講義4：最短経路問題4

上原隆平
uehara@jaist.ac.jp

線形計画問題と線形計画法

入力:線形不等式と線形の目的関数
出力:すべての線形不等式を満たす解があるかどうかを判定し，解が存在する場合には，さらに目的関数を最大（または最小）にする解を求める.

n: 変数の個数，
m: 線形不等式の形で与えられる制約式の個数
各制約式はn個の変数の線形不等式の形で与えられるから，それぞれがn次元空間の半空間に対応している.
したがって，m個の半空間の共通部分が存在するかどうかを判定し，存在するなら，その頂点の中で目的関数の値を最大（または最小）にするものを求めればよい.
実行可能領域:m個の半空間の共通部分

線形計画問題はnとmに関する多項式時間で解けることが知られている.

２変数の線形計画問題

2次元平面における半平面の共通部分が実行可能領域
必ず凸多角形になる.

３変数の線形計画問題

3次元空間における半空間の共通部分が実行可能領域
必ず凸多面体になる.

線形計画問題の一般形

目的関数: $c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \rightarrow \min$

ただし, $c_1, c_2, \ldots, c_n$は与えられた定数

制約式:

不等式制約 $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \leqq b_1$

......

$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n \leqq b_k$

等式制約 $a_{k+1,1}x_1+a_{k+1,2}x_2+\ldots+a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}$

......

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n = b_m$

問題P16:2種類の原材料AとBにより2種類の製品P_1とP_2を製造する場合，どのような生産計画を立てれば利益最大にできるか？

製品を1単位製造するのに必要な原材料の量
製品P_1では，Aを2, Bを4単位分だけ必要
製品P_2では，Aを3, Bを5単位分だけ必要
原材料の在庫は，Aが5単位，Bが9単位分
利益率：製品P_1は1単位当たり3万円，製品P_2は4万円
➔
製品P_1の生産量をx_1, 製品P_2の生産量をx_2とすると，
全体の利益は

$3x_1 + 4x_2$ （最大化すべき）目的関数

で与えられる．一方，制約は

$2x_1 + 3x_2 \leqq 5$ 在庫量の関係

$4x_1 + 5x_2 \leqq 9$ 在庫量の関係

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$ 生産量は非負

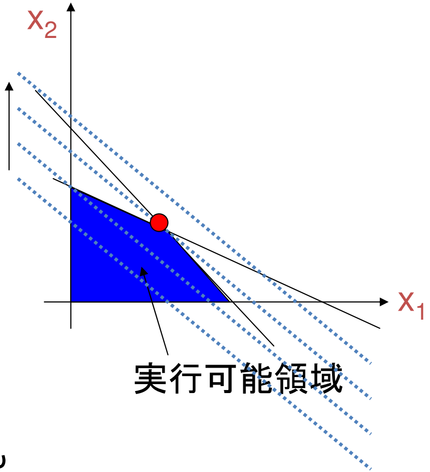
となる．

線形計画問題

目的関数: $3x_1 + 4x_2 \rightarrow$ 最大

制約条件:

$$2x_1 + 3x_2 \leqq 5$$
$$4x_1 + 5x_2 \leqq 9$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$$



目的関数 $3x_1 + 4x_2 = k$

$\rightarrow$ 直線 $x_2 = -(3/4)x_1 + k/4$

2つの制約式に対応する直線の交点は(1, 1).

つまり，製品P_1を1単位，製品P_2も1単位だけ製造するのが最適.

演習問題E7-1：上の例において，他に2個の変数x_3, x_4を導入して，不等式制約をすべて線形等式制約と変数≧0の形式に変更する方法を考えよ.

線形計画問題の解法

n個の変数で定義される線形計画問題
➔n次元空間において制約式に対応する半空間によって定義される凸多面体の頂点の中で目的関数の値を最適化するものを求める問題.
ただし，凸多面体の頂点をすべて列挙すれば指数時間かかる.

シンプレックス法（Dantzig, 1947年）
凸多面体の1つの頂点から出発して，その隣接頂点の中で目的関数の値が改善される頂点に移動するという操作を繰り返し，移動できなくなったときに，その頂点を最適解とする.

シンプレックス法で必ず最適解が求まる.
∵凸多面体の性質から，局所的にだけ最適という場所はない.
目的関数を改善する方向にだけ移動すれば，必ず最適解に到達する.

シンプレックス法の効率

最悪の場合には指数時間を必要とする.
しかし, 実用的には効率は良い.

