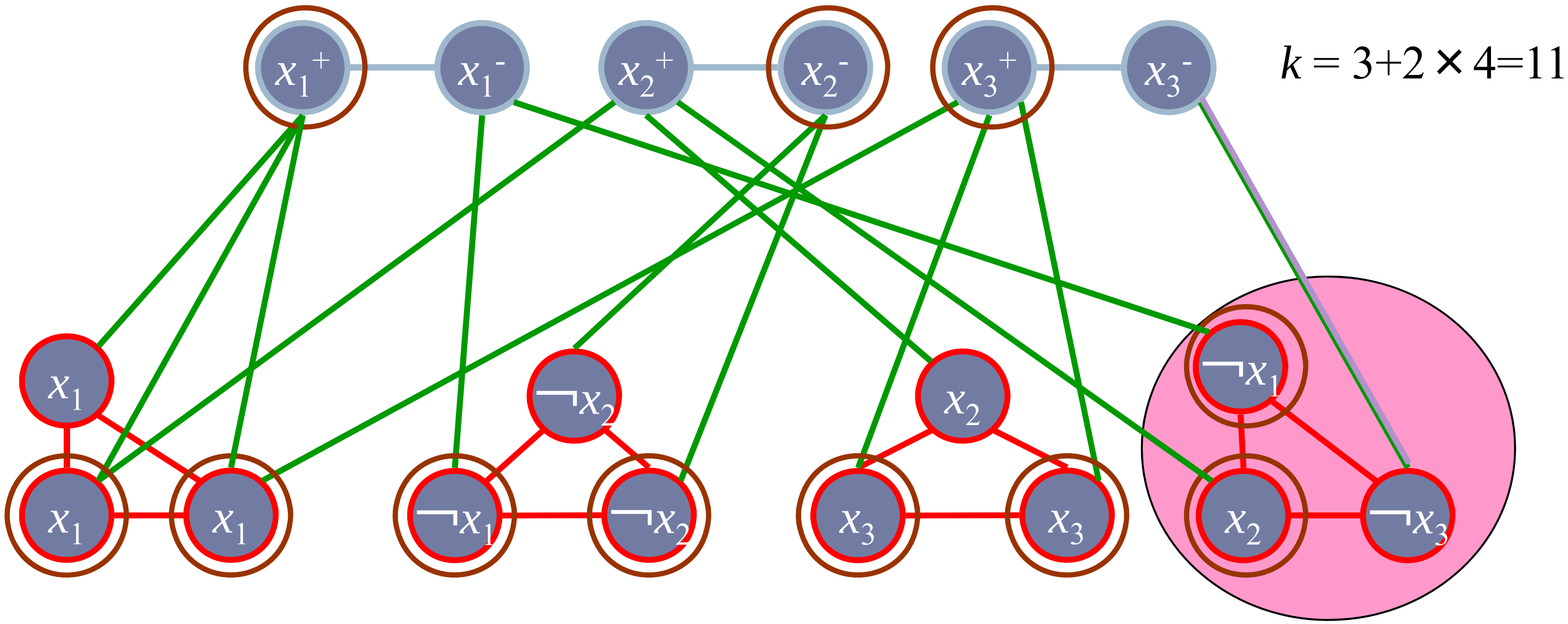
$k = 4+2\times3=10$

QED.

充足できない例:

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \lor x_1 \lor x_1) \land (\neg x_1 \lor \neg x_2 \lor \neg x_2) \land (x_2 \lor x_3 \lor x_3) \land (\neg x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3)$$

G



充足できないFでは、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは k+1以上になる。

定理12.6: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

次数: 頂点に付随する辺の本数

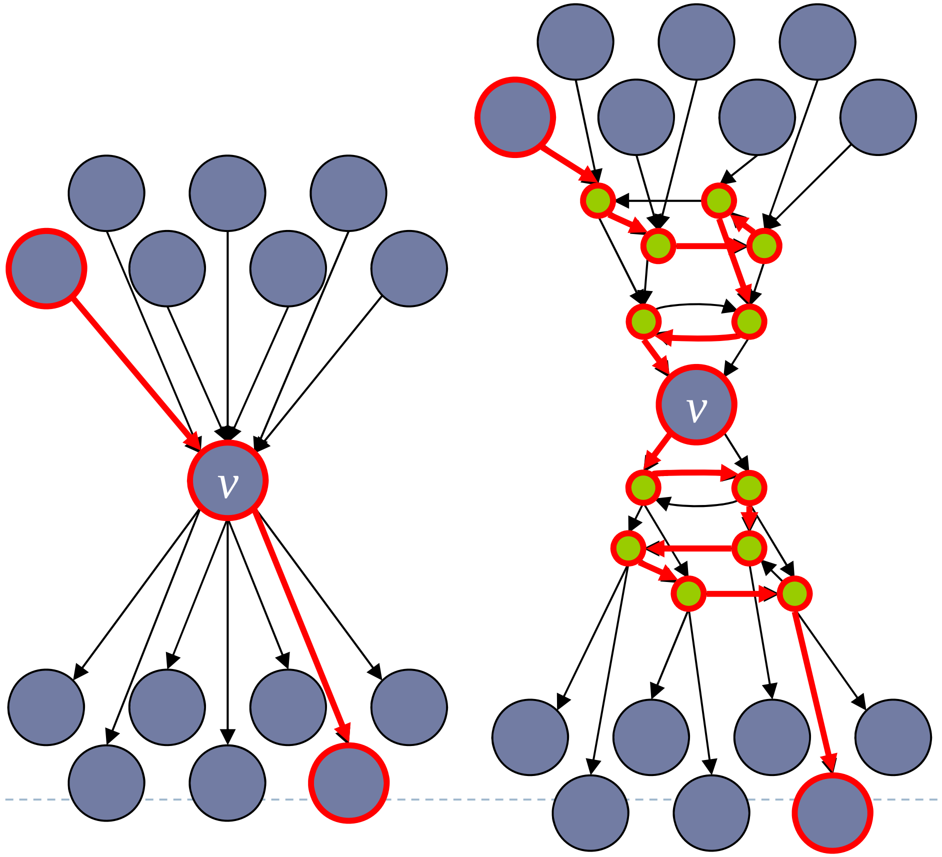
[証明] (上記の問題をDHAM$_{\leqq 5}$と略記する)

