今日の予定

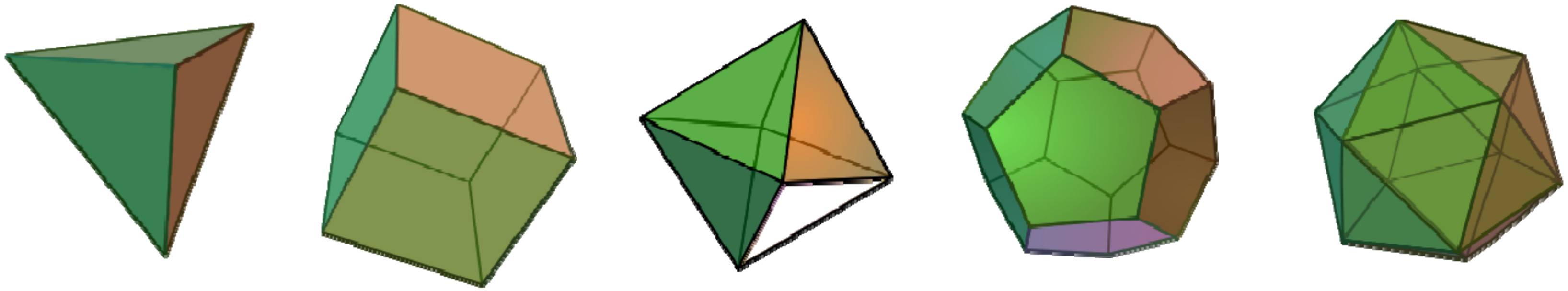
1. 展開図の基礎的な知識

1. <u>正多面体の共通の展開図</u>

1時間目～2時間目

2. 正多面体に近い立体と正４面体の共通の展開図：2時間目～3時間目

3. 複数の箱が折れる共通の展開図：3時間目



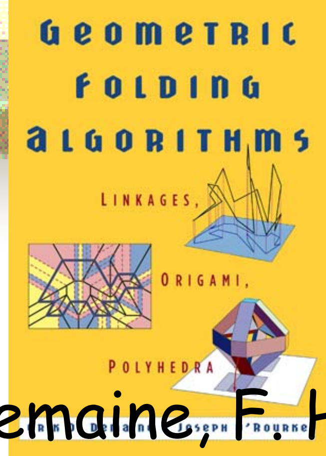
複数の正多面体を折れる展開図について

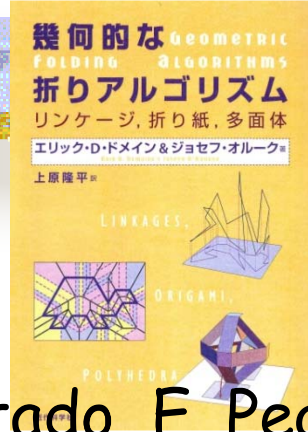
上原隆平(JAIST), 堀山貴史 (埼玉大学), 白川俊博(アマチュア数学者？)

文献

Toshihiro Shirakawa, Takashi Horiyama,and Ryuhei Uehara.
Construct of Common Development of Regular Tetrahedron and Cube
27th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2011)
pp. 47-50, 2011/3/28-30

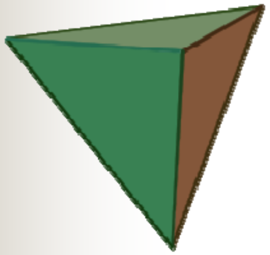
はじめに



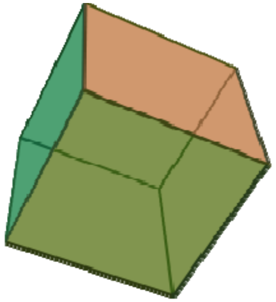


- 未解決問題25.6
  (by M. Demaine, F. Hurtado, E. Pegg)
  - Can any **Platonic solid** be cut open and unfolded to a polygon that may be refolded to a **different Platonic solid**?

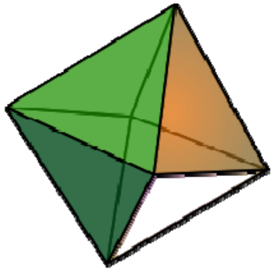
  For ex., may a cube be so dissected to a tetrahedron ?



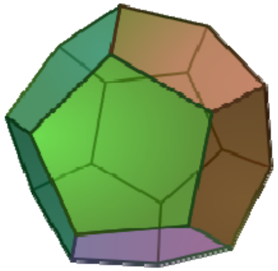
正4面体



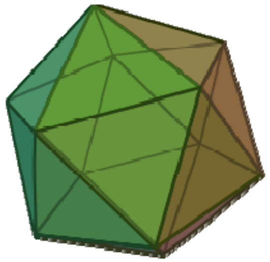
立方体



正8面体

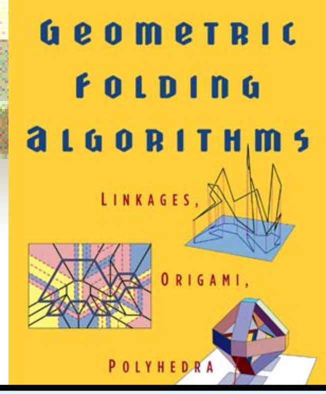


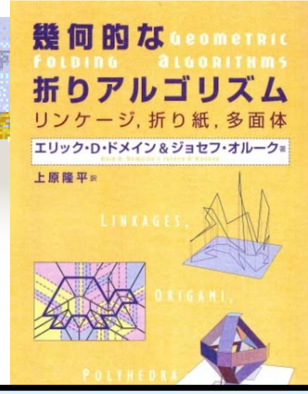
正12面体



正20面体

はじめに



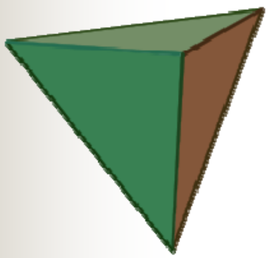


- 未解決問題25.6

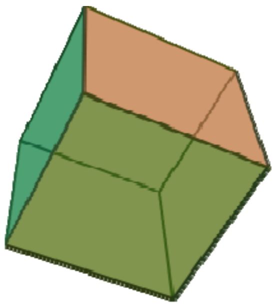
複数の正多面体を折ることができる

共通の展開図は存在するのか？

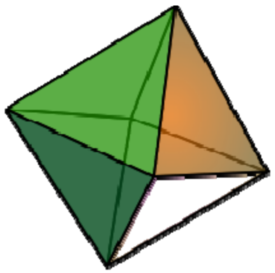
For ex., may a cube be so dissected to a tetrahedron?