線形計画問題は多項式時間で解けるか？

Khachiyan(1979)の結果

$O(nm^3L)$時間の楕円体法(ellipsoid algorithm)

n: 変数の個数, m: 制約式の個数

L: 係数を指定するのに使われる最大のビット数

Karmarker(1984)の内点法(interior method)

$O(nm^{2.5}L\log L)$時間のアルゴリズム

ATTがアルゴリズム特許を申請したことで有名

MirzaianのDPA(Deepest Peak Algorithm)

計算時間は$O(m^3n^2)$と主張しているが, 真偽は不明

Megiddo(1984), Clarkson(1986), Dyer(1986)は

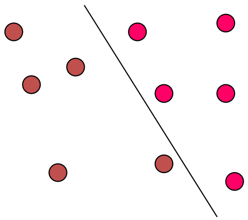
変数の個数に関しては指数時間かかるが,

制約式の個数に関しては線形のアルゴリズムを提案

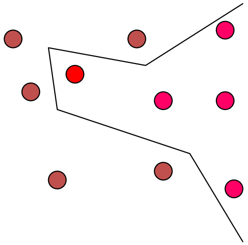
線形計画問題として定式化できる問題

問題P17:（線形分離可能性問題）
n次元空間に2つの点集合が与えられたとき，それらを分離する超平面が存在するかどうかを判定せよ.

２次元平面では，２つの点集合を分離する直線が存在するかどうかを判定する問題となる.

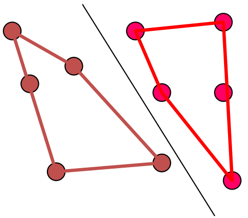


線形分離可能

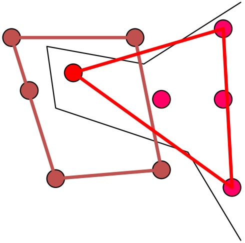


線形分離不可能

2次元平面の場合，2つの点集合が線形分離可能であるのはそれぞれの点集合に対する凸包（最小包含凸多角形）が互いに共通部分を持たないことである.



線形分離可能



線形分離不可能

アルゴリズムP17-A0:

(1)2つの点集合RとBを入力する. ただし，n=|R|+|B|.
(2)各点集合に対する凸包CH(R)とCH(B)を求める.
(3)CH(R)とCH(B)に共通部分があるかどうかを判定.
　もし共通部分があれば，解はないと出力.
　そうでなければ，共通内接線を求めて，分離直線として出力.

アルゴリズムP17-A0:
(1)2つの点集合RとBを入力する. ただし, n=|R|+|B|.
(2)各点集合に対する凸包CH(R)とCH(B)を求める.
(3)CH(R)とCH(B)に共通部分があるかどうかを判定.
　もし共通部分があれば, 解はないと出力.
　そうでなければ, 共通内接線を求めて, 分離直線として出力.

アルゴリズムP17-A0の計算時間:
　(1)は入力だけなので, O(n)時間.
　(2)の凸包計算はO(n log n)時間.
　(3)の共通部分の計算と共通内接線の計算はO(n)時間.
全体ではO(n log n)時間となる.

演習問題E7-2: 点集合RとBのサイズをそれぞれn, mとするとき, 全体の計算時間をnとmを用いて表現せよ. nとmの値が大きく異なるとき, 別の考え方ができるか？

もっと効率よく解くことは可能か？

線形計画法に基づくアルゴリズムP17-A1

入力の集合を

$R=\{(x_1,y_1), \ldots , (x_k, y_k)\}$, $B=\{(x_{k+1},y_{k+1}), \ldots , (x_n, y_n)\}$

とする．もしRとBを分離する直線y=ax+bが存在するなら，

$$y_i \leqq ax_i + b,\ i=1, \ldots , k,$$
$$y_i \geqq ax_i + b,\ i=k+1, \ldots , n$$

または，

$$y_i \geqq ax_i + b,\ i=1, \ldots , k,$$
$$y_i \leqq ax_i + b,\ i=k+1, \ldots , n$$

が成り立つはずである．

逆に，

$$b \geqq -ax_i + y_i,\ i=1, \ldots , k,$$
$$b \leqq -ax_i + y_i,\ i=k+1, \ldots , n$$

または，

$$b \leqq -ax_i + y_i,\ i=1, \ldots , k,$$
$$b \geqq -ax_i + y_i,\ i=k+1, \ldots , n$$

を満たす(a, b)の値が存在すれば，RとBは線形分離可能．
これは，２変数a, bに関する線形計画問題であるから，
O(n)時間で解ける．

例: R={(1,2), (2,1), (3,1)}, B={(2,2), (3,3)}とき,

線形計画問題1:

b ≧-1*a + 2,
b ≧-2*a + 1,
b ≧-3*a + 1,
b ≦-2*a + 2,
b ≦-3*a + 3

線形計画問題2:

b ≦ -1*a + 2,
b ≦ -2*a + 1,
b ≦ -3*a + 1,
b ≧ -2*a + 2,
b ≧ -3*a + 3

演習問題E7-3:実際に実行可能領域を図示することにより,どちらの線形計画問題が実行可能解をもつかを判断せよ.

