

# 複数の整凸面多面体が折れる 展開図の最近の結果

アルゴリズムとデータ構造による高速化技法2種

上原隆平

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

## 参考文献

- D. Xu, T. Horiyama, T. Shirakawa and R. Uehara: Common Developments of Three Incongruent Boxes of Area 30, [The 12th Annual Conference on Theory and Applications of Models of Computation \(TAMC 2015\)](#), Lecture Notes in Computer Science Vol. 9076, pp. 236-247, 2015/05/18-2015/05/20, Singapore.
- Y. Araki, T. Horiyama and R. Uehara: Common Unfolding of Regular Tetrahedron and Johnson-Zalgaller Solid, [The 9th Workshop on Algorithms and Computation \(WALCOM 2015\)](#), Lecture Notes in Computer Science Vol. 8973, pp. 294-305, 2015/02/26-2015/02/28, Dhaka, Bangladesh.

# その1:面積30の3つの箱の共通の展開図の高速発見手法

Dawei Xu (北陸先端科学技術大学院大学)

堀山 貴史 (埼玉大学)

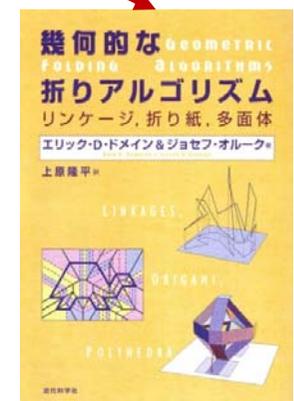
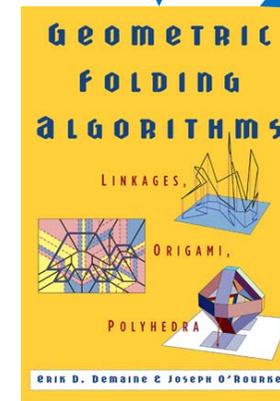
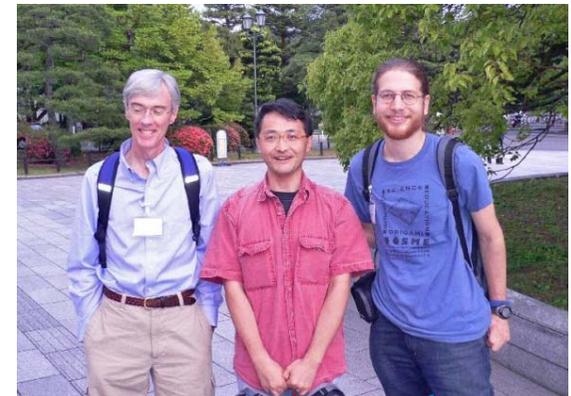
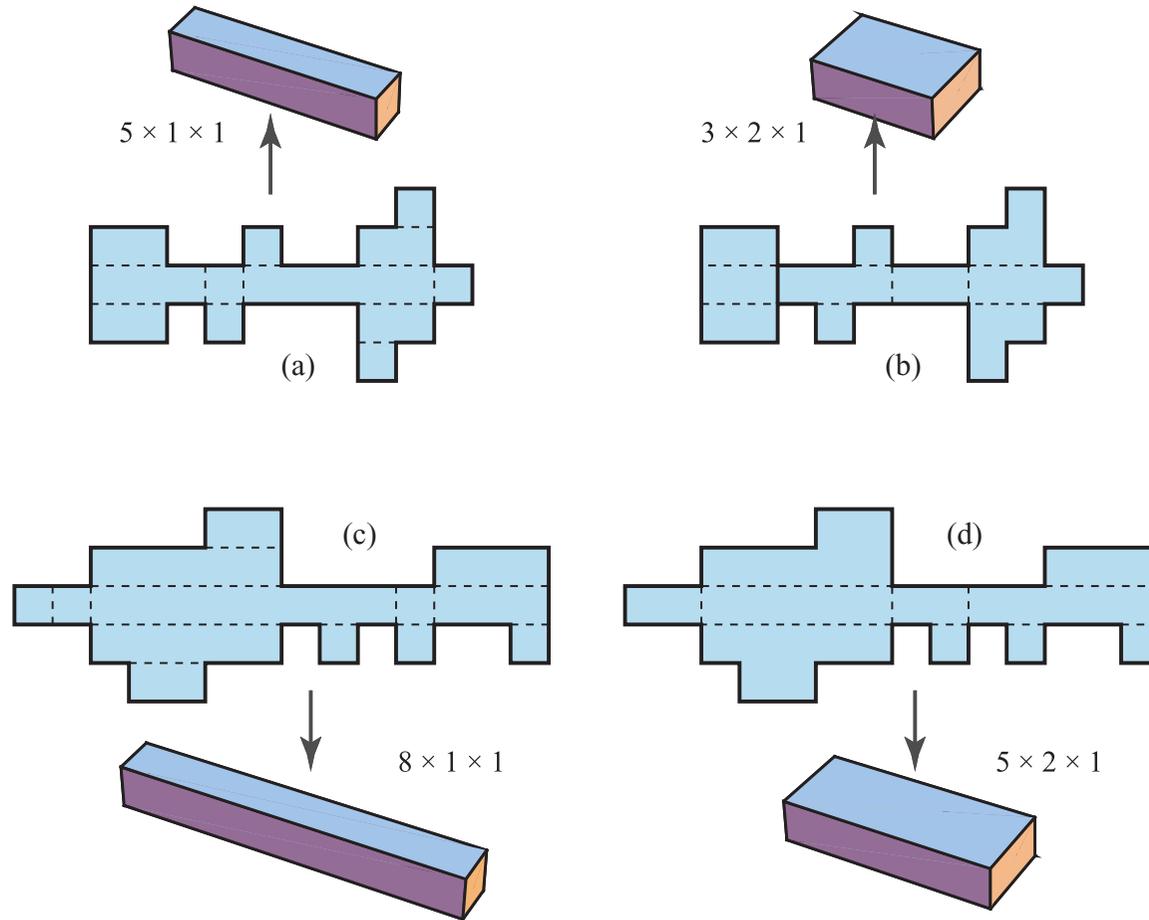
白川 俊博 (アマチュア数学者)

上原 隆平 (北陸先端科学技術大学院大学)

## 参考文献

- D. Xu, T. Horiyama, T. Shirakawa and R. Uehara: Common Developments of Three Incongruent Boxes of Area 30, [The 12th Annual Conference on Theory and Applications of Models of Computation \(TAMC 2015\)](#), Lecture Notes in Computer Science Vol. 9076, pp. 236-247, 2015/05/18-2015/05/20, Singapore.

# 2つの箱の共通の展開図

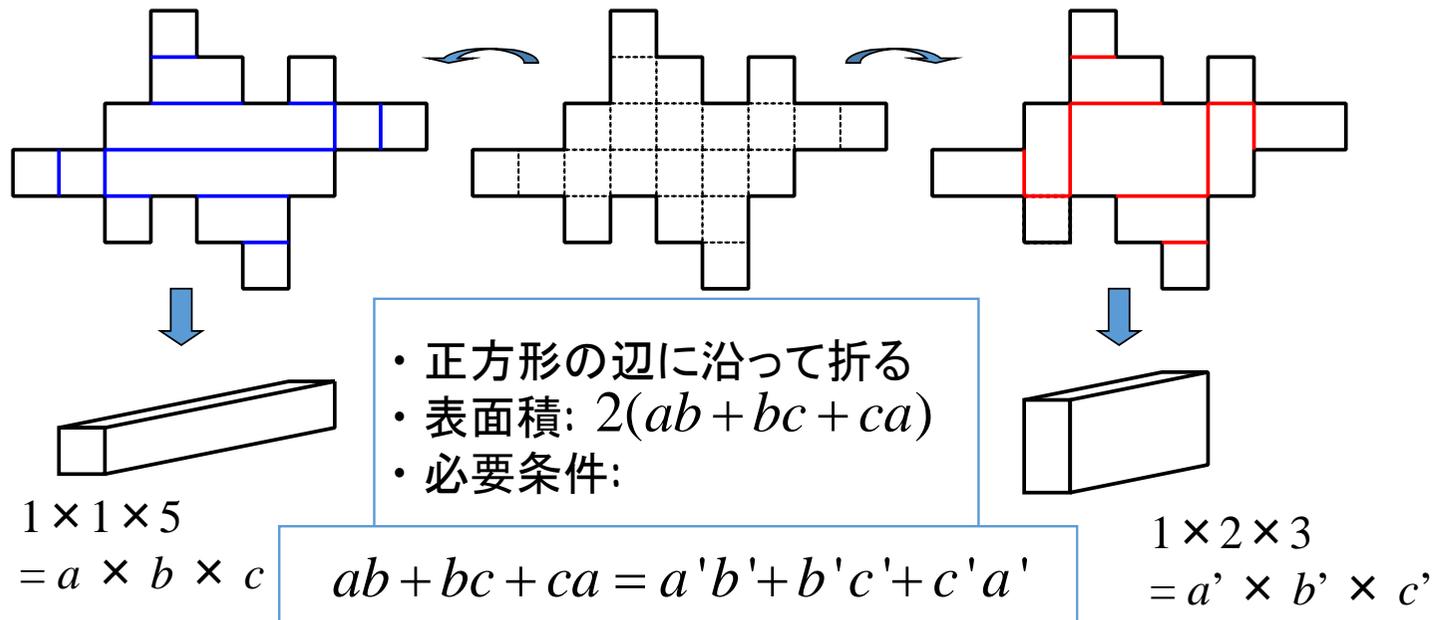


[Biedl, Chan, Demaine, Demaine, Lubiw, Munro, Shallit, 1999]

