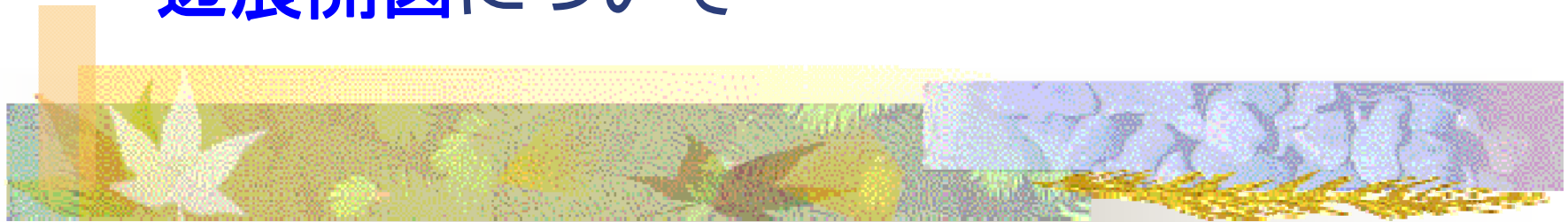


今日の予定

1. 展開図の基礎的な知識
 1. 正多面体の共通の展開図
- } 1時間目～2時間目
2. 正多面体に近い立体と正4面体の共通の展開図: 2時間目～3時間目
 3. 複数の箱が折れる共通の展開図: 3時間目

正四面体が折れる ジョンソン・ザルガラー立体の 辺展開図について



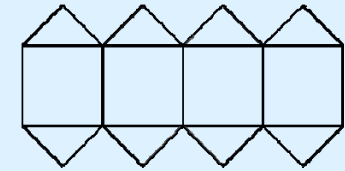
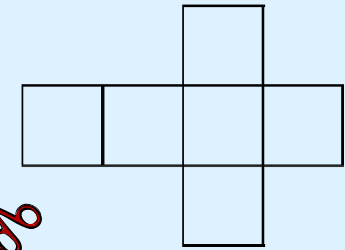
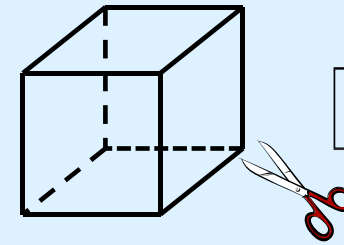
荒木 義明 (日本テセレーションデザイン協会)

堀山 貴史 (埼玉大学)

上原 隆平 (北陸先端科学技術大学院大学)

辺展開 … 辺に沿って切る

一般展開 … 辺以外に、面を切ってもよい



辺展開図について

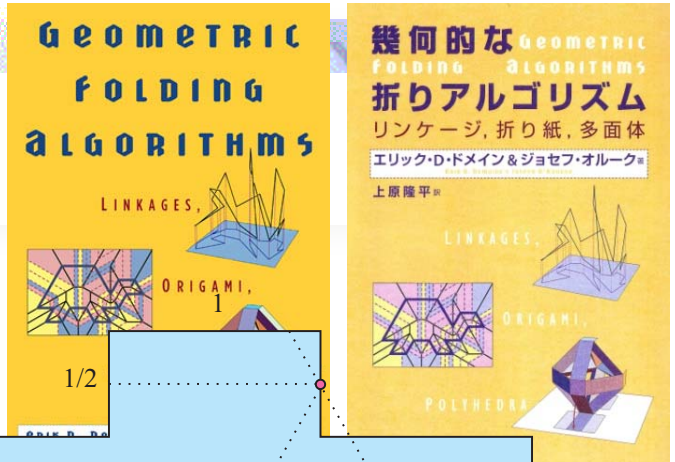
荒木 義明 (日本テセレーションデザイン協会)

堀山 貴史 (埼玉大学)