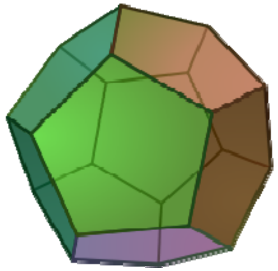
正4面体



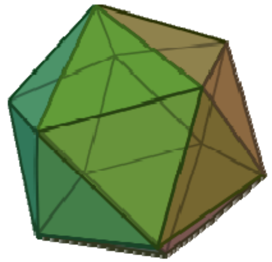
立方体



正8面体

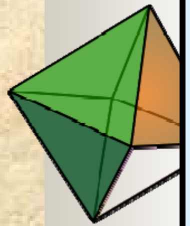


正12面体



正20面体

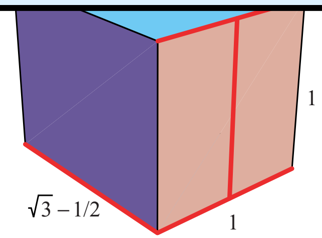
はじめに

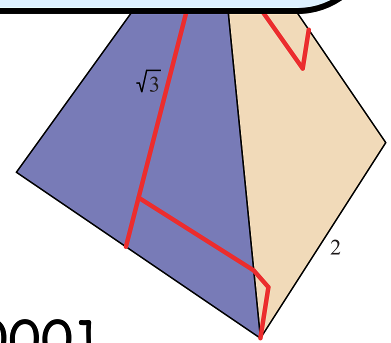


複数の正多面体を折ることができる
共通の展開図は存在するのか？

惜しい！ [O’Rourke]

正8面体⇔4単面体
（＝すべての面が合同な4面体）



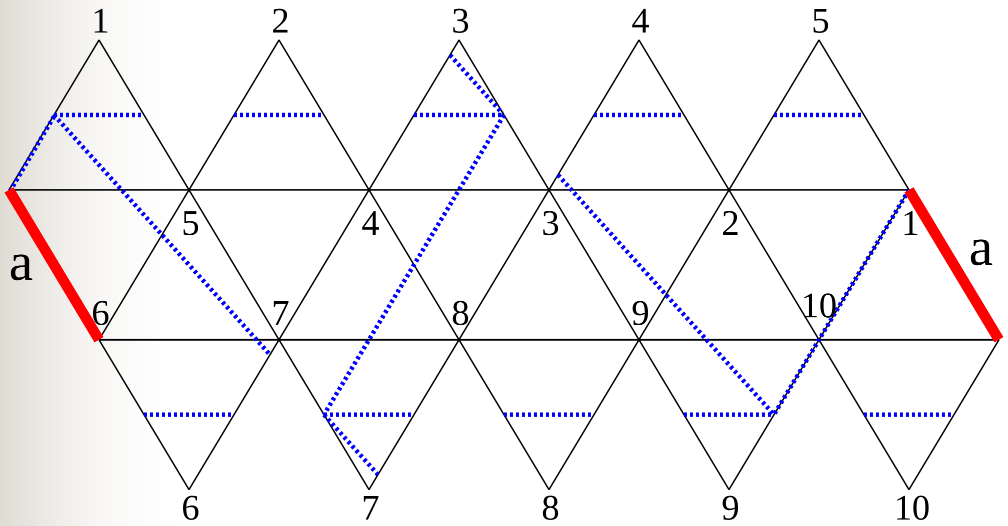


惜しい!! [平田2000]

正4面体
⇔ 箱（大きさ 1 x 1 x 1.232）

複数の正多面体を折ることができる共通の展開図は存在するのか？

惜しい！ 例たち（上原2010）



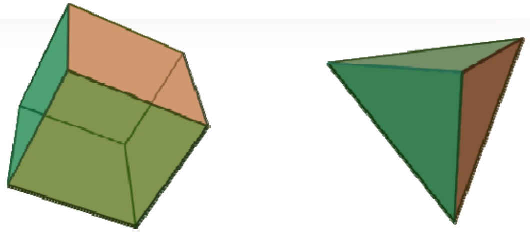
正20面体⇔ ４単面体

演習問題

以下の共通の展開図を考えてみよ．どのくらい正多面体に近いか検討せよ．

- 立方体⇔4単面体
- 八面体⇔4単面体

今回の結果



ある「点列を生成するプログラム」を作った。

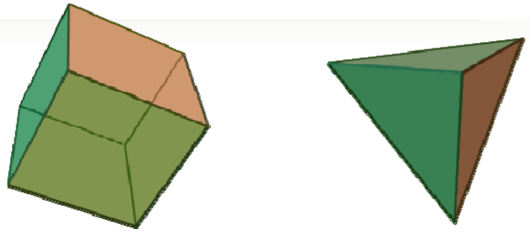
生成される点列は、

(1) 無限個の点を生成すると、それは立方体と正４面体が両方折れる展開図に収束する！

- ある意味で未解決問題を解決した！
- …一部証明できてない部分がある

(2)

今回の結果



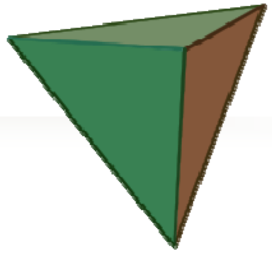
ある「点列を生成するプログラム」を作った。

生成される点列は、

(1) 無限個の点を生成すると、それは立方体と正４面体が両方折れる展開図に収束する（一部予想）

(2) 立方体と正４面体に極めて近い4単面体を折れる展開図が存在する。「極めて近い」辺の長さの誤差は高々 $\varepsilon < 2.89 \times 10^{-1796}$ でおさえられる（定理）