# 2つの箱の共通の展開図

[ Uehara, Mitani 2007 ]

- 約 9,000個を、スパコン (SGI Altix 4700) で(ランダムに)発見
  - randomized algorithm
- 無限に存在することを証明



# 共通の表面積

面積	辺の長さの三つ組	面積	辺の長さの三つ組
<b>22</b>	(1,1,5),(1,2,3)	46	(1,1,11),(1,2,7),(1,3,5)
30	(1,1,7),(1,3,3)	70	(1,1,17),(1,2,11),(1,3,8),(1,5,5)
<b>34</b>	(1,1,8),(1,2,5)	94	(1,1,23),(1,2,15),(1,3,11), (1,5,7),(3,4,5)
38	(1,1,9),(1,3,4)	118	(1,1,29),(1,2,19),(1,3,14), (1,4,11),(1,5,9),(2,5,7)

既知の結果

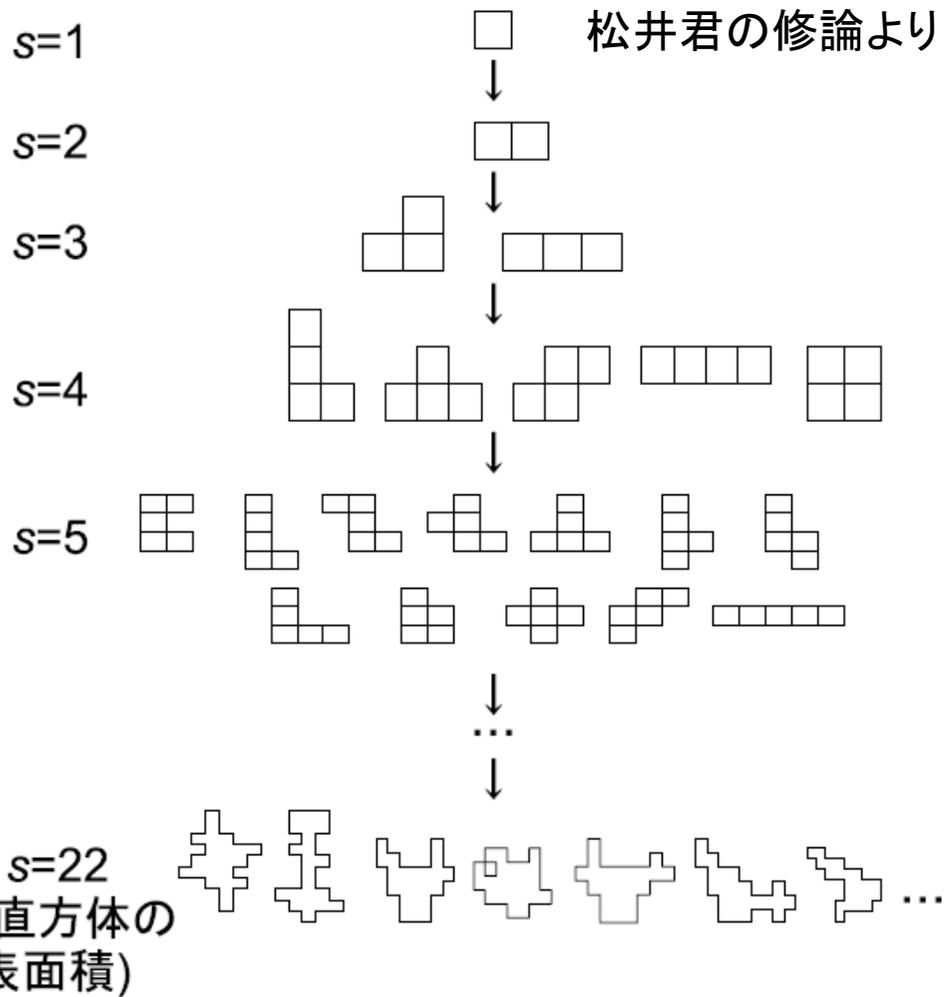
[おまけ] (奥村 2014)  
 どんな  $k$  に対しても、「 $k$  個以上の表面積が同じになる三つ組」は存在する.

# 共通の展開図の全探索

[ Abel, Demaine, Demaine, Matsui, Rote, Uehara 2011 ]

- $1 \times 1 \times 5$  の箱 と  $1 \times 2 \times 3$  の箱
  - 共通の展開図をすべて列挙：2,263個
  - 計算時間：10 時間(2011), 5時間(2014-2015)

# 共通の展開図の全探索

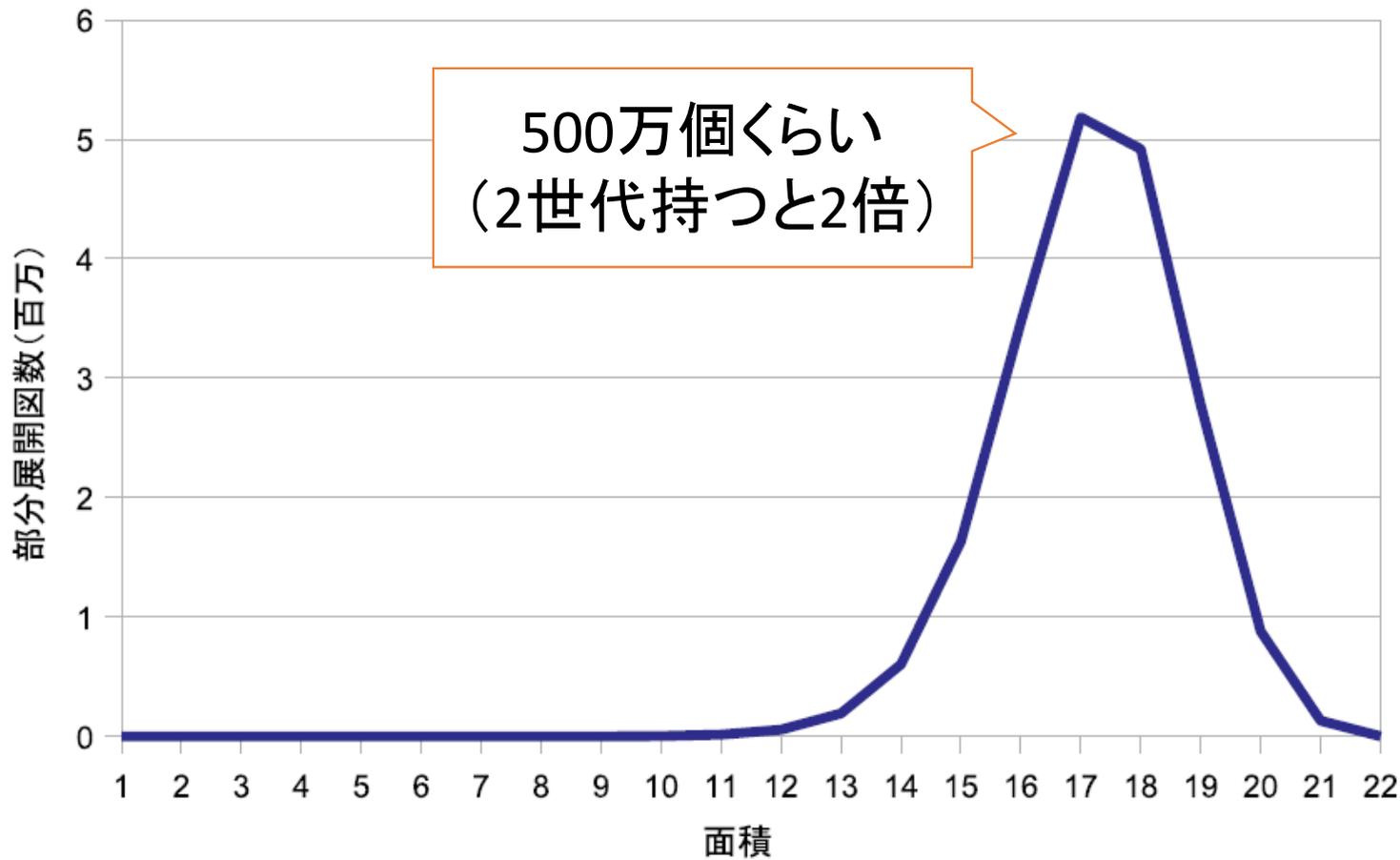


- $1 \times 1 \times 5$  の箱 と  $1 \times 2 \times 3$  の箱
- 計算時間: **10 時間**
- 面積  $i$  のポリオミノで, どちらの箱も貼れる「部分展開図」を  $i=1, 2, \dots, 22$  まで生成.