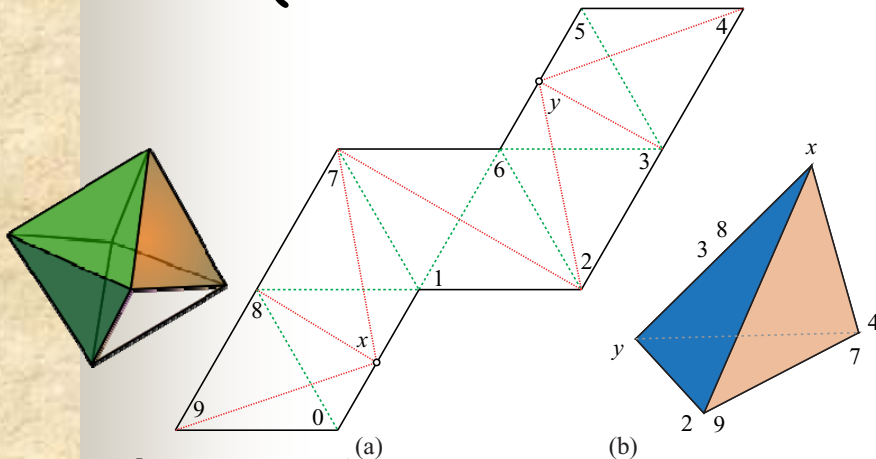
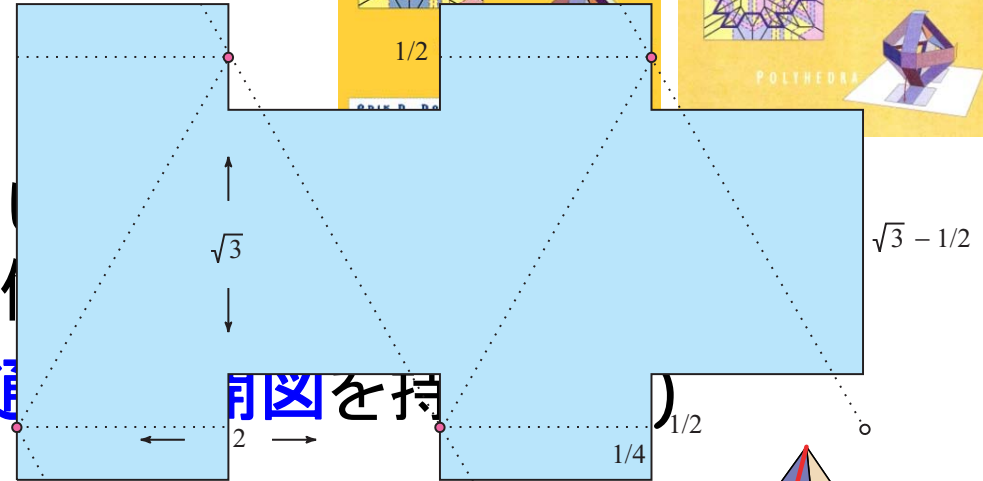
上原 隆平 (北陸先端科学技術大学院大学)

Open Problem 25.6

(by M. Demaine, F. Hurtado, E. Pegg)

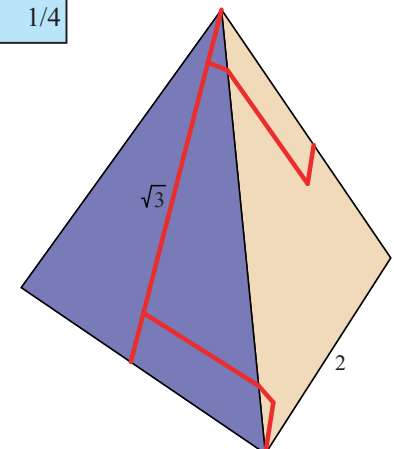
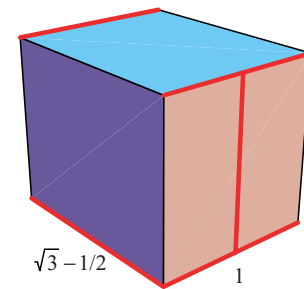


- ある正多面体を切り開き、そこから異なる正多面体 (2つの正多面体が共通面を持つ)



おいしい!

