計算幾何の基礎

点の表現

座標を用いて表現するのが最も一般的
2次元の場合には，p(x, y)のように表現.

2 点間の距離：

ユークリッド距離 $\mathrm{dist}(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

マンハッタン距離 $\mathrm{dist}(p_1, p_2) = | x_1 - x_2 | + | y_1 - y_2 |$

L_∞距離 $\mathrm{dist}(p_1, p_2) = \max\{| x_1 - x_2 |, | y_1 - y_2 |\}$

L_p距離 $\mathrm{dist}(p_1, p_2) = \sqrt[p]{(x_1 - x_2)^p + (y_1 - y_2)^p}$

計算幾何の基礎(2)

直線の表現

(1) 傾きとy切片による表現:　$y = ax + b$

y軸に平行な直線($x = c$の形)が表現できない.

(2)3つのパラメータを用いた表現: $ax + by + c = 0$

一つの直線の表現が一意に定まらないという欠点がある.

(3)2点を通る直線として表現する方法:

2点(p, q), (r, s)を通る直線: $(s-q)x - (r-p)y = ps - qr$

2直線の交点

$$l_1 : (y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$l_2 : (y_4 - y_3)x - (x_4 - x_3)y = x_3 y_4 - x_4 y_3$$

交点の座標(x, y)は

$$x = \frac{\xi(x_4 - x_3) - \eta(x_2 - x_1)}{\Delta}, \quad y = \frac{\xi(y_4 - y_3) - \eta(y_2 - y_1)}{\Delta}$$

$$\xi = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \eta = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \\ y_4 - y_3 & x_4 - x_3 \end{vmatrix}$$

計算幾何学の基礎(3)

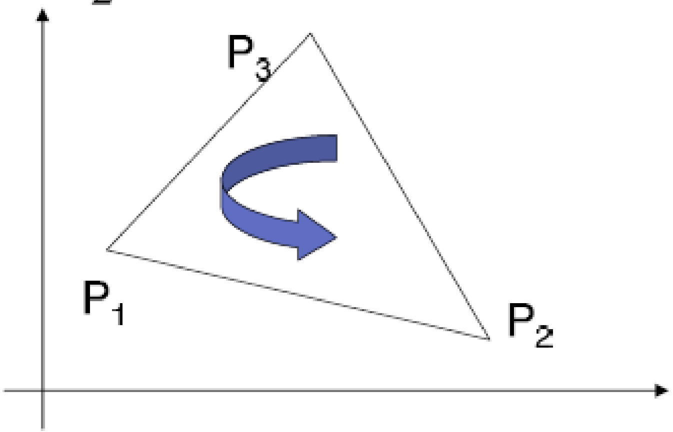
線分のパラメータ表現

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$を結ぶ線分：

$$x = (1-\mu)x_1 + \mu x_2,\ \ y = (1-\mu)y_1 + \mu y_2,\ \ \mu \in [0,1]$$

三角形の面積

$$\text{面積} = \frac{1}{2}((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))$$



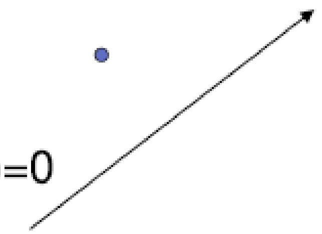
面積＞０:　反時計回り
面積＜０:　時計回り
面積＝０:　一直線上の３点

三角形の符号付面積

計算幾何学の基礎(4)

有向線分と点との位置関係

点pが有向線分ABの左側にある→面積(A,B,p)>0
点pが有向線分ABの右側にある→面積(A,B,p)<0
点pが有向線分ABを含む直線上にある→面積(A,B,p)=0



2線分の交差判定

(1)線分を含む直線の式を求めた後，それらの交点を求め，それが両方の線分に含まれるかどうかを判定する.
交点計算に除算を含むので，計算誤差に弱い.

(2)三角形の符号付面積を用いる方法：
2端点P_1P_2を結ぶ線分と，2端点P_3P_4を結ぶ線分が交差するための条件：

$$\Delta(P_1,P_2,P_3)\times\Delta(P_1,P_2,P_4)<0,\ \text{and}$$
$$\Delta(P_3,P_4,P_1)\times\Delta(P_3,P_4,P_2)<0$$