2,263個

# 共通の展開図の全探索

松井君の修論より



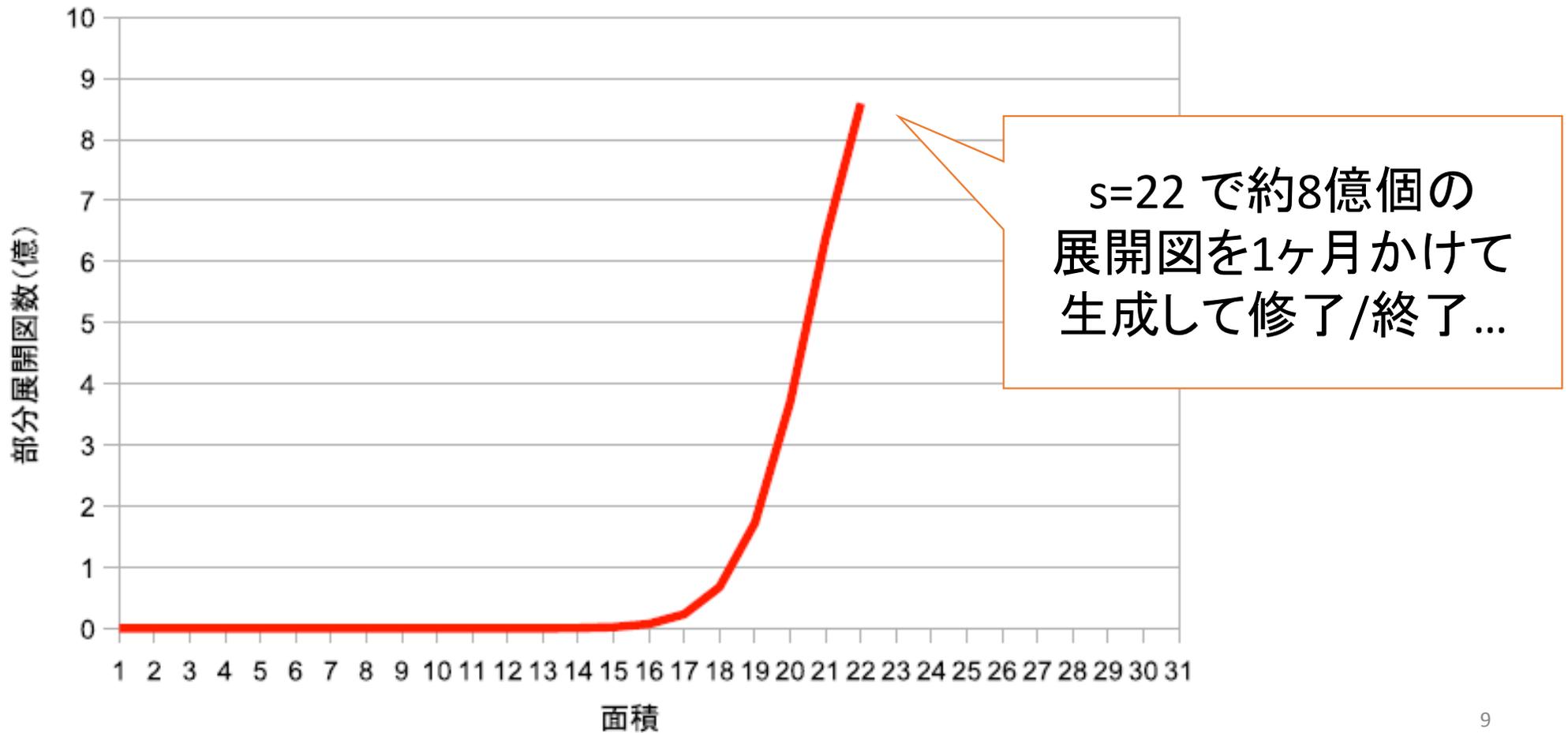
箱と  $1 \times 2 \times 3$  の箱

: 10 時間

ポリオミノで, どちらの箱  
部分展開図」を  $i=1, 2, \dots,$   
成.

# 次に小さい面積30に挑戦！

松井君の修論(2011)より



# 共通の表面積

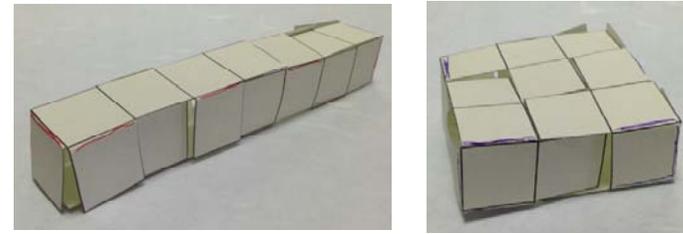
面積	辺の長さの三つ組	面積	辺の流さの三つ組
<b>22</b>	(1,1,5),(1,2,3)	46	(1,1,11),(1,2,7),(1,3,5)
<b>30</b>	(1,1,7),(1,3,3)	70	(1,1,17),(1,2,11),(1,3,8),(1,5,5)
34	(1,1,8),(1,2,5)	94	(1,1,23),(1,2,15),(1,3,11), (1,5,7),(3,4,5)
38	(1,1,9),(1,3,4)	118	(1,1,29),(1,2,19),(1,3,14), (1,4,11),(1,5,8)

ところで面積30:

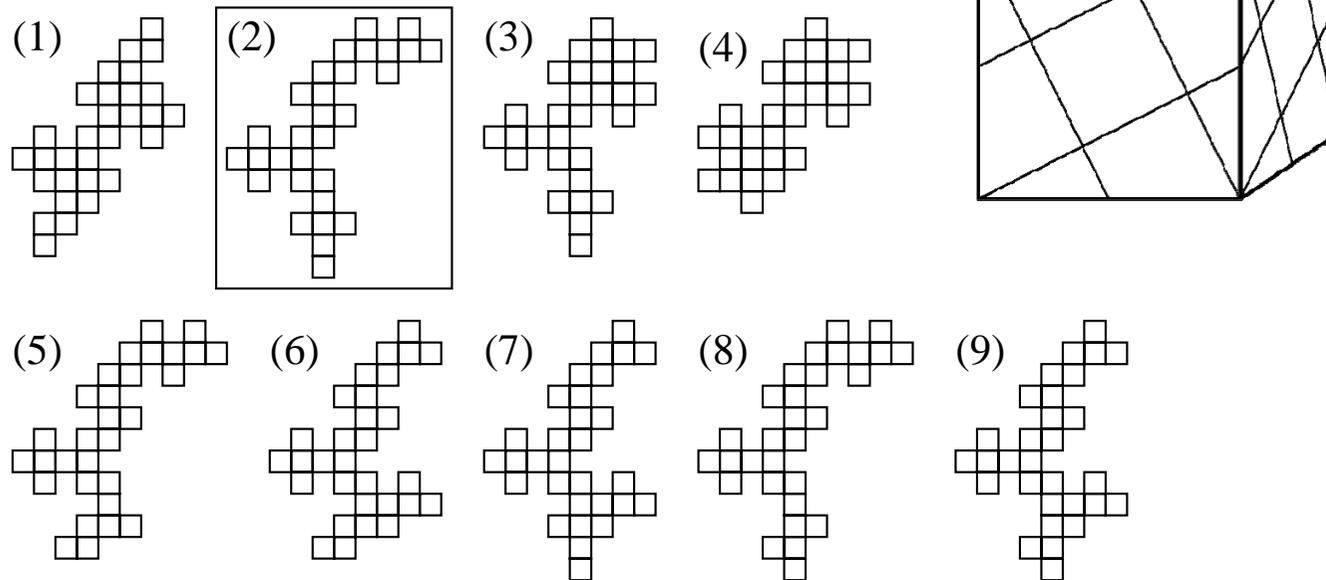
- 22の次に小さい
- $1 \times 1 \times 7$ と $1 \times 3 \times 3$ の箱が折れる
- $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ の立方体が折れるかも!?

By 白川 with  
 $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ と $1 \times 3 \times 3$   
 の共通の展開図

# 結果[Dawei他2015]

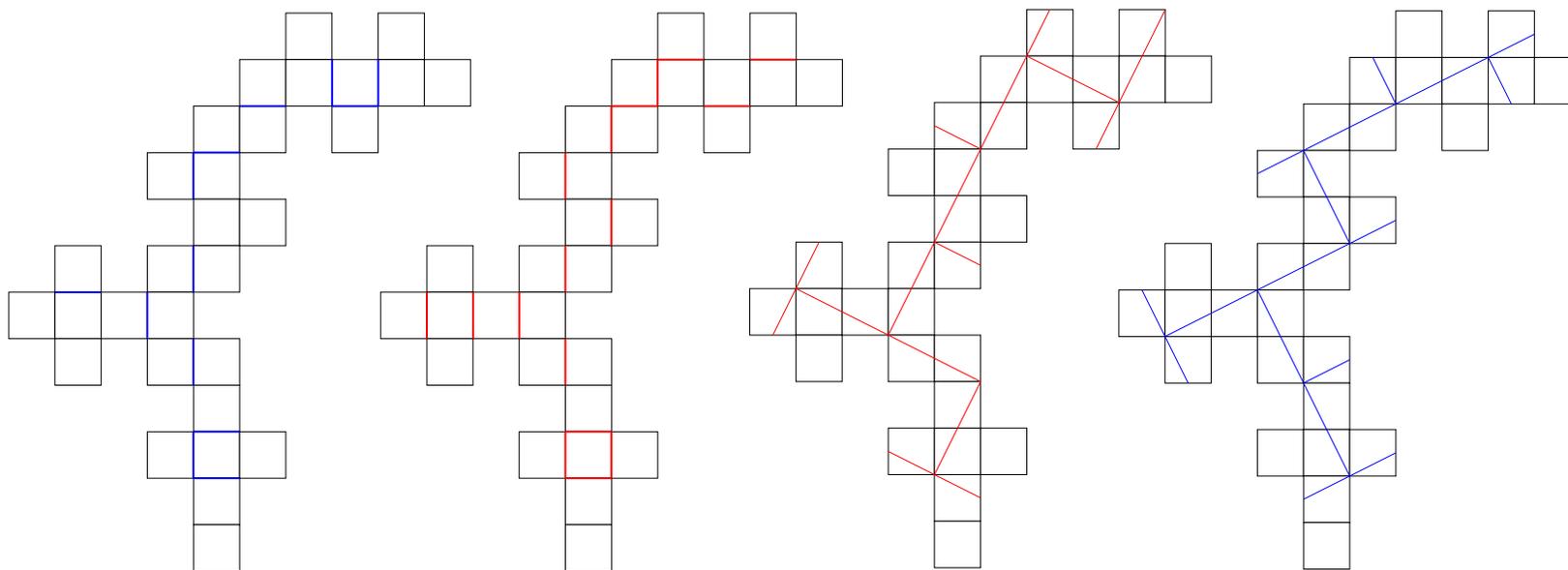


- $1 \times 1 \times 7$  の箱、 $1 \times 3 \times 3$  の箱、共通の展開図: **1,080 個**
- $1 \times 1 \times 7$  の箱、 $1 \times 3 \times 3$  の箱、 **$\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$**  の箱: **9 個**