鍵を握る定理



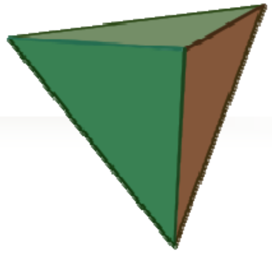
- 定理 [秋山2007, 秋山・奈良2007]

正4面体の任意の展開図をP とする。

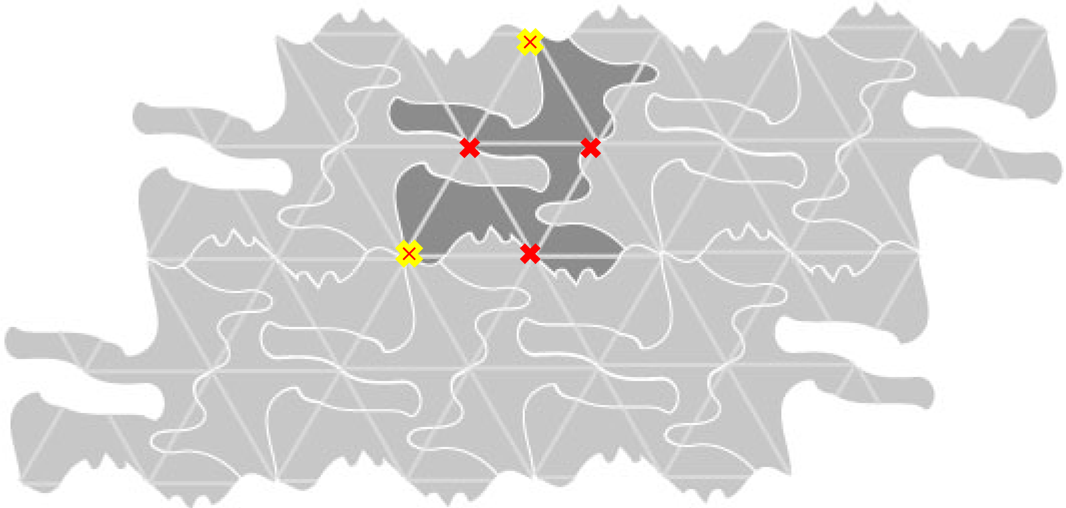
するとP はタイリングである。

つまりP は平面を埋め尽くす。

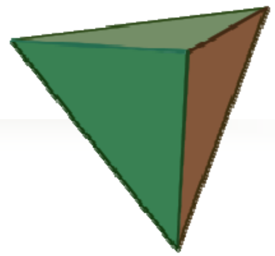
鍵を握る定理(詳細)



- 定理 [秋山2007, 秋山・奈良2007]
  P が正4面体の展開図である必要十分条件は
  (1) Pはp2タイリング。つまり180° 回転で生成される
  (2) 回転中心の4点が三角格子を構成する
  (3) 上記の4点はタイリング上の「同値関係」にない



鍵を握る定理(詳細)



- 定理 [秋山2007, 秋山・奈良2007]

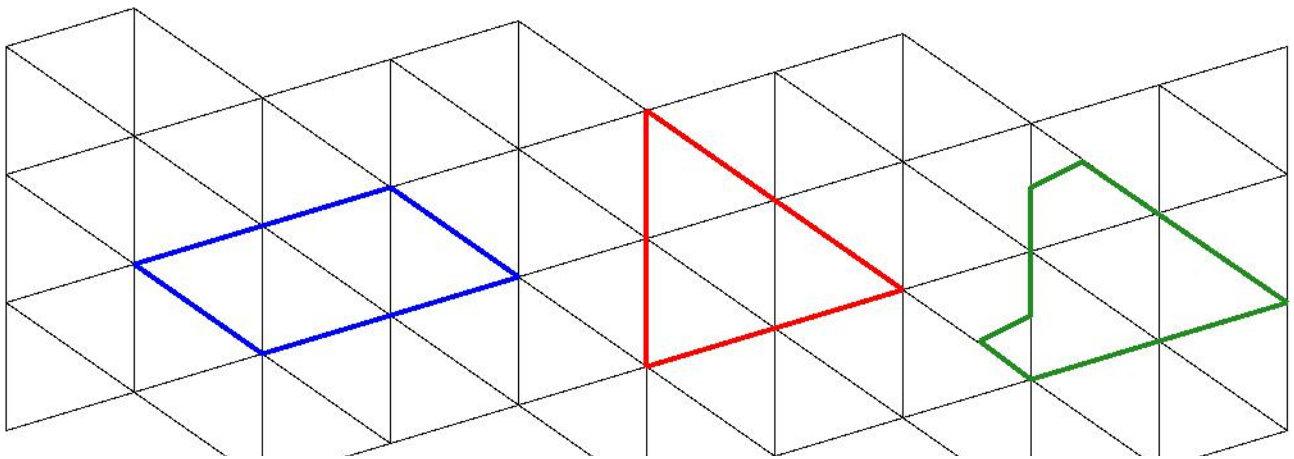
  P が4単面体の展開図である必要十分条件は

  (1) Pはp2タイリング。つまり180° 回転で生成される

  (2) 回転中心の4点が(必ずしも正三角形でない)

