

# 計算幾何学特論：計算折り紙入門

上原 隆平

北陸先端科学技術大学院大学

情報科学研究科教授

[uehara@jaist.ac.jp](mailto:uehara@jaist.ac.jp)

10月26日(月)

10:30-12:00

13:00-14:30

14:50-16:20

10月27日(火)

10:30-12:00

13:00-14:30

14:50-16:20



手取川



金沢

能美市



白山山系



# JAISTの特徴(上原私見)

- 大学院大学なので、学部がない
  - 研究に強い大学院(教員が研究をする時間が比較的ある)
  - セメスター制:授業は2カ月単位で進む(週に2回×15回)
  - 学生と教員の「距離」が近い(教職員は400人くらいで学生数は1000人くらい)

# 自己紹介



所属:

北陸先端科学技術大学院大学

情報科学研究科 教授

DBLP 専門分野: 理論計算機科学

- アルゴリズム  
特にグラフアルゴリズム
- 計算量  
特にパズル/ゲームの計算量
- 計算幾何学  
特に計算折り紙

エルデシュ数=2  
(Pavol Hell氏と共著)

JAIST ギャラリーの...

今日、ここにいる理由

Refine by AUTHOR

Ryuhei Uehara (134)  
Erik D. Demaine (32)  
Takeaki Uno (25)  
Martin L. Demaine (22)  
[top 4] [top 50] [all 116]

Refine by VENUE

CCCG (18)  
Theor. Comput. Sci. (TCS) (12)  
ISAAC (12)  
IEICE Transactions (IEICET) (8)  
[top 4] [all 44]

Refine by YEAR

2015 (7)  
2014 (23)  
2013 (14)  
2012 (16)  
[top 4] [all 19]

# 計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- 折り紙(ORIGAMI)
  - 1500年代, おそらく紙の普及とともに自然発生的に...?アジアで...
  - 現在, ORIGAMI はすでに英語化していて, 書店にも ORIGAMI コーナーがある.
  - 折り紙っぽいものも...



# 計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- 折り紙の急激な発展

- 1980年代~1990年代, 折り紙が急速に複雑化した.



前川の「悪魔」  
1980年頃発表  
(正方形1枚から  
折れる！)



川崎ローズ  
1985年頃発表  
(正方形1枚  
から折れる！)



Robert Lang のハト時計  
1987年頃発表  
(1×10の長さの長方形の紙  
1枚から折れる！)

# 計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- コンピュータの利用と折り紙への応用
  - 1990年代以降, コンピュータを用いた折り紙デザインが発展



Robert Lang のハト時計  
1987年頃発表  
(1×10の長さの長方形の紙  
1枚から折れる！)



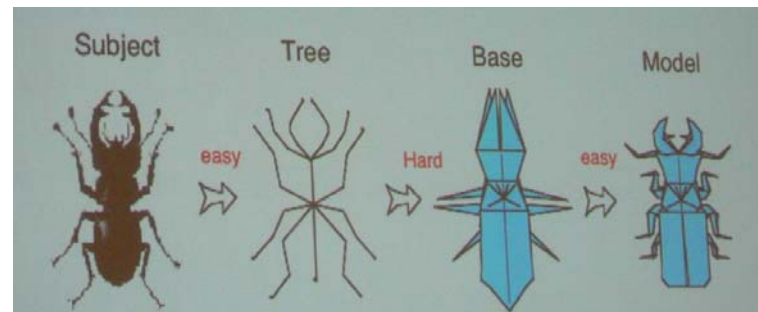
館知宏のOrigamizer  
2007年発表  
(長方形の紙1枚から  
10時間くらいで折れる)



三谷純の回転対称な折り紙  
2010年頃発表  
(長方形の紙1枚から折れる)

# 折り紙とコンピュータサイエンス

- 近年、むしろ海外で脚光をあびている
- 方法論の確立とソフトウェアの開発：
  - 1980年代：前川さんの「悪魔」
    - CAD的に「パーツ」を組み合わせる  
コンプレックス折り紙の発祥
  - 2000年代：LangさんのTreeMaker
    - 与えられた「木構造」(距離つき)  
を正方形上に展開するソフト
    - さまざまな最適化問題を  
現実的な時間で計算





# 折り紙とコンピュータサイエンス

- 折り紙の科学に特化した国際会議:

- 1989年12月 @ Italy

The International meeting of Origami Science and Technology

- 1994年 @ 滋賀県大津

- 2001年3月 @ アメリカ

The International meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (3OSME)