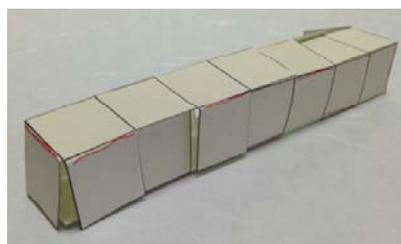


# 結果[Dawei他2015]

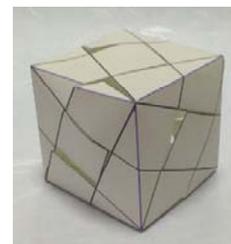
- (2) の展開図には、4通りの折り方が存在



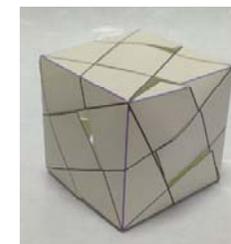
1x3x3



1x1x7



$\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$



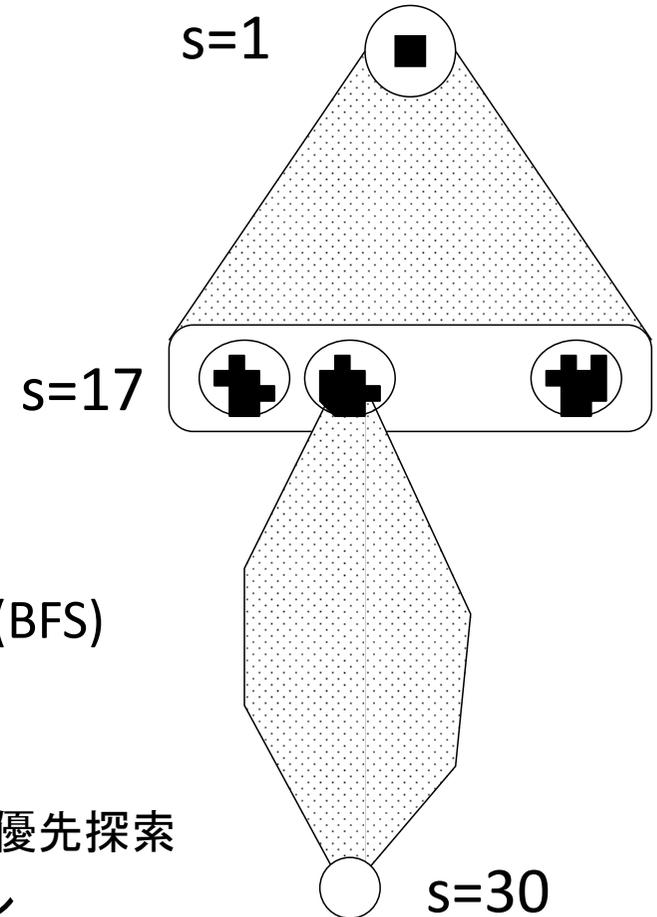
$\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$

# 二つの方法

- アプローチ1(松井君の方法の自然な拡張)
  1. 面積  $i$  の共通部分展開図をもとに面積  $i+1$  の共通部分展開図を求める
    - $1 \times 1 \times 7$ ,  $1 \times 3 \times 3$  の両方になり得るものを残す
  2. 最後に  $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$  が折れるかどうかをチェック

## ステップ1の詳細:

- JAISTのスパコン(Cray XC30)を使用して幅優先探索(BFS)
  - 面積22あたりでスパコンのメモリがあふれる;-)
  - ハイブリッド探索:
    - 面積17まで幅優先探索をして, そこからは一つずつ深さ優先探索
- ⇒ここがボトルネック! スパコンで2ヶ月~3ヶ月レベル



## 二つの方法

- アプローチ2 (Binary Decision Diagramを使った方法):
  - $1 \times 1 \times 7$ ,  $1 \times 3 \times 3$ ,  $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$   
それぞれの箱の展開図を列挙 (ZDDを利用)
  - 共通の展開図をチェック

展開図 6,671,469,328個

37,054,664,336個

## 二つの方法

- アプローチ2 (Binary Decision Diagramを使った方法):
  - $1 \times 1 \times 7$ ,  $1 \times 3 \times 3$ ,  $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$   
それぞれの箱の展開図を列挙 (ZDDを利用)
  - 共通の展開図をチェック
    - $1 \times 1 \times 7$  vs  $1 \times 3 \times 3$  : 7.7 日
    - (  $1 \times 1 \times 7$  vs  $1 \times 3 \times 3$  ) の結果 vs  $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$  : 2.5 日

パソコン (Intel Xeon E5-2643 (3.3GHz), 128GB メモリ)  
10.2日 (注: 方法1では Cray XC30 で2ヶ月強)



いわゆる「お姉さん動画」が予想以上のヒット!

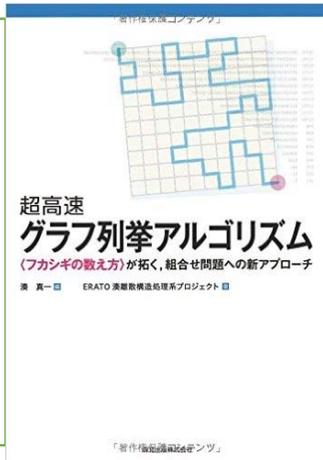
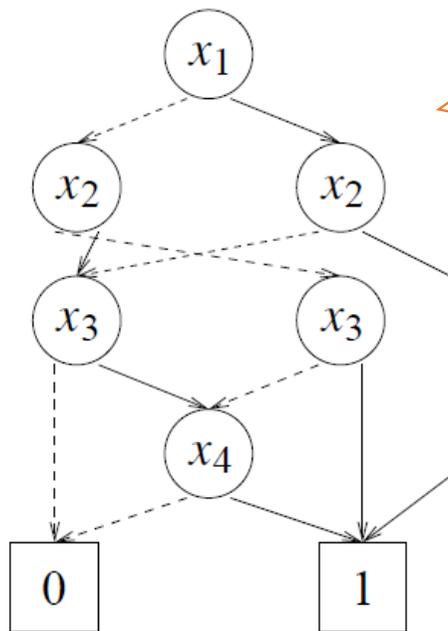


Diagram とは



日本でERATO湊プロジェクトが採択され、

の構造があれば、縮約して圧縮したもの



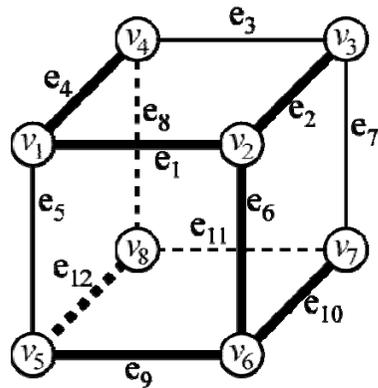
例: 集合族  
 $\{\{1,2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{3\}, \{4\}\}$   
 を表すZDD (Zero-suppressed BDD)

- > 0-edge
- > 1-edge
- constant node
- variable node



D. Knuth がTAOCPのVol.4で詳しく取り上げ、

# 展開図のBDDによる表現方法

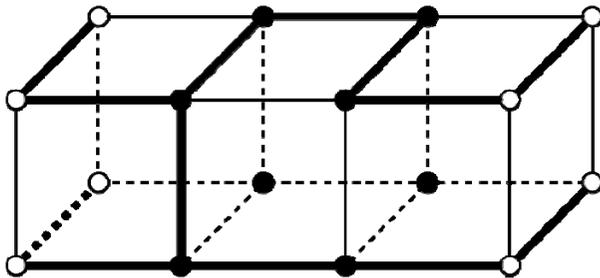


- 「切る」辺の集合は
  - 「切る」辺がサイクルを持たない
  - 「切る」辺は、頂点を結ぶ (全頂点を結ぶ)

