I482F: 実践的アルゴリズム特論
6 (予定を無視して)再帰解析

- 浅野先生直伝の由緒正しい計算幾何
- 上原得意の活発な研究分野グラフアルゴリズム
- 上原が最近開拓している計算折り紙のアルゴリズム

どれをやろうか悩んでいます…

上原隆平

北陸先端科学技術大学院大学

uehara@jaist.ac.jp

再帰解析とは？

- 再帰アルゴリズムの実行時間など，再帰式で表現できるものを解析する技法
  - 再帰式の例：フィボナッチ数列

    f(0)=1, f(1)=1,

    i>1 のとき: f(i)=f(i-1)+f(i-2)
- 再帰アルゴリズムの代表例：分割統治法
- いくつかの典型的なパターンにはまれば，難しくはない
- 特にマスター定理を知っていれば，かなり広範囲の再帰式が解ける．

オーダ記法

漸近的計算量：入力のサイズnが十分に大きくなったときに
　計算量がどのような割合で増加するかを表したもの．
計算量の増加の割合を示すのが目的なので，
　主要項だけで十分，また係数も重要でない．

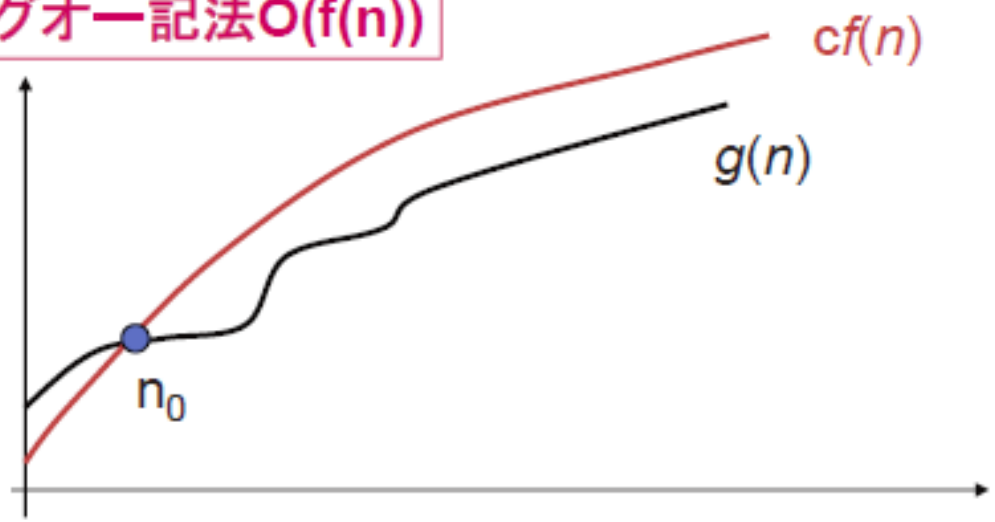
ビッグオー記法O(f(n))

$$O(f(n)) = \{g(n) \mid \exists c > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 (g(n) \leq cf(n))\}$$

$O(f(n)) = \{g(n)$：すべての$n \geq n_0$に対して$g(n) \leq cf(n)$
であるような正の定数cとn_0が存在する$\}$

$g(n) \in O(f(n))$と書く代わりに，　便　宜上，
$g(n) = O(f(n))$と書くこともある．

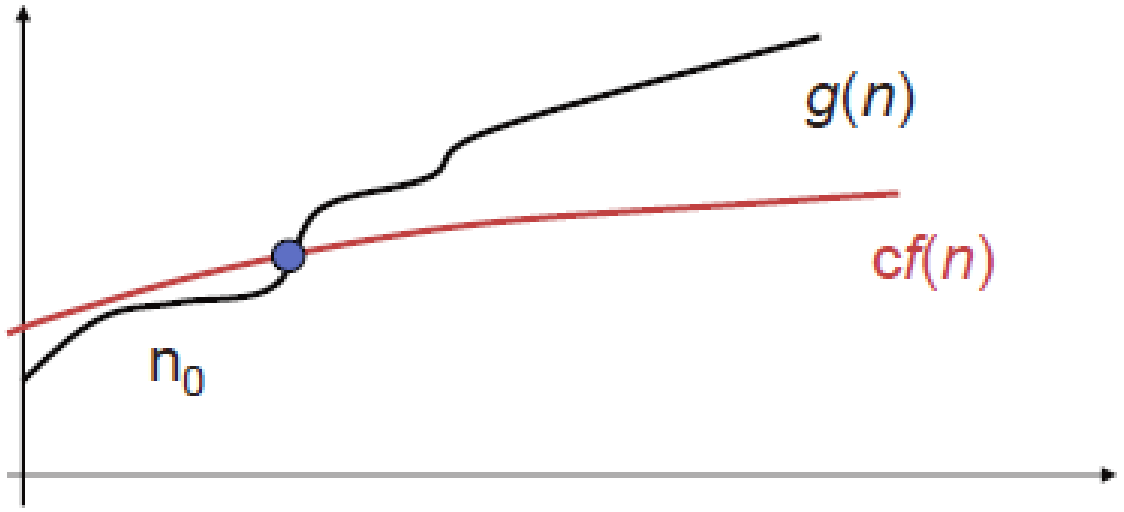
ビッグオー記法O(f(n))