Regular Octahedron
 ⇔ Tetramonohedron (面が合同)

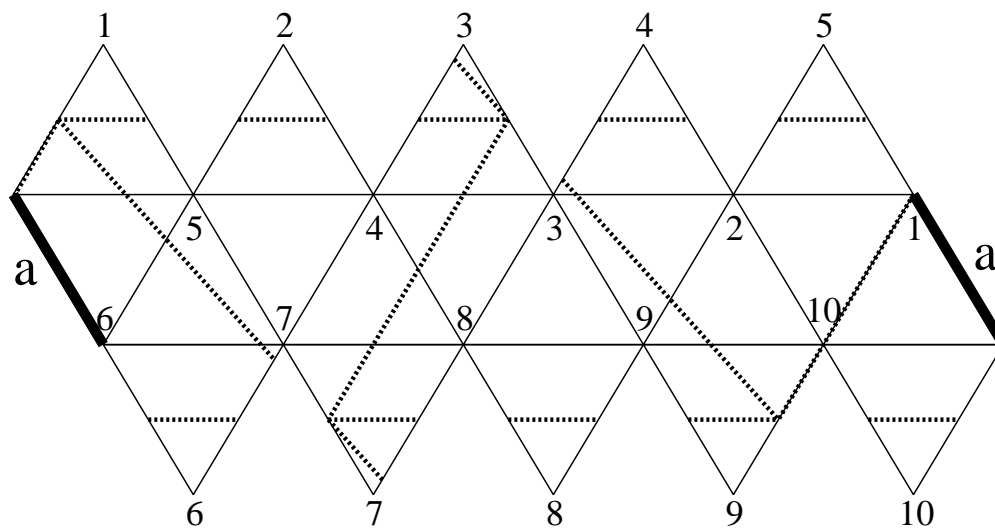
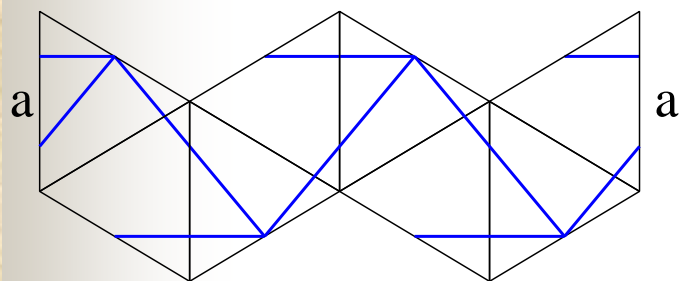
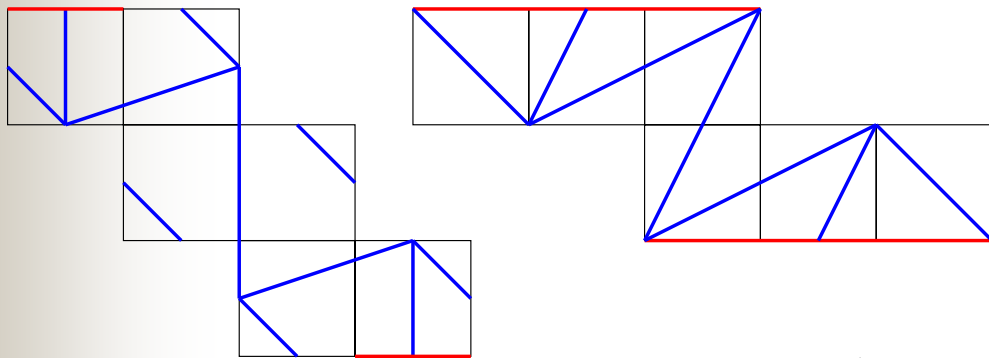


おいしい!! [K. Hirata 2000]