  三角格子を構成する

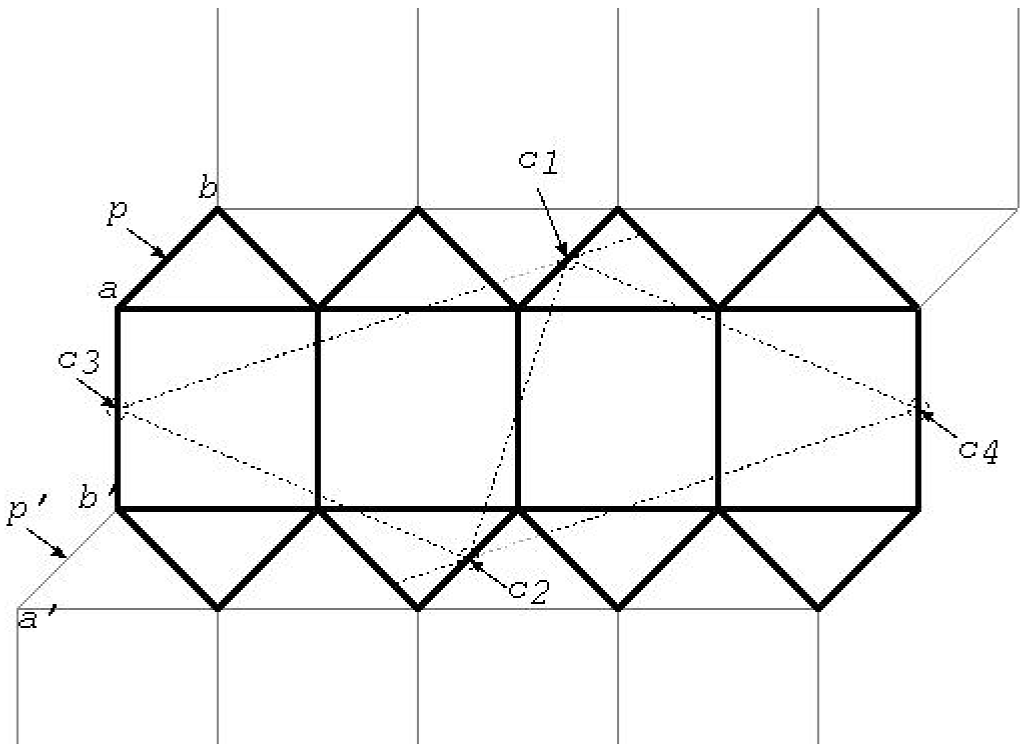
  (3) 上記の4点はタイリング上の「同値関係」にない



展開図の構成方法

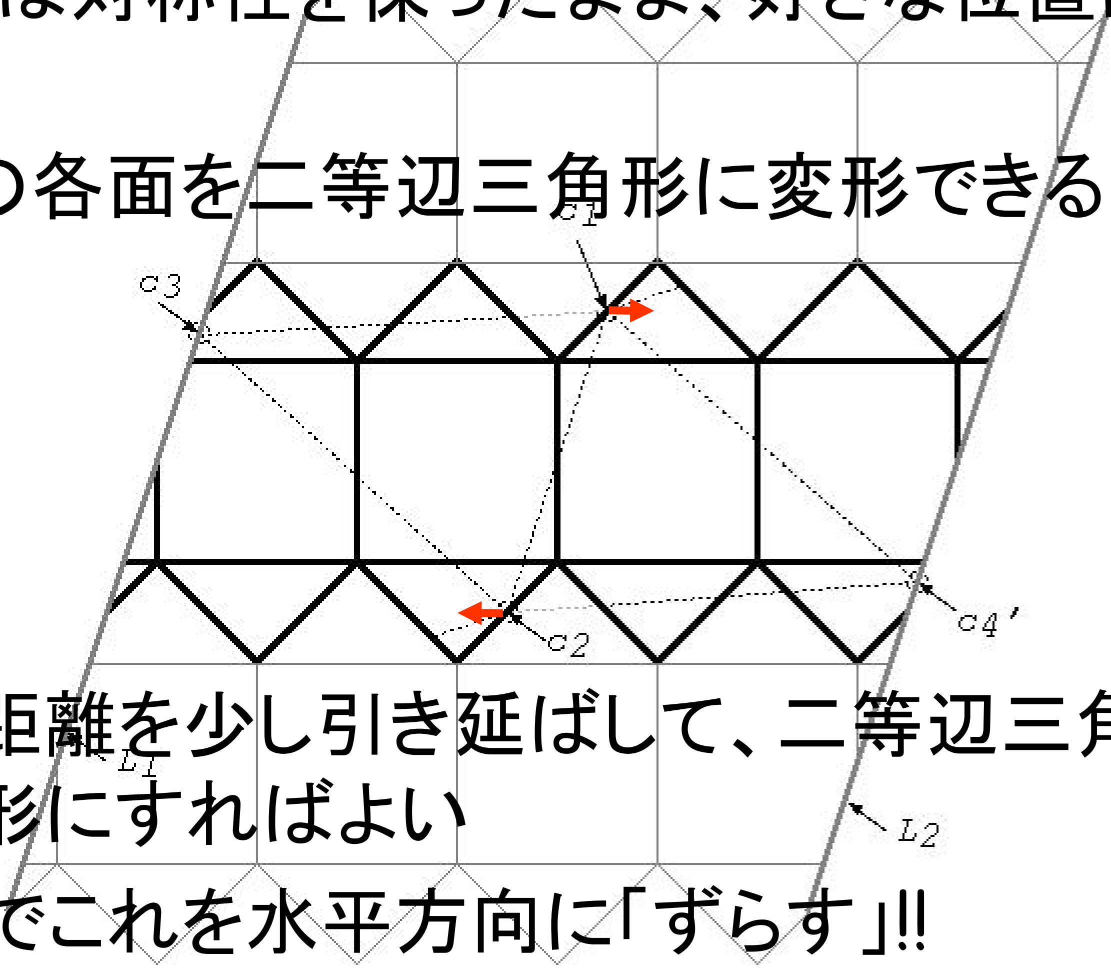
- 立方体の展開図を以下を保持したまま変形する:
  - 立方体の展開図
  - p2タイリング = 4単面体の展開図