計算量の上界を表すのに用いる.
たとえば，挿入法と呼ばれるデータ整列（ソート）法は，
逆順に並べられたデータが入力されると，データ数nに
対してn^2に比例する時間がかかってしまう.
したがって，挿入法の計算時間は$O(n^2)$と言える.

挿入法はO(n)時間でソートを完了することもある.
すでにソート済みのデータが入力された場合がそうである.

ビッグオメガ記法Ω(f(n))



$$\Omega(f(n)) = \{g(n) \mid \exists c > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 (cf(n) \leq g(n))\}$$

$\Omega(f(n)) = \{g(n)$: すべての$n \geq n_0$に対して$cf(n) \leq g(n)$
であるような正の定数cとn_0が存在する$\}$

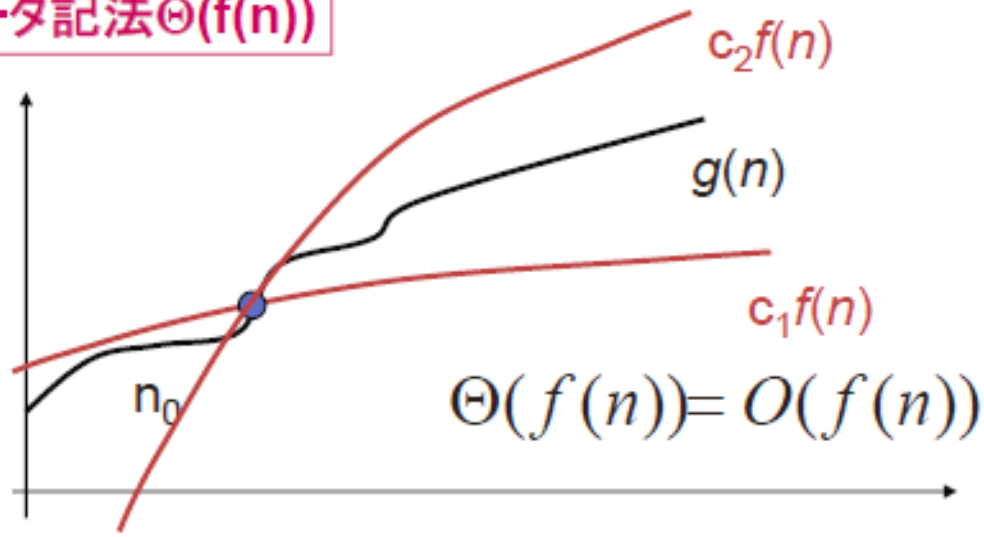
ビッグオメガ記法Ω(f(n))

計算量の下界を表すのに用いる.

n個のデータをデータ間の比較を用いてソートするには,
どんなアルゴリズムでも必ずn log nに比例する時間以上が
かかってしまう最悪の場合が存在する.

よって, ソーティング問題の下界はΩ(n log n)であると言える.

シータ記法Θ(f(n))