- 2006年9月8日～10日 @ アメリカ

4OSME

- 2010年7月13日～17日 @ シンガポール

5OSME

- 2014年8月10日～13日 @ 東大

6OSME





# 計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- “Computational Origami”の提案

1990年代~

計算幾何学の分野で「計算幾何」や「最適化問題」として「折り」の問題をとらえ始める

この分野の**超**著名な研究者：Erik D. Demaine

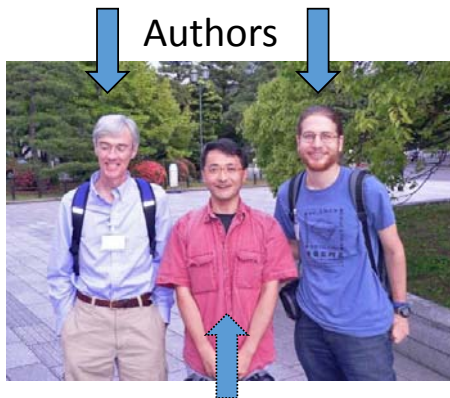
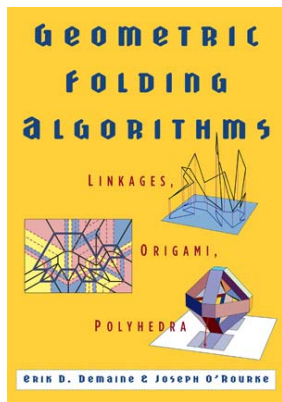
- 1981年生まれ
- 20歳でカナダで博士号を取得し、そのままMITの教員になり、現在に至る
- 彼の博士論文のテーマが計算折り紙であった。



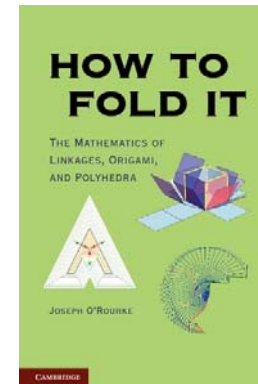
# 計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- 文献紹介

*Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*  
by J. O'Rourke and E. D. Demaine, 2007.



I, translated it to Japanese (2009).



2011



2012

# 本講義のトピック

## 今日: 複数の凸多面体が折れる展開図の研究

- 展開図と立体のとても悩ましい関係: 最大の未解決問題
- 与えられた「展開図」を折って作れる(凸)「立体」

計算幾何

## 明日: 「折り」のアルゴリズムと計算量の関係

- 折り紙の基本操作
- 折り紙のアルゴリズムと計算量
  - 1次元の紙における効率のよい折り方(アルゴリズムと計算量)
  - 1次元の紙における計算不能性(計算の理論)

アルゴリズム  
計算量

# (辺)展開図とは？

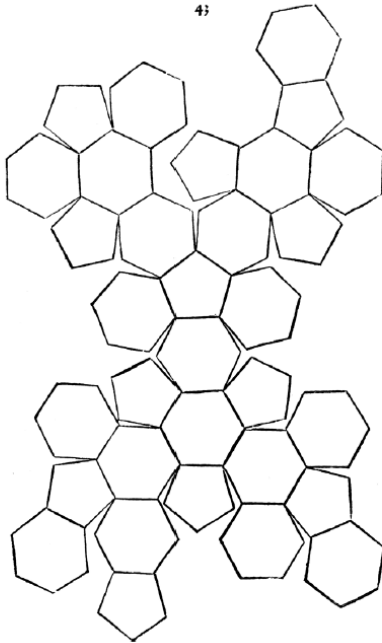
- (一般)展開図: 多面体の表面を切って平面上に広げた多角形
    - 連結であること
    - 重なりを持たない単純多角形であること(便宜上、直線の集まりとする)
  - (辺)展開図: 多面体の辺に沿って切り広げた多角形
    - 展開の境界部分は多面体の辺からなる
- ★今日は「展開図」といえば一般の展開図という意味なので注意

# 展開図の簡単な歴史

- アルブレフト・デューラーの『画家マニュアル』(1525)

In andro das mach auß zweinzig sechs eckter flachen selbern gleichförmig und windlich/  
so man darzu auß zwölz fünf eckter flacher selber so die gleichförmig gegen dem sechs ecktem  
den wie ich das offen im plano hernach hab außgerissen / So man dann das alles zusammen  
schleuß so wirt ein corpus daraus das gewinner insey und sechs zig eck/ vnd neunzig schwarz  
stein/ die Corpus rüret in einer helen kugel mit allen seinen ecken an.