初期展開図



展開図の構成方法

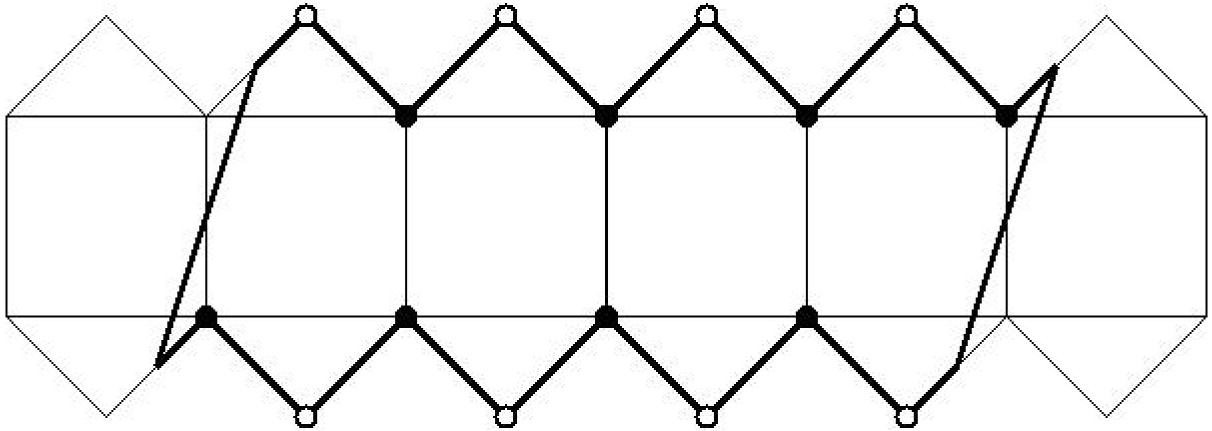
- L_1 と L_2 をc_1c_2と平行に切りなおす
  … c_3 と c_4 は対称性を保ったまま、好きな位置に移動できる
- ４単面体の各面を二等辺三角形に変形できる



- c_1c_2 間の距離を少し引き延ばして、二等辺三角形を正三角形にすればよい
  - …そこでこれを水平方向に「ずらす」!!