$$\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$$

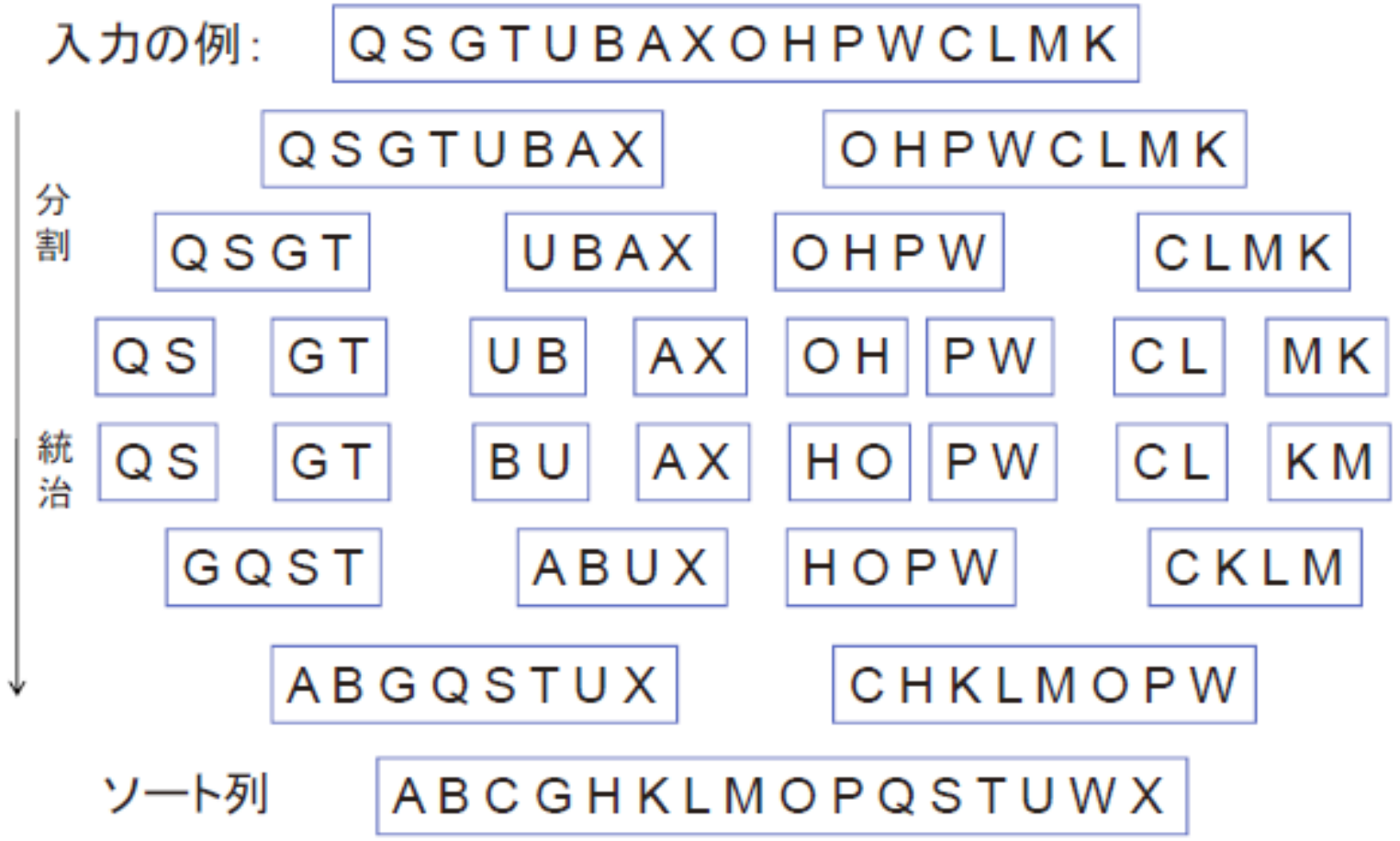
$$\Theta(f(n)) = \{g(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 \quad (c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n))\}$$

$\Theta(f(n)) = \{g(n)$: すべての $n \geq n_0$ に対して

$c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)$ であるような正の

定数 c_1, c_2 と n_0 が存在する $\}$

問題1： マージソートのアルゴリズムを再帰を用いて記述し，その実行時間を解析せよ．



分割統治法によるマージソートのアルゴリズム

入力は配列　a[0], ... , a[n-1]
ソートすべき区間を[low, high]で表現する．最初の区間は[0, n-1]

区間[low, high]の配列要素のソート
関数Mergesort(low, high)
　low = highなら，そのまま終了．
　mid = (low + high)/2として中央のインデックスを求める．
　区間[low, high]を[low, mid]と[mid+1, high]に分割．
　区間[low, mid]の配列要素を再帰的にソート．
　　Mergesort(low, mid)
　区間[mid+1, high]の配列要素を再帰的にソート．
　　Mergesort(mid+1, high)
　上記の2つのソート結果を一つのソート列に統合する．

マージソート法の解析

n個のデータをマージソートするのに要する時間をT(n)とする.

分割ステップ

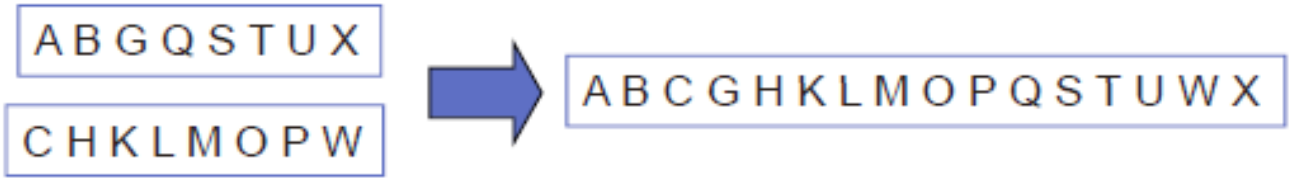
サイズnの問題をサイズn/2の2つの問題に分割して,
それぞれを再帰的に解く

その時間は 2T(n/2) と表現できる.