各辺ごとに変数を割り当てて  
切る/切らないをZDDで表現  
⇒ 劇的な省メモリ化と、高速  
処理が可能になった！

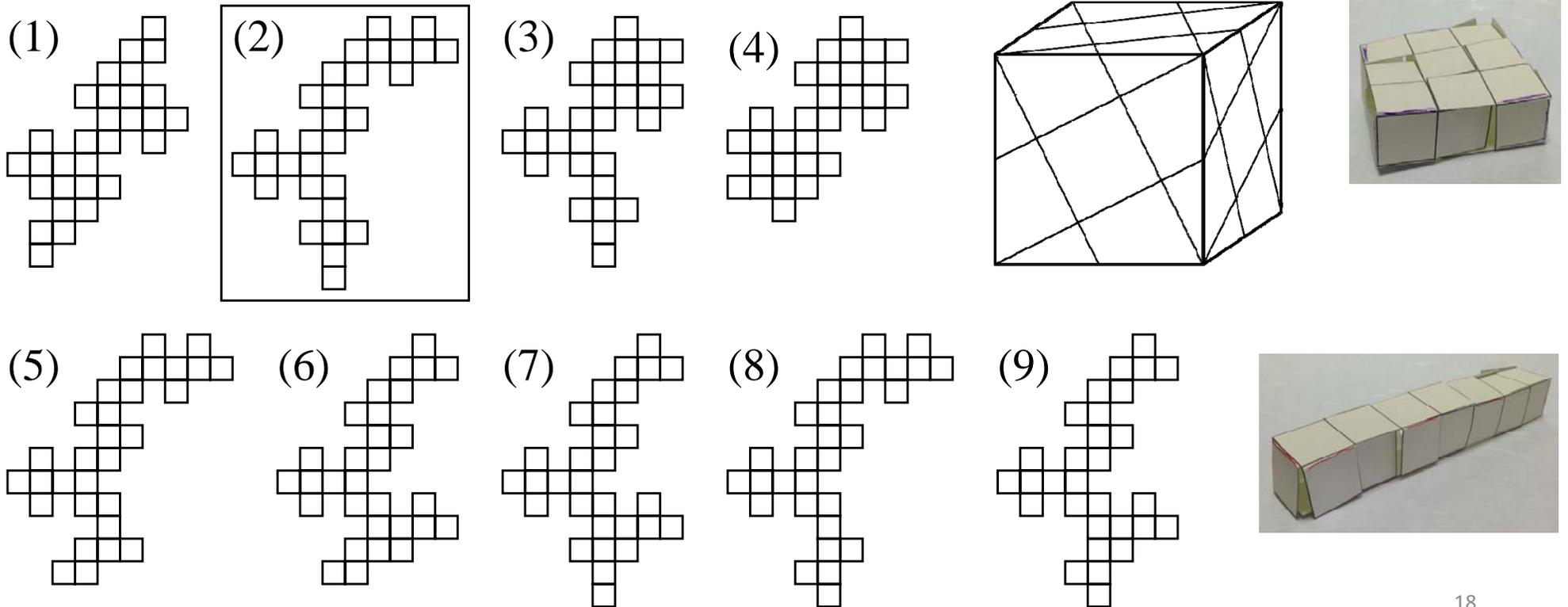
- 「切る」辺の集合は、**全域木もどき**

- 「切る」辺がサイクルを持たない
- 角の 8 点を結ぶ
- 「切る」辺の次数
  - 角の頂点： 次数 1 以上
  - 角以外の頂点： 次数 1 NG



# まとめ

- $1 \times 1 \times 7$  の箱、 $1 \times 3 \times 3$  の箱、共通の展開図: 1,080個
- $1 \times 1 \times 7$  の箱、 $1 \times 3 \times 3$  の箱、 **$\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$**  の箱: 9個



# その2: 正四面体が折れるジョンソン・ザルガラー立体 の辺展開図について(折れない方の高速検査)

辺展開: 辺に沿った線で切って展開  
一般展開: 面の中を切ってもよい展開

荒木 義明 (日本テセレーションデザイン協会)

堀山 貴史 (埼玉大学)

上原 隆平 (北陸先端科学技術大学院大学)

## 参考文献

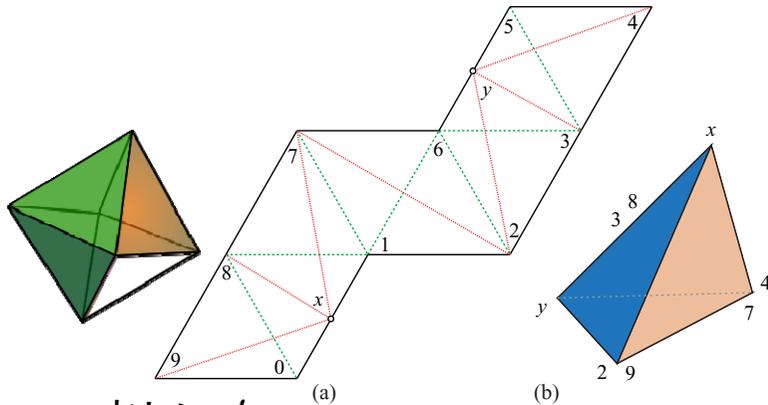
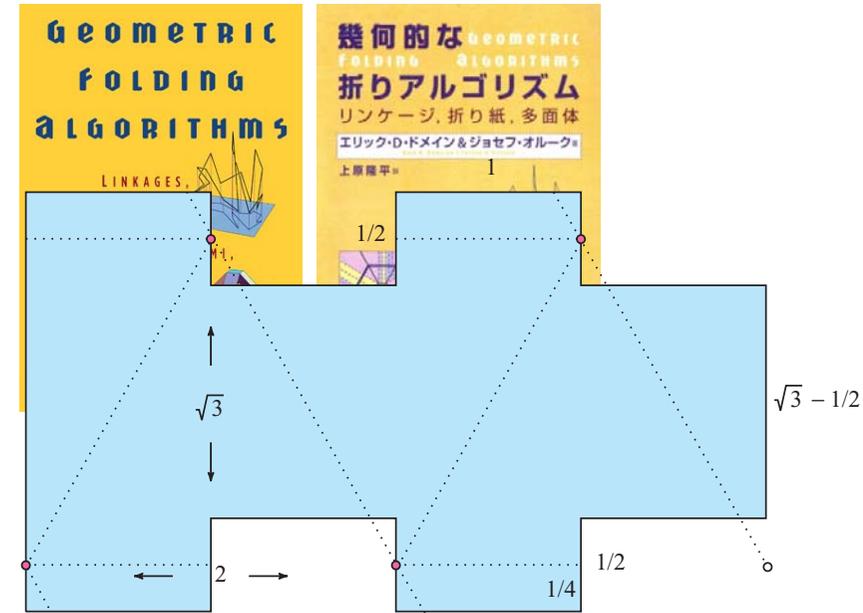
- Y. Araki, T. Horiyama and R. Uehara: Common Unfolding of Regular Tetrahedron and Johnson-Zalgaller Solid, [The 9th Workshop on Algorithms and Computation \(WALCOM 2015\)](#), Lecture Notes in Computer Science Vol. 8973, pp. 294-305, 2015/02/26-2015/02/28, Dhaka, Bangladesh.

# Open Problem 25.6

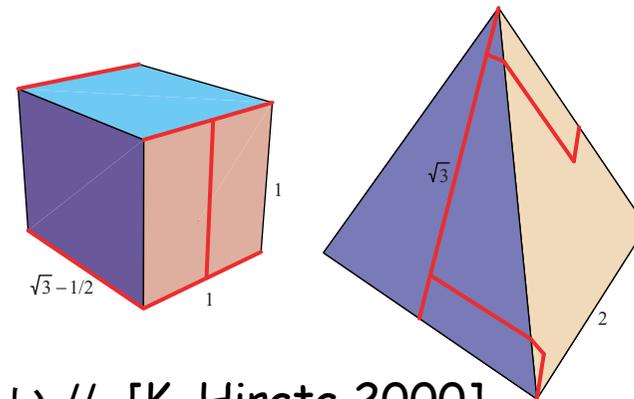
(by M. Demaine, F. Hurtado, E. Pegg)

- ある正多面体を切り開いて1個の多角形にし、そこから異なる正多面体を折ることは可能だろうか？

(2つの正多面体が**共通の展開図**を持つか?)