Regular Tetrahedron
 ⇔ Box $1 \times 1 \times 1.232$

共通の展開図

■ おいしい [Uehara 2010]



共通の展開図

あたりまえ？

立方体の辺展開：
11種類

正8面体の辺展開：
11種類

■ Theorem [Horiyama, Uehara 2010]

以下を同時に満たす多角形 P は、存在しない

(1) P は、**正四面体**の一般展開

(2) P は、**立方体**、

正八面体、

正十二面体、

正二十面体の**辺展開**

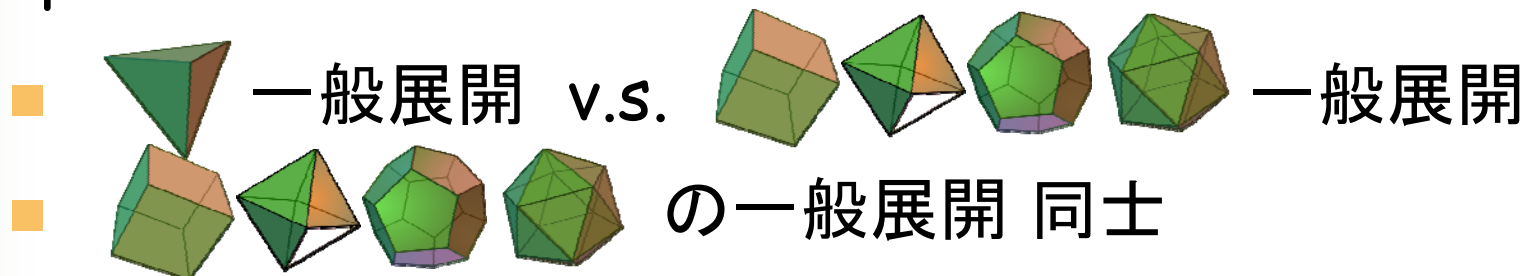
正12面体の辺展開：
43380種類

正20面体の辺展開：
43380種類

or

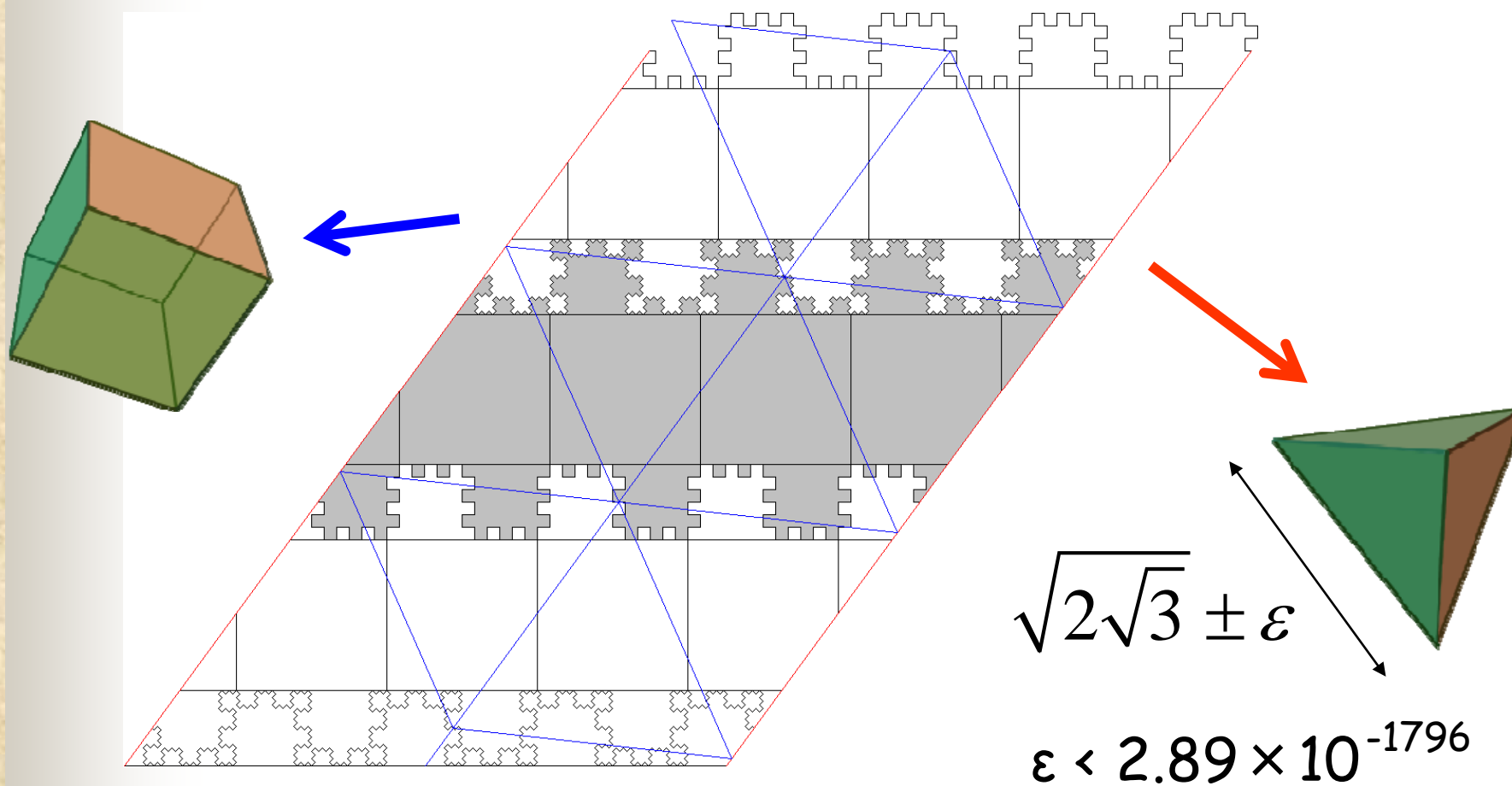
本当に展開図になっていることも
[Hiroyama, Shoji 2011]が初出！

■ Open



共通の展開図

- 正四面体 v.s. 立方体 [Shirakawa, Horiyama, Uehara 2011]

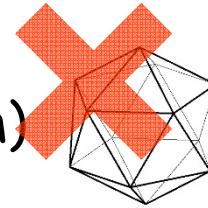


Our Results

- 正四面体 (一般展開)
v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