展開図の構成方法

- 展開図の辺上には、いくつか動かすことのできない「固定点」が存在する

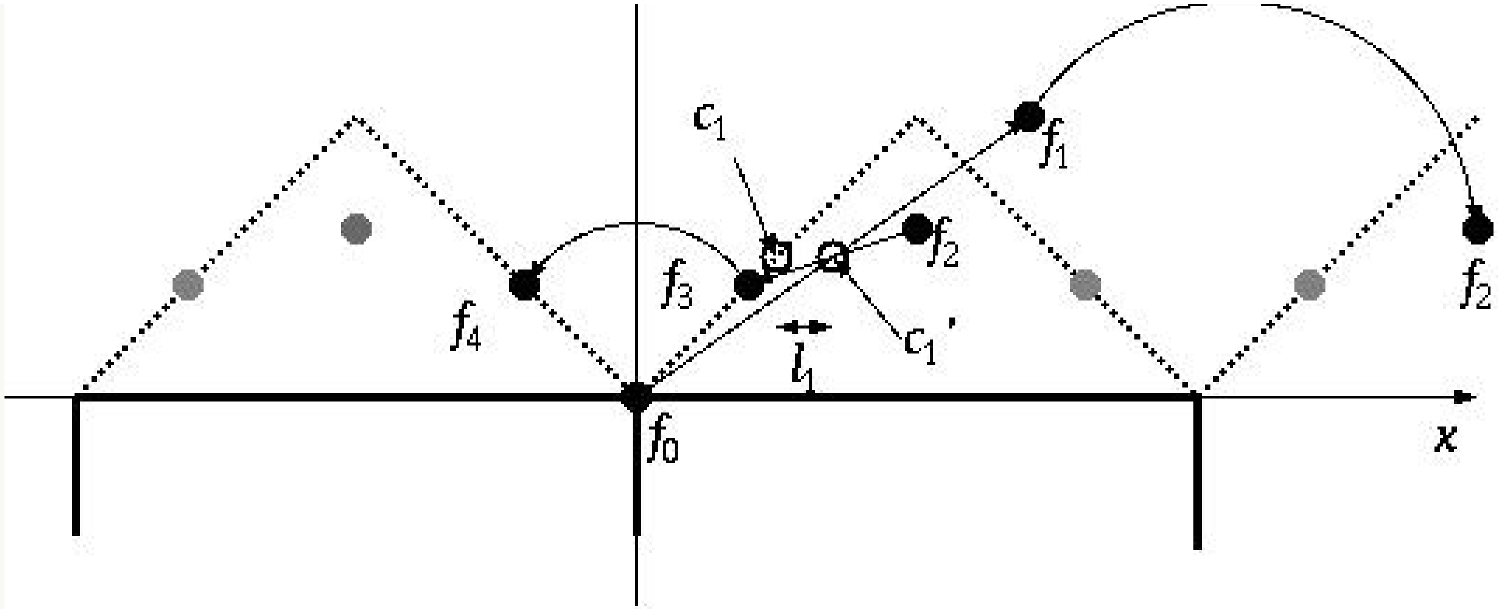


○ :立方体の「フタ/底」の中心を作る点

● :立方体の「角(頂点)」を作る点

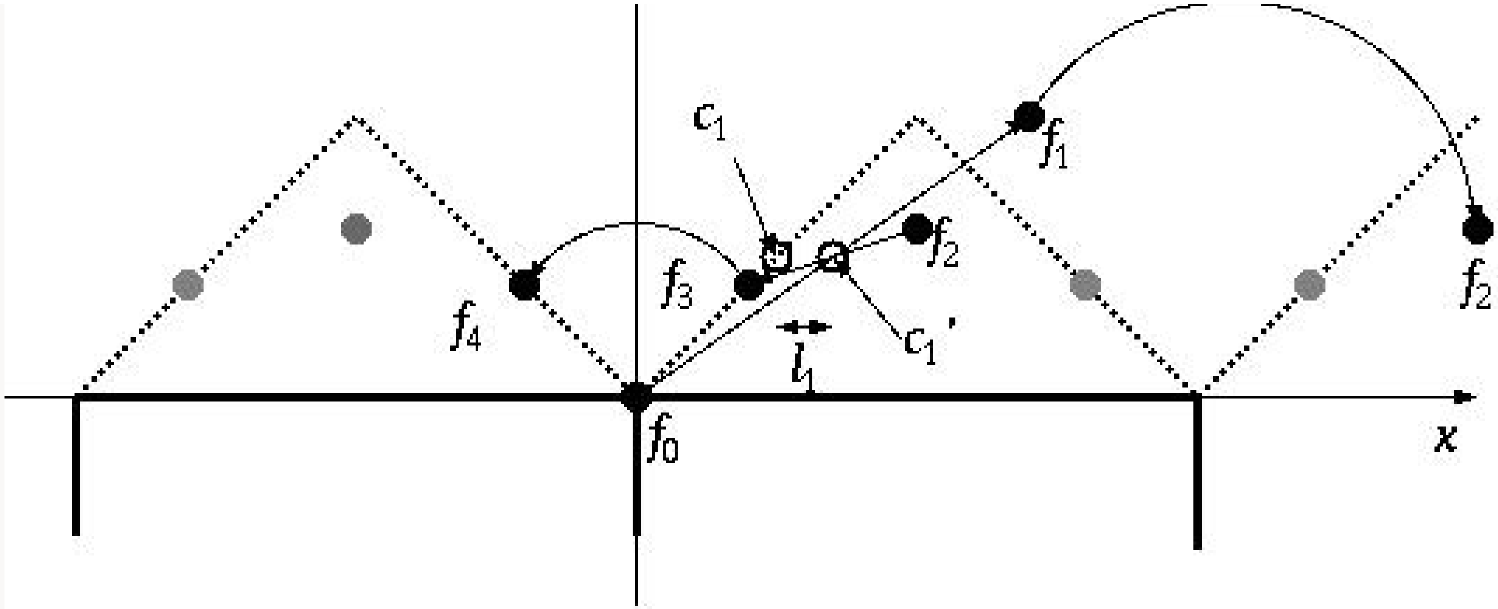
回転対称の相手同士でもある…

c_1 (や c_2)を動かす方法



- 回転中心 c_1 を c_1' に距離 l_1 だけ「ずらす」と…
  - 全体はp2タイリングなので、動かせない「固定点」の“像”の方を動かしてやればよい
  - 回転対称の新しい中心 c_1' に対する像の列は、「新しい展開図で輪郭の上に乗って」いなければならない点である

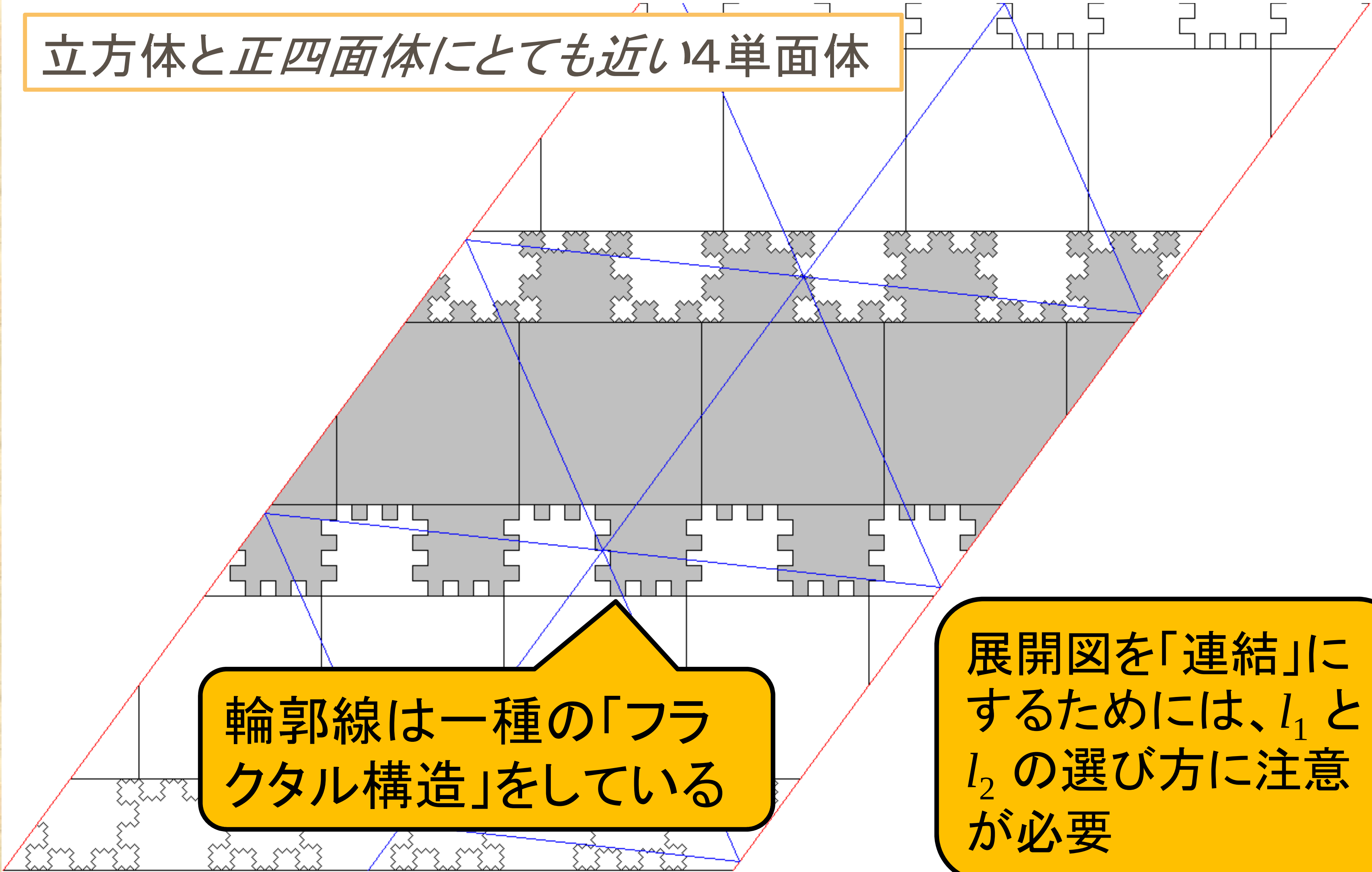
c_1 (や c_2)を動かす方法



- 回転中心 c_1 を c_1' に距離 l_1 だけ「ずらす」と…
  - l_1 が有理数: 得られる有限個の点を結べば、正しい展開図が構成できる
  - l_1 が無理数: 無限個の点列が生成されて、「展開図」に「収束」する