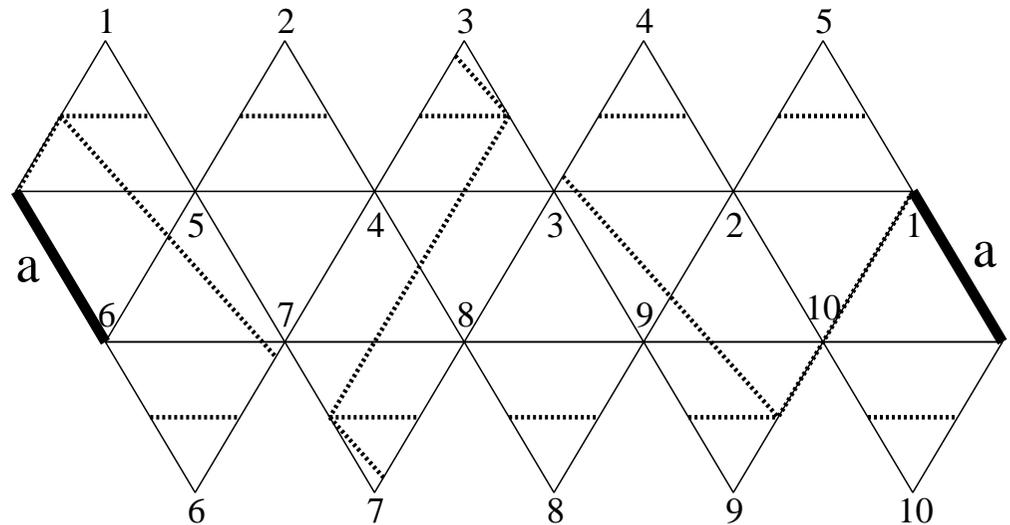
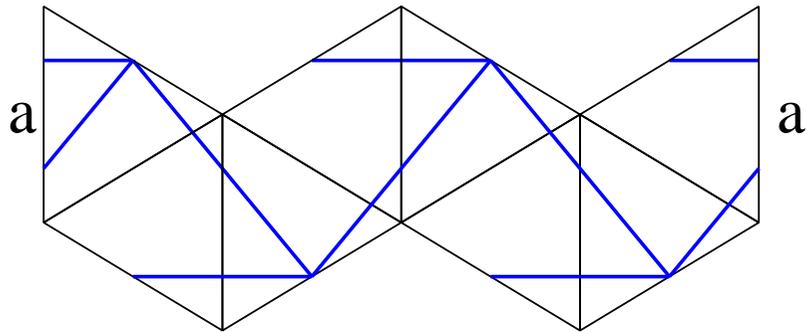
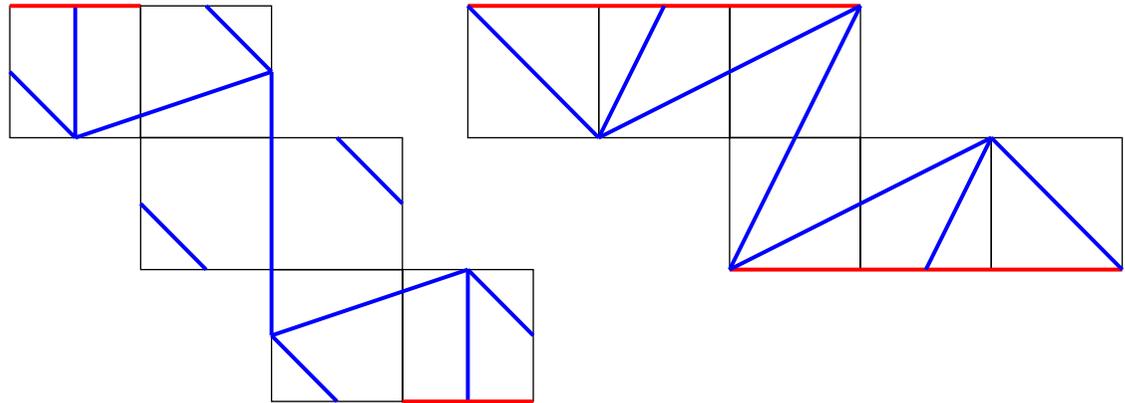
おいしい!  
 Regular Octahedron  
 ⇔ Tetramonohedron (面が合同)



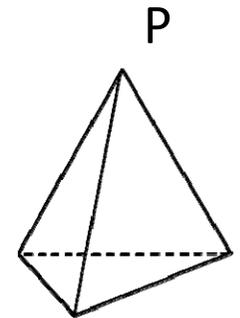
おいしい!! [K. Hirata 2000]  
 Regular Tetrahedron  
 ⇔ Box  $1 \times 1 \times 1.232$

# 共通の展開図

- おしい [Uehara 2010]



# 展開図の(ほぼ唯一の)美しい特徴づけ



## 正4面体と4単面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

[正4面体の展開図定理(秋山 2007)]

正4面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。

- (1) Pは **p2 タイリング**。つまり $180^\circ$  回転で敷詰め可能
- (2) **回転中心**の **4** 頂点が正三角格子をなす
- (3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

Tile-Makers and Semi-Tile Makers,  
Jin Akiyama, *The Mathematical Association of America, Monthly* 114,  
pp. 602-609, 2007.

[直感的な説明]

平面上で正4面体を4回、  
上手に転がすと、元に戻る。  
各面にインクをつけて転がすと  
平面全体にスタンプを押せる。

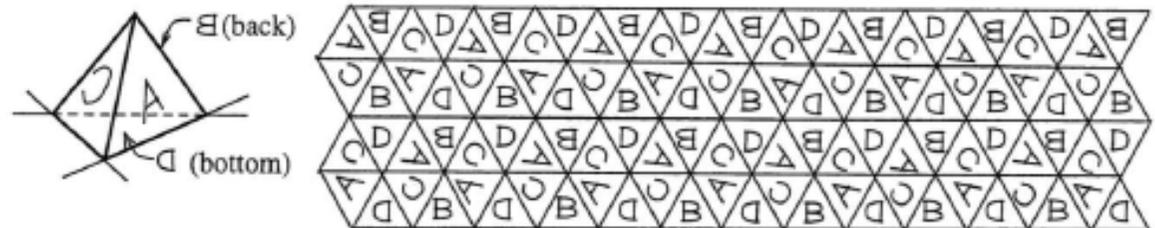


Figure 2.1. Carved regular tetrahedron R and the tiling by stamping with R.

[**4単面体**の展開図定理(秋山、奈良 2007)]: 上記の正三角格子をゆがませる

# 共通の展開図

あたりまえ？

立方体の辺展開：  
11種類

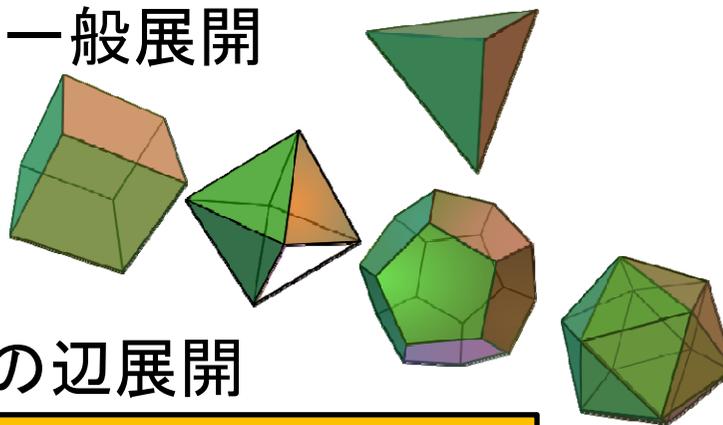
正8面体の辺展開：  
11種類

- Theorem [Horiyama, Uehara 2010]