統合ステップ

2つの部分問題の解(この場合は, 2つのソート列)を統合して最終的な答(この場合は, 2つのソート列をマージした列)を得る.

このための時間は O(n)



両方の列の先頭を比較して小さい方を取るという操作を最大 n/2 回繰り返す.

マージソート法の解析

n個のデータをマージソートするのに要する時間をT(n)とする.
分割ステップ
　サイズnの問題をサイズn/2の2つの問題に分割して,
　それぞれを再帰的に解く
　　その時間は 2T(n/2) と表現できる.
統合ステップ
　2つの部分問題の解(この場合は, 2つのソート列)を統合して最終的な答(この場合は, 2つのソート列をマージした列)を得る.
　　このための時間は O(n)

よって, 全体の計算時間は
　T(n) = 2T(n/2) + O(n)
と表現できる.
これを, T(1) = 0, T(2)=2 のような境界条件の下に解く.

再帰式 $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$, $T(1) = 0$, $T(2)=2$ の解法

まず，O(n)のところを1次式 $an + b$ で置き換えると

$T(n) = 2T(n/2) + an + b$

を得る．ここで，$n = 2^k$と置くと

$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + a2^k + b$

となる．ここで，さらに$T(2^k) = t_k$と置くと，

$t_k = 2t_{k-1} + a2^k + b$

を得る．これを繰り返し用いると

$t_k = 2(2t_{k-2} + a2^{k-1} + b) + a2^k + b$

$= 2^2t_{k-2} + a2^k + 2b + a2^k + b$

$= 2^2t_{k-2} + (1+1)a2^k +(2+1)b$

$= 2^2(2t_{k-3} + a2^{k-2} + b) + (1+1)a2^k +(2+1)b$

$= 2^3t_{k-3} + (1+1+1)a2^k + (2^2+2+1)b$

$= \ldots = 2^{k-1}t_1+(1+1+\ldots+1)a2^k + (2^{k-2}+\ldots+2+1)b$

$= 2^k + ak2^k + 2^{k-1}b$

$= n + an \log n + b/2 \log n = O(n \log n)$　　$(n = 2^k, k = \log n)$

マージソート覚書き

- 配列を二つ使うところが弱点
- 実装が簡単なので，バグも出にくく，安定して高速に動作するので，ファンが多い
- 「安定ソート」でもある．（同じ値を持つデータが反転しない）

ユークリッドの互除法

2つの正整数m, nが与えられたとき，それらの最大公約数を求めよ.

人類最古のアルゴリズム！

ユークリッドの互除法

基本的な性質

(1)GCD(m, 0) = m　任意の整数mと0の最大公約数はmとする

(2)GCD(m, n) = GCD(n, m mod n)

この2つの性質を知っていればプログラムが書ける.

```
int GCD(int m, int n){
  while(n > 0){
    int r = m % n; m = n; n = r;
  }
  return m;
}
```

```
int GCD(int m, int n){
   while(n > 0){
      int r = m % n; m = n; n = r;
   }
   return m;
}
```

例題:

GCD(954, 288)

=GCD(288, 954 % 288) = GCD(288, 90)

= GCD(90, 288 % 90) = GCD(90, 18)

= GCD(18, 90 % 18) = GCD(18, 0)

= 18.

954と288の最大公約数は18.

```
int GCD(int m, int n){
  while(n > 0){
    int r = m % n; m = n; n = r;
  }
  return m;
}
```

再帰的に表現することも可能.

GCD(m, 0) = m

GCD(m, n) = GCD(n, m mod n)

このままでプログラムになる.

```
int GCD(int m, int n){
  if(n==0) return m;
  else return GCD(n, m % n);
}
```

```
int GCD(int m, int n){
   if(n==0) return m;
   else return GCD(n, m % n);
}
```

実行時間をT(m, n)とする.
T(m, 0) = c （定数）
n>mのときにGCD(m, n)を呼び出すと，GCD(n, m%n)を
呼び出すことになるが，n=qm + rとすると，q≧1なので，
n>m+r．また，r<mだから，n+m>m+2r, すなわち，r<n/2を得る.
よって，GCD(m, n)がGCD(n, m%n)を呼び出すとき，m%nの
値（＝r）はn/2以下になっている.
さらにもう一度GCD関数を呼び出すと，もう一方の値も半分以下
になるので，
T(m, n) = T(m/2, n/2) + 2c
という漸化式を得る.
これをmについて解くと，T(m, n) = O(log m)となる.