生成例

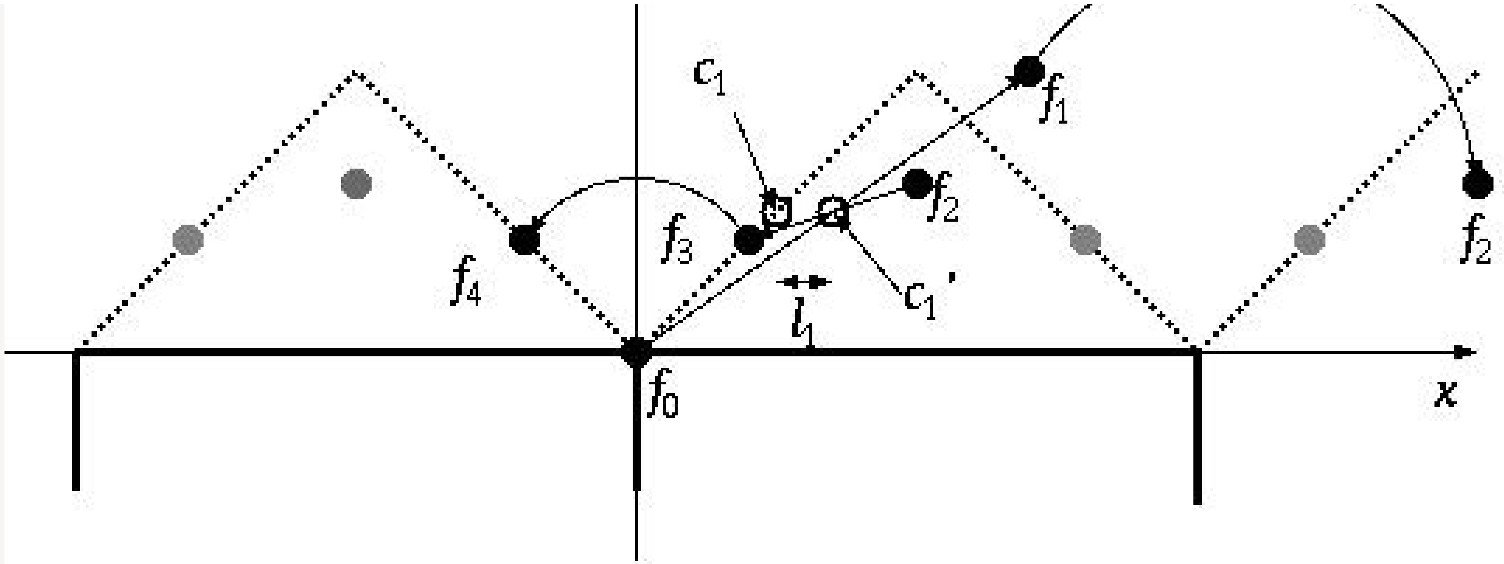
立方体と*正四面体にとても近い*4単面体



輪郭線は一種の「フラクタル構造」をしている

展開図を「連結」にするためには、l_1 と l_2 の選び方に注意が必要

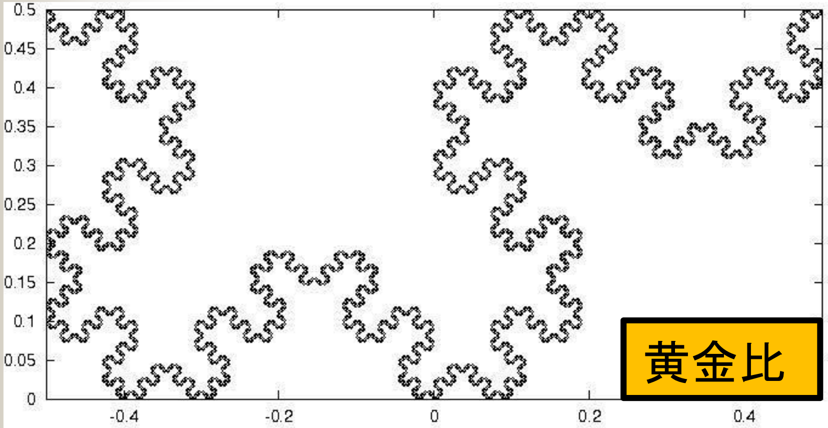
輪郭線の特徴(予想)

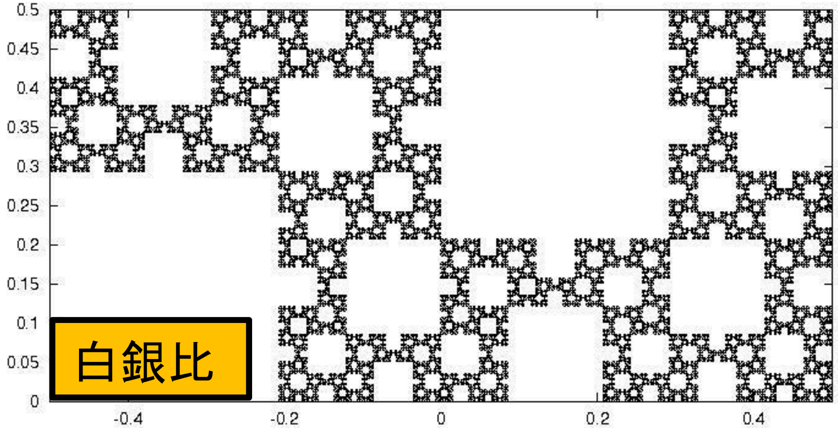


- [実験的な観測/予想] こうした「フラクタル曲線」は、l_1 の値の連分数展開の係数によって決まる

$$l_1 = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

輪郭線の特徴(予想)