以下を同時に満たす多角形 P は、存在しない

(1) P は、**正四面体**の一般展開

(2) P は、**立方体**、  
**正八面体**、  
**正十二面体**、  
**正二十面体**の辺展開

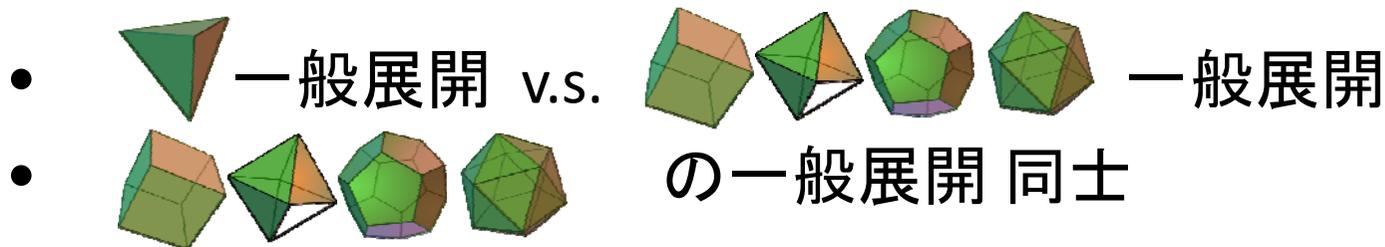


正12面体の辺展開：  
43380種類

正20面体の辺展開：  
43380種類

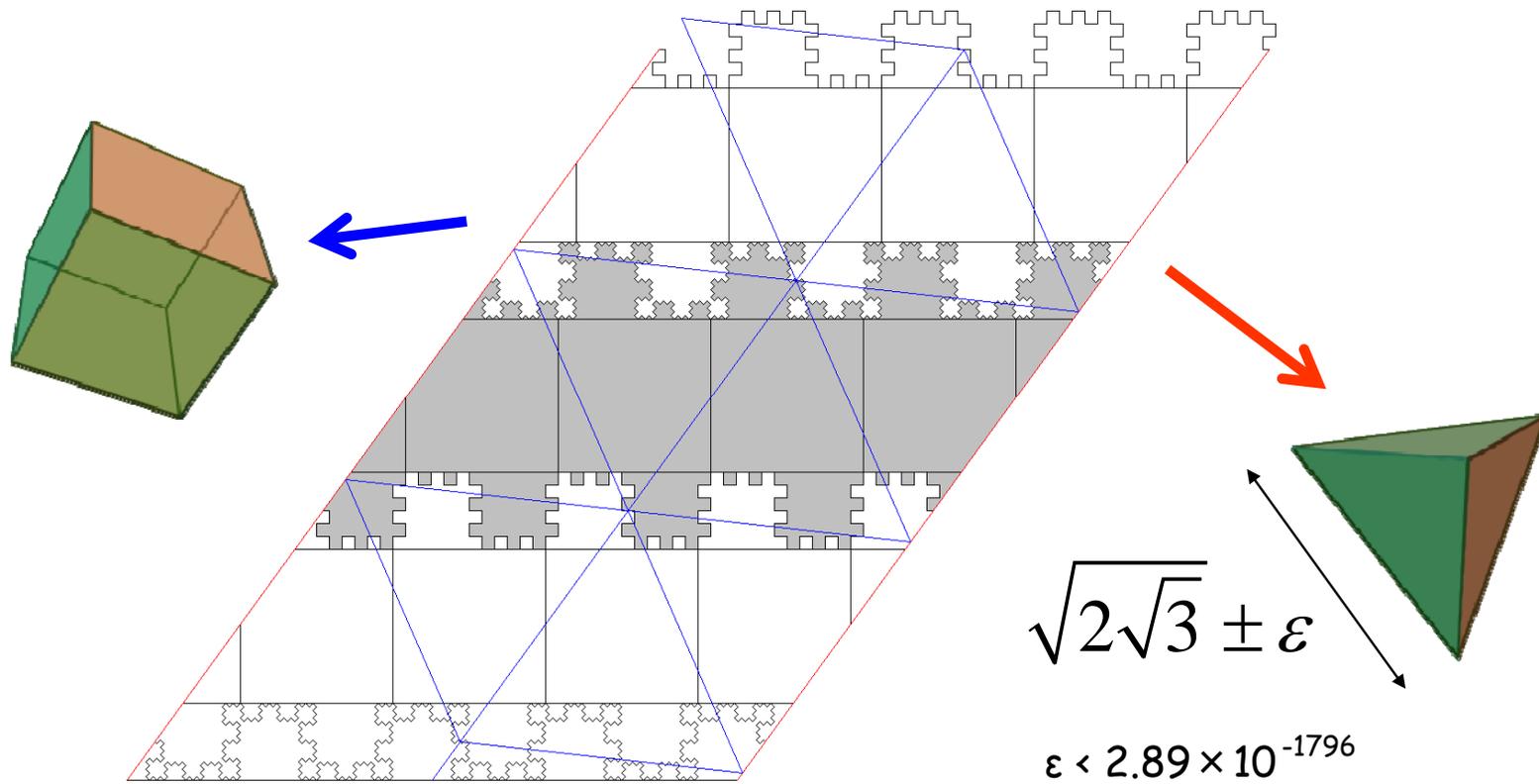
本当に(重なりのない)展開図になっていることも[Hiroyama, Shoji 2011]が初出！

- Open



# 共通の展開図

- ほぼ正四面体 v.s. 立方体 [Shirakawa, Horiyama, Uehara 2011]

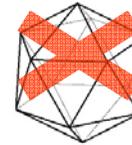


# 結果

- ・各面が正多角形
- ・凸多面体

## • 正四面体 (一般展開) v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

- 正多面体 (面が1種類、uniform)

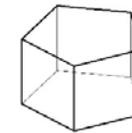


[Horiyama, Uehara 2010]

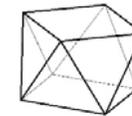
- 半正多面体 (面が2種類以上、uniform)



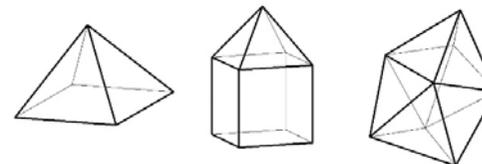
- 正 $n$ 角柱 (上下が正 $n$ 角形、側面が正方形)



- 正 $n$ 反角柱 (上下が正 $n$ 角形、側面が正三角形)



- ジョンソン・ザルガラー多面体



# 結果

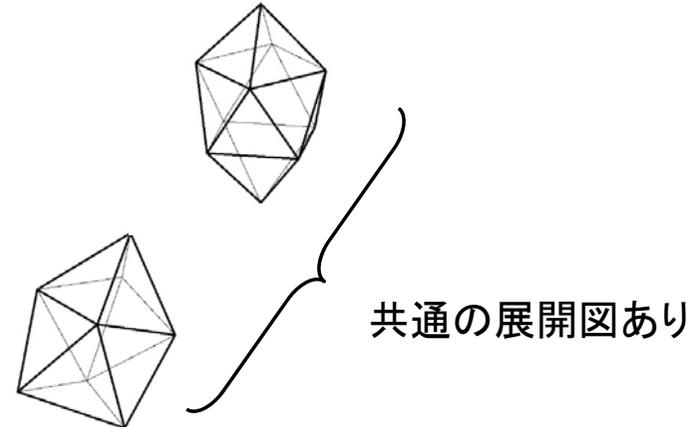
- ・各面が正多角形
- ・凸多面体

- 正四面体 (一般展開) v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

- ジョンソン・ザルガラー多面体: 全 92種類

- J17 (Gyroelongated square dipyramid)

- J84 (Snub disphenoid)



- 半正多面体、正 $n$ 角柱、正 $n$ 反角柱、その他JZ多面体 90種類

⇒ 共通の展開図なし

# 結果

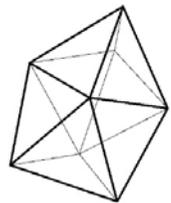
- 正四面体 (一般展開) v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

- ジョンソン・ザルガラー多面体: 全 92種類



- J17 (Gyroelongated square dipyramid) 辺展開 13,014個

- 78個 : 1通りの折り方
- 8個 : 2通りの折り方
- 1個 : 3通りの折り方



- J84 (Snub disphenoid) 辺展開 1,109個

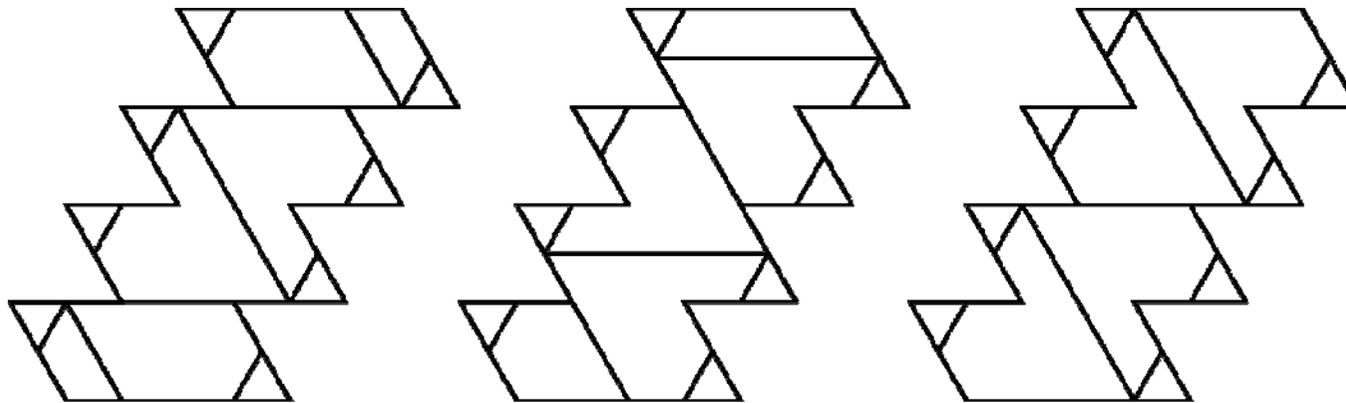
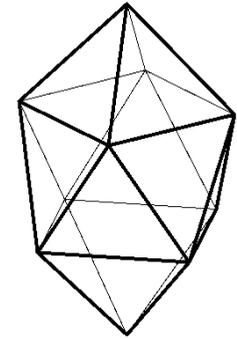
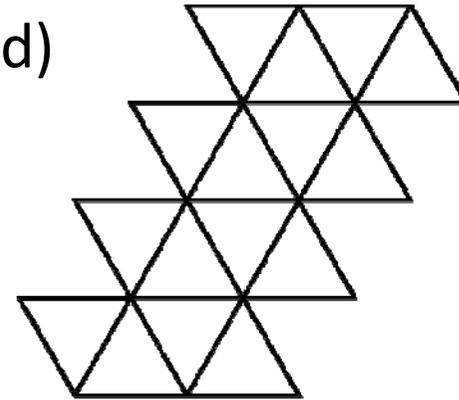
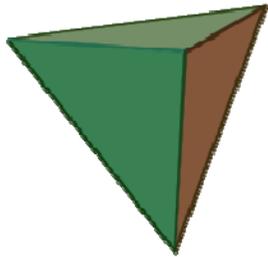
- 32個 : 1通りの折り方
- 5個 : 2通りの折り方