43



- 数多くの立体を辺展開図で記述していた
- どうも以下の成立を予想していた...?

**未解決予想:**

任意の凸多面体は辺展開図を持つ

# 展開図の簡単な歴史

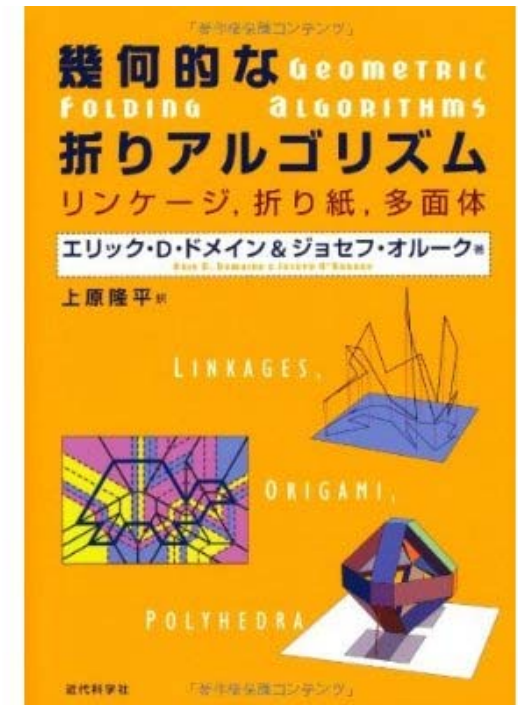
**未解決予想:**

任意の凸多面体は辺展開図を持つ

(今日はやらない) 未解決予想の周辺の結果:

- 反例らしいものすら見つかっていない(当然?)
- 凹多面体なら反例がある  
(どんな辺展開も重なってしまう)
- 辺展開でなく一般展開なら可能  
(一般の点から各頂点に最短路を描いて切るという方法)
- ランダムな凸多面体をランダムに展開すると  
実験的にはほぼ確率1で重なってしまう

**まとめ:** 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない



もし興味があれば...



# 展開図の簡単な歴史

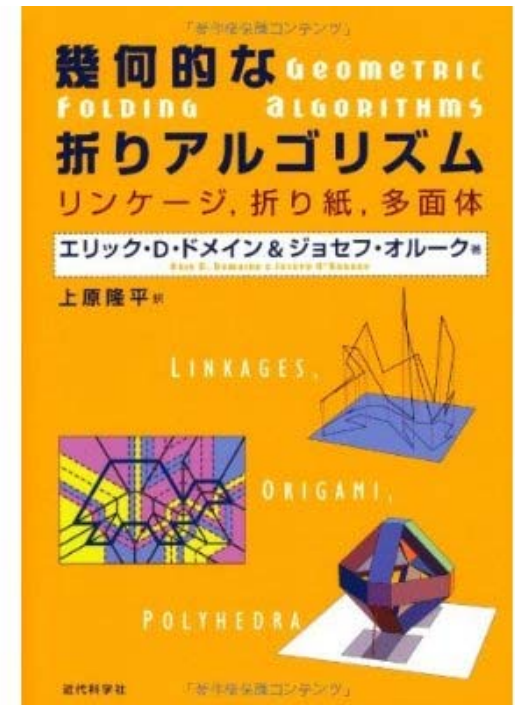
**未解決予想:**

任意の凸多面体は辺展開図を持つ

**まとめ:** 展開図に関してわかっていることは、  
ほとんどない

**本研究の興味の対象:**

- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる(凸)多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- (凸)多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム



もし興味があれば...

# 展開図の簡単な歴史

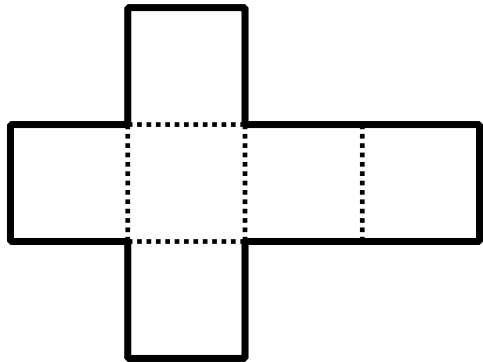
**ポイント:** 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

**本研究の興味の対象:**

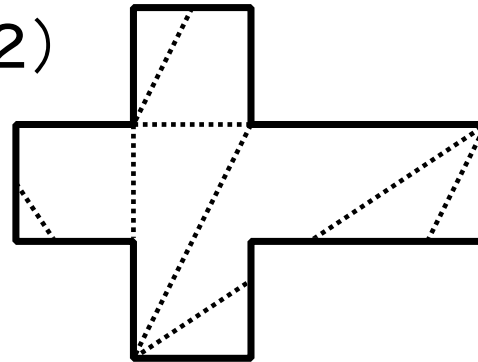
- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる(凸)多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- (凸)多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム

**演習問題:** 何が折れるでしょう？

(1)



(2)



ちなみにこの「ラテンクロス」からは85通りで23種類の異なる凸多面体が折れることが知られている。

# 今日の予定

1. 展開図の基礎的な知識

1. 正多面体の共通の展開図

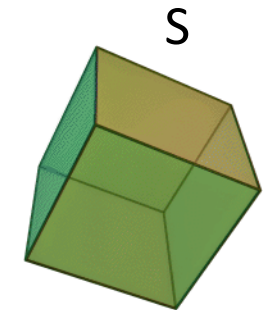
1時間目～2時間目

2. 正多面体に近い立体と正4面体の共通の展開図: 2時間目～3時間目

3. 複数の箱が折れる共通の展開図: 3時間目

# 1. 展開図の基礎知識(1)

凸多面体 $S$ の頂点と辺から構成されるグラフを $G$ とする



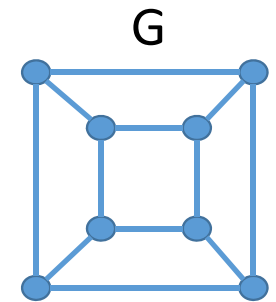
[全域木定理(その1)]

$S$ の辺展開におけるカットラインは、 $G$ 上の全域木である

系: 正多面体では、  
すべての辺展開  
においてカットの  
長さは同じ

[証明]

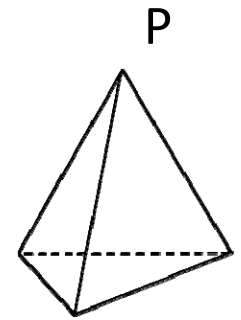
- すべての点を訪れること:  
カットされない頂点があると、平坦に開けない
- 閉路をもたないこと:  
閉路があると、展開図がばらばらになってしまうため、連結にならない



[全域木定理(その2)]

$S$ の一般展開におけるカットラインは、 $S$ 上ですべての頂点を張る木である

# 1. 展開図の基礎知識(2)

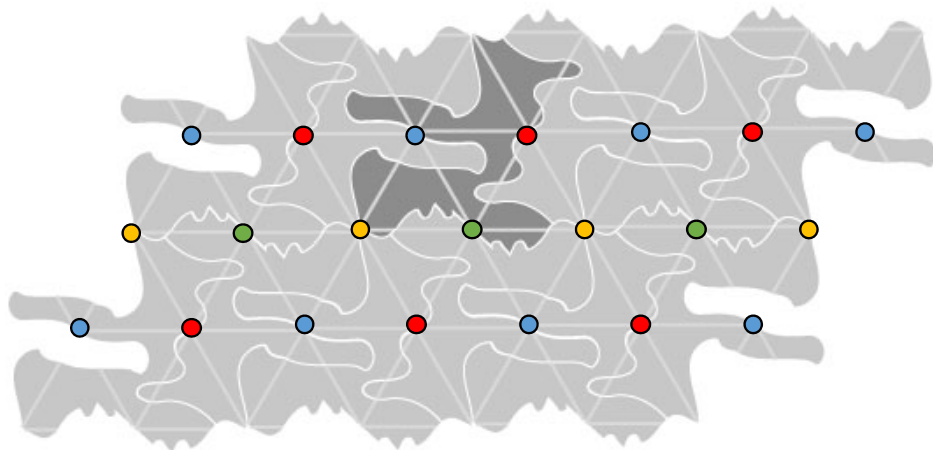


## 正四面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

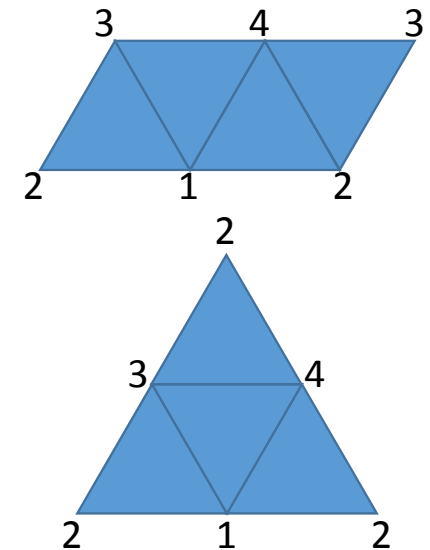
[正四面体の展開図定理(秋山 2007)]