再帰呼び出しの危険性

n個のデータが入った配列a[0], ... , a[n-1]における最大値を求める関数を再帰的に記述し，その計算時間を漸化式で解析せよ．

配列のlow番目からhigh番目までの値の最大値を求める関数を
Max(low, high)とすると，
Max(low, high) = a[low]　　low = highのとき，
Max(low, high) = max(a[low], Max(low+1, high))　それ以外のとき

配列のlow番目からhigh番目までの値の最大値を求める関数を
Max(low, high)とすると,
Max(low, high) = a[low]　　low = highのとき,
Max(low, high) = max(a[low], Max(low+1, high))　それ以外のとき

上の定義に基づいてプログラムを書いてみよう

```
int Max(int low, int high){
   if(low == high) return a[low];
   if(a[low] > Max(low+1, high)) return a[low];
   else return Max(low+1, high);
}

int main(void){
   配列aへの値の入力;
   Max(0, n-1)が最大値;
}
```

```
#include <stdio.h>

int n = 50;
int a[] = {1993, 2834, 2774, 18834, 1321, 3245, 3321, 784, 983, 102,
                293, 1324, 763, 6654, 890, 8762, 653, 7866, 9645, 19323,
                1832, 3224, 4327, 8766, 543, 243, 2441, 5342, 653, 877,
                7835, 4523, 765, 462, 8799, 8745, 674, 293, 7765, 864,
                8732, 3254, 6546, 4327, 4566, 48255, 321, 33, 987, 765};


int MAX(int i)
{
        if(i == 0) return a[0];
        else if( a[i] > MAX(i-1) ) return a[i];
        else return MAX(i-1);
}

int main(void)
{
        int i, m;

        do{
                scanf("%d", &m);
                if(m <= 0 || m > 50) break;
                for(i=0; i<m; i++) printf("%d ", a[i]);
                printf("¥n¥nMAX = %d¥n", MAX(m-1));
        }while(1);
        return 1;
}
```

ナゾの現象：

- n=20あたりだと問題なく動作するが，，，
- n=30くらいで普通のPCはだんだん遅くなり，n=40あたりだと返ってこなくなる…

```
int Max(int low, int high){
   if(low == high) return a[low];
   if(a[low] > Max(low+1, high)) return a[low];
   else return Max(low+1, high);
}
```

このプログラムはなぜ遅いのか？
実行時間を解析してみよう.
呼び出しは
Max(0, n-1) => max(a[0], Max(1, n-1)) => max(a[1], Max(2, n-2))
と進んで行く. つまり,

```
   Max(0, n-1)
1.      if(a[0] > Max(1, n-1)) return a[0];
2.     else return Max(1, n-1);
```

1行目でMax(1, n-1)を呼び出しているので, 時間はT(n-1)
2行目でも1行目の条件が成り立たなければ再びMax(1, n-1)を実行.
よって, 最悪の場合は, 毎回Max()を2回呼び出す.
漸化式は, $T(n) = 2T(n-1) + c$. これを解くと, $T(n) = O(2^n)$.

マスター

ここでは証明はしませんが，非常に丁寧な証明が「アルゴリズムイントロダクション」に載ってます．

マスター定理(Master Theorem)

$a \geqq 1$, $b \geqq 1$を定数とし，$f(n)$を関数とする．非負整数上の関数$T(n)$を再帰式

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

によって定義する．このとき，$T(n)$は漸近的に次のような限界をもつ．

1. ある定数$\varepsilon > 0$に対して$f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ならば，
   $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$．
2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$ならば，$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$．
3. ある定数$\varepsilon > 0$に対して$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$であり，しかもある定数$c < 1$と十分大きなすべての$n$に対して$af(n/b) \leqq cf(n)$ならば，
   $T(n) = \Theta(f(n))$．

先に見た漸化式$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$は，
$a=b=2$, $f(n) = O(n)$の場合に相当するので，2の場合が適用できて，
$T(n) = \Theta(n \log n)$を得る．

マスター定理を用いて次の漸化式を解け.

1. $T(n) = 2T(n/2) + n$

2. $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$

3. $T(n) = 3T(n/2) + n$

4. $T(n) = 4T(n/2) + n$

5. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$

6. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$.

7. $T(n) = T(n/2) + 1$