最短経路問題

問題P18: 辺に正の重みをもつグラフG=(V, E, c)と2頂点s, tが与えられたとき，sからtへの最小重み経路（最短経路）を求めよ.

この問題はダイクストラ法として知られる有名なアルゴリズムを用いて効率よく解けることが知られているが，線形計画問題としても定式化できる.
用意すべき変数： d_i = 頂点sから頂点v_iへの最短経路の長さ.
辺(v_i,v_j)の長さ（重み）を$c(v_i,v_j)$と表す.
このとき，制約式は

$d_1=0$ （$s=v_1$とする）

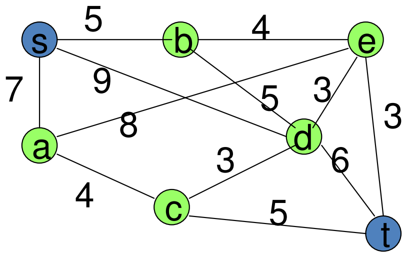
$d_j \leqq d_i + c(v_i,v_j)$ すべての辺(v_i,v_j)について，ただし，v_jはsとは異なること.

目的関数は

$\boxed{\min}\ d_n$ ただし，$v_n=t$とする.

変数の数が多いので多項式時間では解けるものの，ダイクストラ法の方が効率が良い.

演習問題 E7-4: 下記のグラフに対応する線形計画問題を実際に書き下せ.



(s, a, b, c, d, e, t)
$= (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$
と番号付けること.

$d_1 = 0,$
$d_2 \leqq d_1 + 7,$
$d_2 \leqq d_6 + 8,$
$d_2 \leqq d_4 + 4,$
$d_3 \leqq d_1 + 5,$
$d_3 \leqq d_5 + 5,$
……

整数計画問題

正確には整数線形計画問題.
制約式と目的関数が線形式でなければならない点は線形計画問題と同じであるが，変数の値を整数に限定したもの.

様々な問題を整数計画問題として定式化できるという意味で非常に強力な方法であるが，残念ながら多項式時間のアルゴリズムは知られていない.

制約式と目的関数の係数は任意であるが，変数の値を0か1に限定したものを0-1整数計画問題と呼ぶが，0-1整数計画問題ですらNP完全であることが知られている.

整数計画問題として定式化できる問題

n個の論理変数を$(x_1, x_2, \ldots , x_n)$とする.
論理変数x_nまたはその否定$\neg x_n$をリテラルという.
３個のリテラルをOR∨で結んだものを節という.
節をAND∧で結んだものを3SAT式という.

$F(x_1, x_2, x_3)$
$= (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

真理値割り当て：各論理変数に真理値(0または1)を割り当てること
上の例で,

$F(0,1,1) = (0 \vee \neg 1 \vee 1) \wedge (\neg 0 \vee 1 \vee \neg 1) \wedge (\neg 0 \vee 1 \vee 1) = 1$
$F(1,0,1) = (1 \vee \neg 0 \vee 1) \wedge (\neg 1 \vee 0 \vee \neg 1) \wedge (\neg 1 \vee 0 \vee 1) = 0$

であるから, (0,1,1)という真理値割り当ては上式を充足するが, (1,0,1)は充足しない. 充足する真理値割り当てが存在するような3SAT式は充足可能であるという.

問題P19: (充足可能性問題3SAT)
n個の変数とm個の節からなる3SATの式が与えられたとき，
それが充足可能かどうかを判定し，充足可能なら，式を充足する
真理値割り当てを求めよ.

この問題は代表的なNP完全問題である.

整数計画問題としての定式化

各論理変数の値を整数値0, 1に限定する制約式

$0 \leqq x_i \leqq 1$, integer x_i, $i=1, 2, \ldots, n$

論理変数x_iの否定$\neg x_i$は $1-x_i$ と表現する.

各節に関する制約式

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \Rightarrow x_1 + (1-x_2) + x_3 \geqq 1$$

後は各節に対応する制約式をANDの形で並べればよい.

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \Rightarrow$$

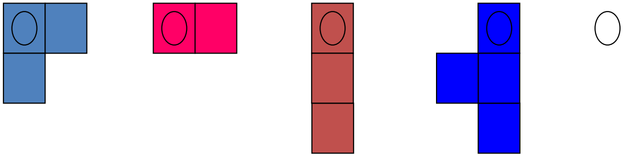
$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \Rightarrow x_1 + (1-x_2) + x_3 \geqq 1,$$

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \Rightarrow (1-x_1) + x_2 + (1-x_3) \geqq 1,$$

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \Rightarrow (1-x_1) + x_2 + x_3 \geqq 1.$$

整数計画法の応用

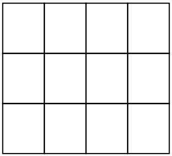
下の4種類のパターンを用いて長方形を埋めることが可能か？
ただし，簡単のため，回転は許さないものとする.