DHAM$_{\leqq 5}$ が$\mathcal{NP}$に属するのは、DHAMが$\mathcal{NP}$に属することから自明。したがって完全性を示せばよい。
DHAM $\leq_m^P$DHAM$_{\leqq 5}$を示す。

アイデア:

次数14の頂点v(左)の(入ってくる辺集合)と(出ていく辺集合)を右図の`gadget’で置き換える

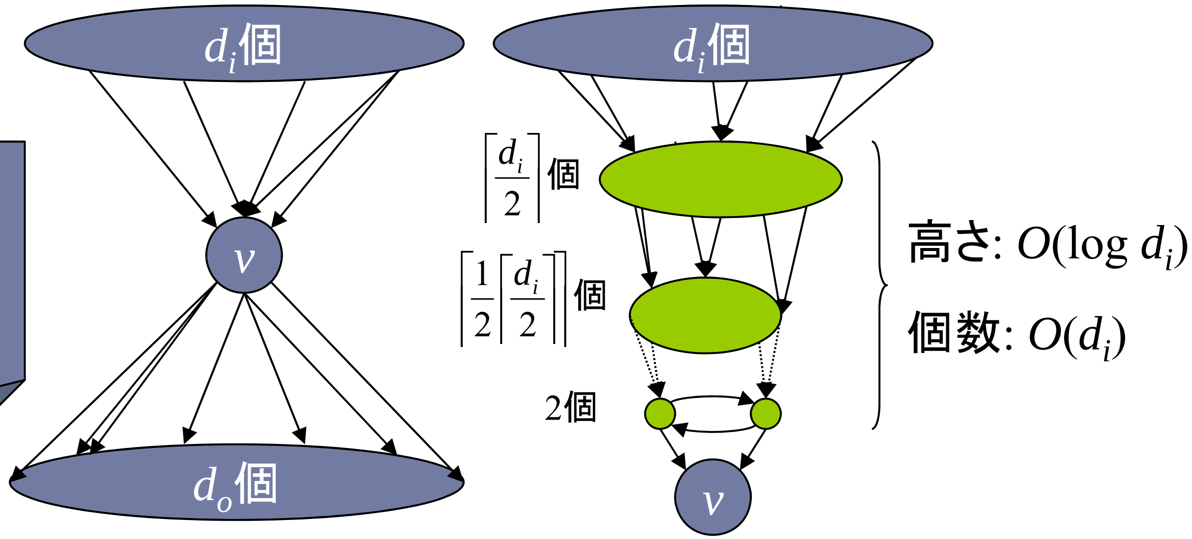
左図でvを1度だけ通る閉路と右図でvを1度だけ通る閉路は対応する。



定理12.6: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

アイデア:

ポイント:
- 各閉路は上から下
- 各頂点は次数≦5



[証明(概要)]

与えられたグラフGの次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

1. 元のグラフGがn頂点m辺であったなら、gadget で置き換えたあとのグラフG'は$O(n+m)$頂点 $O(m)$辺となる。したがって上記の還元はGの大きさの多項式時間で可能。
2. またG'のすべての頂点は次数はたかだか5である。
3. Gがハミルトン閉路をもつ⇔G'がハミルトン閉路を持つ

QED.

Addition (おまけ)

多くの「難しく」て「自然」な問題は
- 多項式時間で解けるか、さもなくば
- NP困難

- R. Uehara, S. Iwata:
  Generalized Hi-Q is NP-complete,
  The Transactions of the IEICE, E73, p.270-273, 1990.
- P. Zhang, H. Sheng, R. Uehara:
  A Double Classification Tree Search Algorithm for Index SNP Selection, *BMC Bioinformatics*, 5:89, 2004.
- R. Uehara, S. Teramoto:
  Computational Complexity of a Pop-up Book,
  4th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, 2006.
- E. Demaine, M. Demaine, R. Uehara, T. UNO, Y. UNO:
  UNO is hard, even for a single player,
  Theoretical Computer Science, accepted, 2013.
- 『ゲームとパズルの計算量』ロバート・A・ハーン, エリック・D・ドメイン著, 上原隆平訳, 近代科学社, 2011年8月.

参考文献

- $\mathcal{NP}$完全性にまつわる話は「計算量の理論」と呼ばれる分野
- JAISTの講義ではI216「計算の理論と離散数学」の中の1/2くらいで扱っている
  - 「計算理論の基礎」シプサ著、太田・田中・阿部・植田・藤岡・渡辺訳、共立出版
  - 「オートマトン・言語理論・計算論」ホップクロフト・ウルマン・モトワニ著、野崎・町田・高橋・山崎訳、サイエンス社
  - 「計算可能性・計算の複雑さ入門」渡辺治著、近代科学社