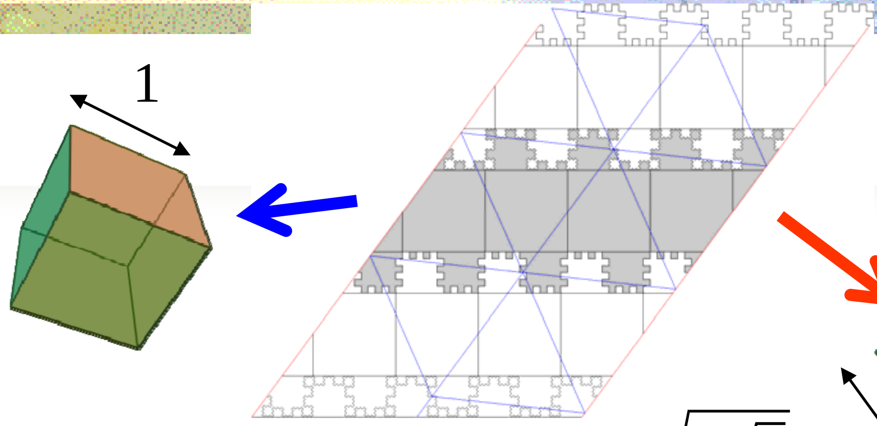


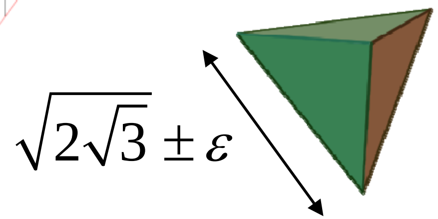


- [実験的な観測/予想] こうした「フラクタル曲線」は、l_1 の値の連分数展開の係数によって決まる

$$l_1 = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

まとめ





ある「点列を生成するプログラム」を作った。生成される点列は、

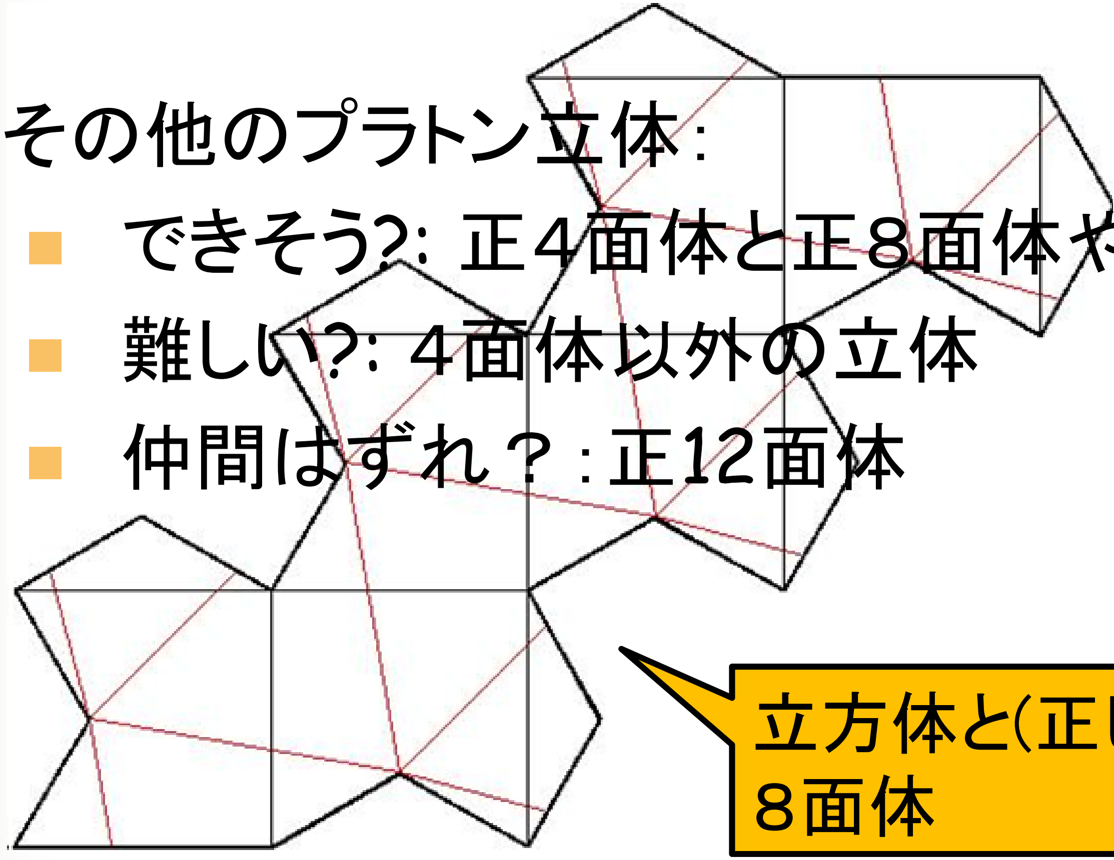
予想 無限個の点を生成すると、それは立方体と正４面体が両方折れる展開図に収束する

定理 立方体と正４面体に極めて近い4単面体を折れる展開図が存在する。「極めて近い」辺の長さの誤差は高々 $\varepsilon < 2.89 \times 10^{-1796}$ でおさえられる

未解決問題

- [実験的な 定理 予想] こうした「フラクタル曲線」は、l_1 の値の連分数展開の係数によって決まる

- その他のプラトン立体:
  - できそう?: 正4面体と正８面体や正20面体
  - 難しい?: ４面体以外の立体
  - 仲間はずれ？: 正12面体



立方体と(正じゃないけど)８面体