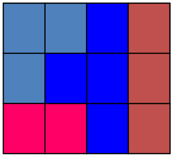


○ 参照位置

P1　　P2　　P3　　P4

指定された長方形





解の例

長方形のセルへの番号付け

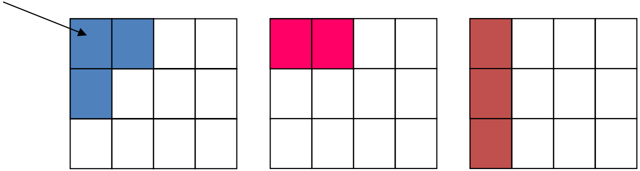
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

変数:

P_i_j: パターンPiを場所jに置くとき1,
それ以外は0

制約条件

一つの場所はちょうど1つのパターンで占められる:
場所1を覆うには



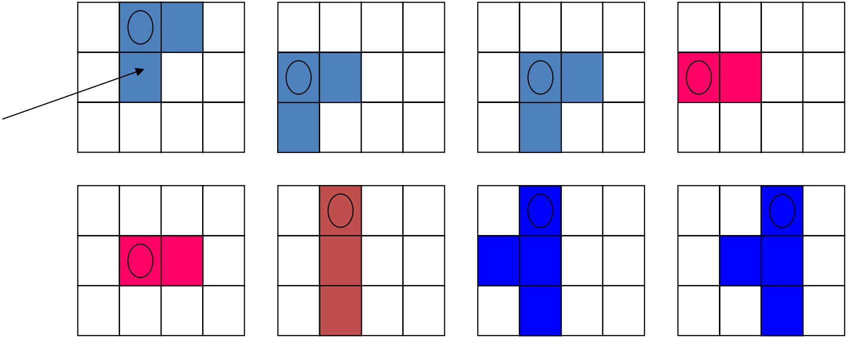
P_1_1 + P_2_1 + P_3_1 = 1

パターン4は場所1には置けない.

制約条件

一つのセルはちょうど1つのパターンで占められる:

場所6を覆うには

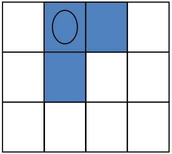


P_1_2 + P_1_5 + P_1_6 + P_2_5 + P_2_6 + P_3_2 + P_4_2 + P_4_3 = 1

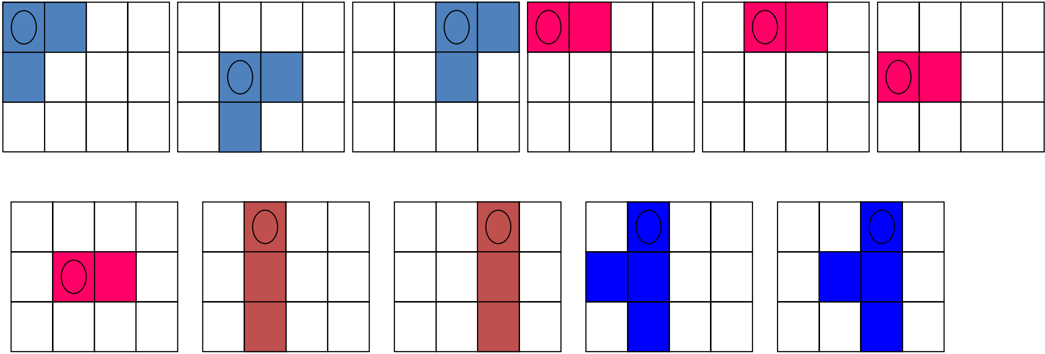
等々

制約条件

同じセルを2つのパターンで覆うことはできない.



P_1_2 = 1のとき(パターン1を場所2に置く)
現在ふさがっているところと抵触するパターンは禁止しなければならない.



P_1_2 +P_1_1 ≦1 , P_1_2 + P_1_6 ≦1 , ..., P_1_2+P_4_3≦1

制約条件

どのパターンも1度しか使わないとすると,

P_1_1 + P_1_2 + P_1_3 + P_1_5 + P_1_6 + P_1_7 < 1;

P_2_1 + P_2_2 + P_2_3 + P_2_5 + P_2_6 + P_2_7 + P_2_9 + P_2_10 + P_2_11< 1;

P_3_1 + P_3_2 + P_3_3 + P_3_4 < 1;

P_4_2 + P_4_3 + P_4_4 < 1;

整数線形計画問題としての具体的な式