正四面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。

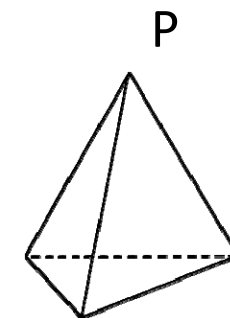
- (1) Pは **p2 タイリング**。つまり $180^\circ$  回転で敷詰め可能
- (2) **回転中心の4頂点**が正三角格子をなす
- (3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない



参考: 正四面体の辺展開図は二種



# 1. 展開図の基礎知識(2)



## 正四面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

[正四面体の展開図定理(秋山 2007)]

正四面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。

- (1) P は **p2 タイリング**。つまり180° 回転で敷詰め可能
- (2) **回転中心の4頂点**が正三角格子をなす
- (3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

Tile-Makers and Semi-Tile Makers,  
Jin Akiyama, *The Mathematical Association of America, Monthly* 114,  
pp. 602-609, 2007.

[直感的な説明]

平面上で正四面体を4回、  
上手に転がすと、元に戻る。  
各面にインクをつけて転がすと  
平面全体にスタンプを押せる。

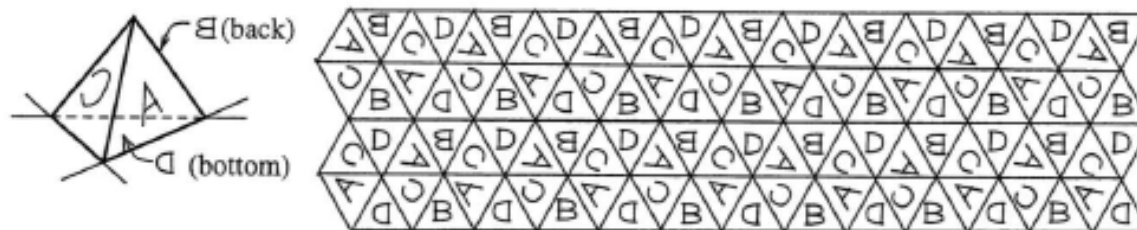
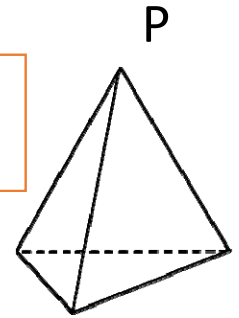


Figure 2.1. Carved regular tetrahedron R and the tiling by stamping with R.

# 1. 展開図の基礎知識(3)

4単面体(Tetramonohedron):  
4つの面が合同な4面体



## 4単面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

[4単面体の展開図定理(秋山、奈良 2007)]

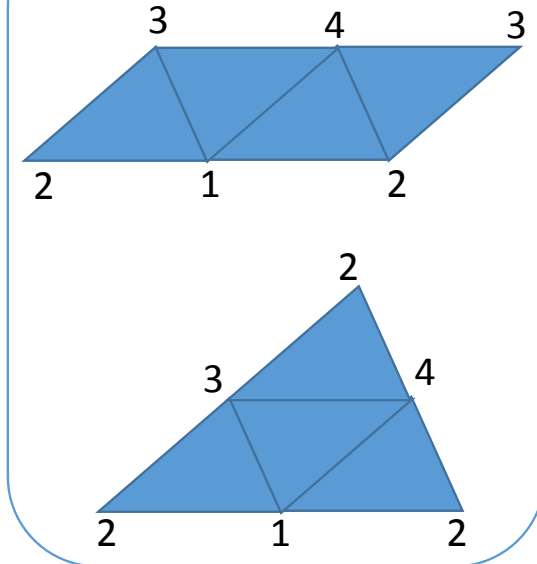
4単面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。

- (1) Pは **p2 タイリング**。つまり $180^\circ$  回転で敷詰め可能
- (2) **回転中心の4頂点**がその単面による**三角格子**をなす
- (3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

[直感的な説明]

正三角形を全体にゆがませればよい。

参考: 4単面体の辺展開図は二種



# 1. 展開図の基礎知識：演習問題

正多面体の一般展開図の最短カットの長さは？

- 正4面体にはわりと美しい最適解があります
  - 最適解とその証明ができればなおよし
- 正8面体と正6面体
  - 最適解を見つけるのは、なんとかなると思う
  - 最適性を示すのは、手間がかかります
- 正20面体と正12面体
  - 最適解を見つけるのはちょっと大変かも