- 半正多面体、正 $n$ 角柱、正 $n$ 反角柱、  
その他JZ多面体 90種類 : 共通の展開図なし

# 結果

3通り折れる唯一の解

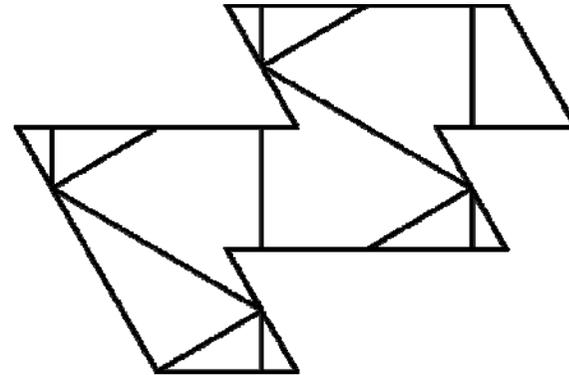
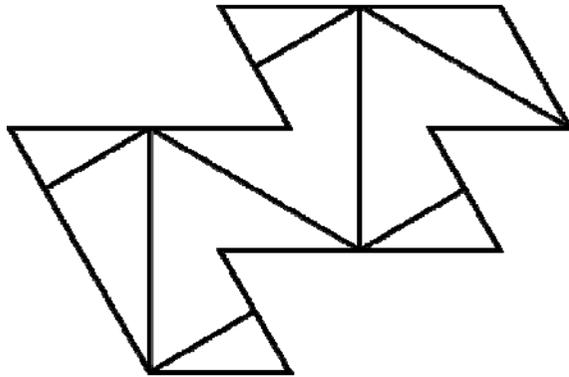
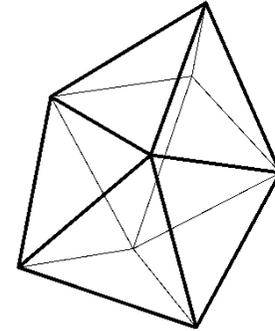
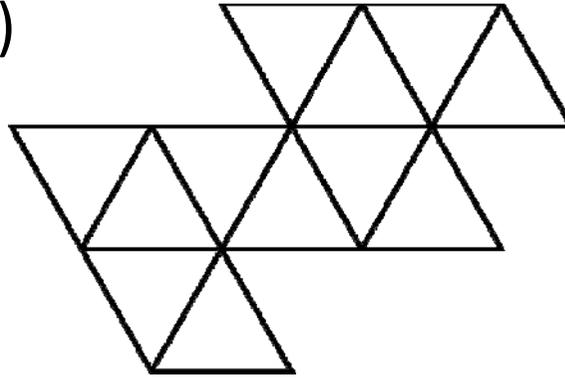
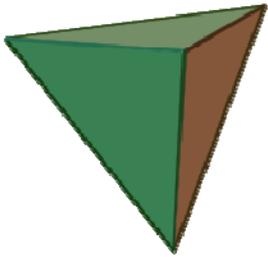
- J17 (Gyroelongated square dipyrmaid)



# 結果

2通り折れる五つの解のうちの一つ

- J84 (Snub disphenoid)



# ざっくりしたアルゴリズム:

特に折れないものをふるい落とす

- 整面凸多面体の辺展開図群

1. タイリングが存在しないなら, 4単面体は折れない.
  - [Akiyama 他 2011]による分類結果があった
2. 面積や長さの「つじつま」があっていなければ正4面体は折れない.
3. どちらもパスした立体の辺展開は, 試してみなければわからない!

以下, 3と2を紹介します.

# J17, J84 以外

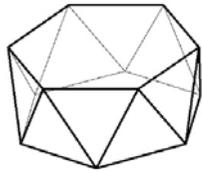
- JZ多面体の展開図の個数 [Horiyama, Shoji 2013]

- J01 8
- J02 16
- J03 308
- J04 3,030
- J05 29,767
- J06 7,825,005
- ...
- J71 2,079,942,317,394,110,986,896,181,956,672
- J72 20,668,673,558,050,742,614,946,330,896
- J73 10,597,511,106,353,370,064,654,696,448
- ...

207穰 9942杼 3173垓 9411京  
986兆 8961億 8195万 6672

# J17, J84 以外

- 展開図がタイリングになる整面凸多面体 [Akiyamaら 2011]
  - JZ多面体: J1, J8, J10, J12, J13, J14,  
(18種類) J15, J16, J17, J49, J50, J51,  
J84, J86, J87, J88, J89, J90
  - 正6反角柱 (上下が正六角形、側面に正三角形12枚)



細かい補足: [Akiyamaら]はタイリングを考えたが、今の枠組みでは p2 タイリングを考える必要がある。

- 「展開図の長さや面積」と正4面体のその「つじつま」がある必要がある。

# J17, J84 以外

- タイリングをもつ各  $J_x$  について,
  1. 面積  $S_x$  を求める
  2. その面積を持つ正4面体の辺の長さ  $L_x$  を求める
  3.  $J_x$  を構成する正多角形(ここでは正3角形と正方形のみでよい)を敷き詰めた「部分展開図」を考える
  4. 部分展開図上の「格子点」+「1/2点」上の2点(証明略)が  $L_x$  になりうるかどうかをチェックする

	J15	J16	J17	J49	J50	J51
Name	T15	J16	T17	T49	T50	T51
Image						
# of □s	4	5	0	2	1	0
# of △s	8	10	16	6	10	14
$L_{J_i}$	$\sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2}$ = 2.075...	$\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{5}{2}}$ = 2.320...	2	$\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2}}$ = 1.629...	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{5}{2}}$ = 1.754...	$\sqrt{3.5}$ = 1.870...

図10のベクトルの和が  $L_x$  になることが必要.

# J17, J84 以外

- タイリングを
- 3.  $J_x$ を構成  
でよい
- 4. 部分屈  
りうるか

$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ の単純な線形和になるので, 例えば  $\sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3} + 5}$  などは作れない. よってそうした立体の展開図では正4面体の辺が作れない.

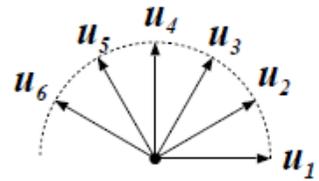


Figure 10: Six unit vectors.

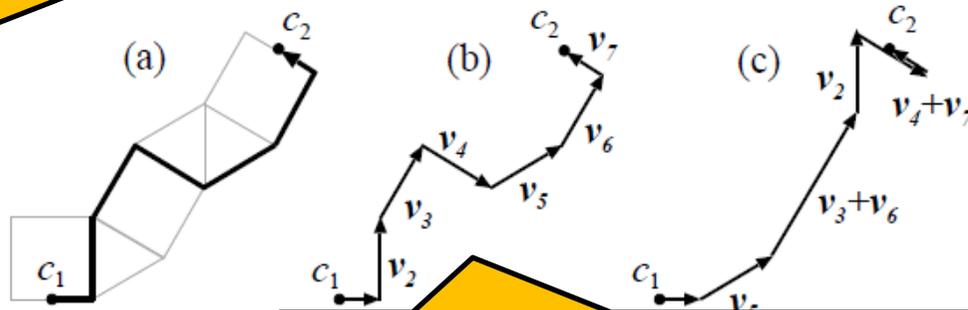


Figure 11: Linkage linkage, (b) correspond

この時点で生き残った候補:  
J12, J13, J14, J51, J89

# J12, J13, J14, J51, J89

- タイリングの枚数に上限(10枚; 証明略)があるので, 長さ10の可能な組合せを全部試して, 上記のどの辺の長さも作れないことを示せばよい.

1. 国際会議発表時: 下図(a)のパターンを全探索.  
**10時間程度**で計算終了. どの長さも現れなかった.
2. その後: ベクトルを(c)のように正規化すればよい!  
**⇒1秒未満!!**

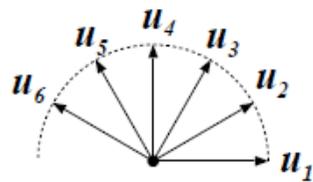


Figure 10: Six unit vectors.

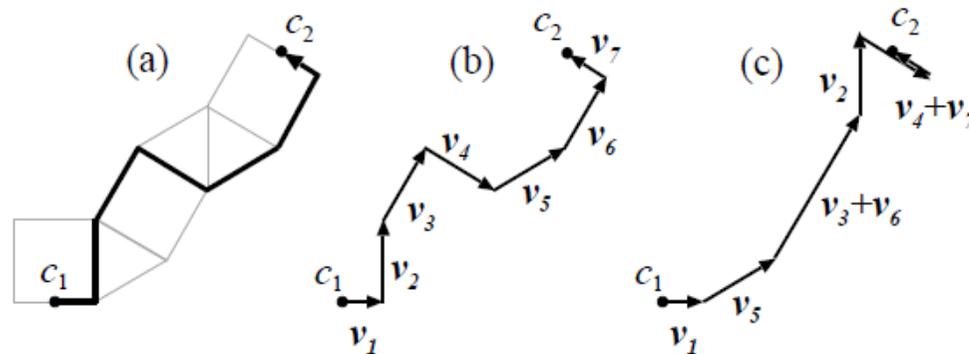


Figure 11: Linkage as the set of unit vectors: (a) given tiling and linkage, (b) corresponding vectors, and (c) reorganized vectors.

# 結果

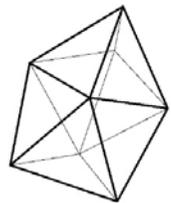
- 正四面体 (一般展開) v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

- ジョンソン・ザルガラー多面体: 全 92種類



- J17 (Gyroelongated square dipyramid) 辺展開 13,014個

- 78個 : 1通りの折り方
- 8個 : 2通りの折り方
- 1個 : 3通りの折り方



- J84 (Snub disphenoid) 辺展開 1,109個

- 32個 : 1通りの折り方
- 5個 : 2通りの折り方

- 半正多面体、正 $n$ 角柱、正 $n$ 反角柱、  
その他JZ多面体 90種類 : 共通の展開図なし

# まとめ

- 現時点では正4面体(と4単面体)以外の立体に  
数理的に非自明な展開図の特徴づけは、ない
- したがって最後は膨大な展開図の全探索が必要になることが多い
- データ構造やアルゴリズムの工夫により、劇的な改善が起こることもある
  1. 効率の良いデータ構造としての Binary Decision Diagram
  2. ベクトルの可換性を利用したアルゴリズムの高速化手法