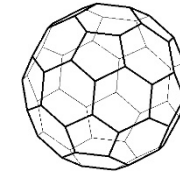
- 各面が正多角形
- 凸多面体

- 正多面体 (面が1種類、uniform)

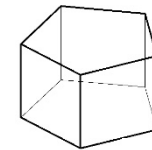


[Horiyama,
Uehara 2010]

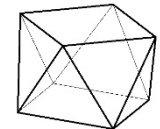
- 半正多面体 (面が2種類以上、uniform)



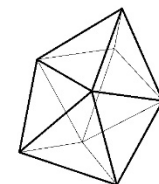
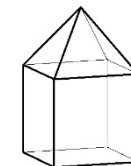
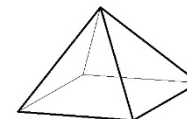
- 正 n 角柱 (上下が正 n 角形、側面が正方形)



- 正 n 反角柱 (上下が正 n 角形、側面が正三角形)



- ジョンソン・ザルガラー多面体

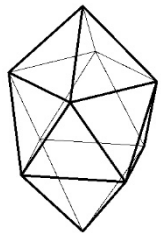


Our Results

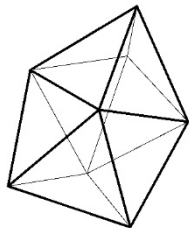
- 正四面体 (一般展開)
v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

- 各面が正多角形
- 凸多面体

- ジョンソン・ザルガラー多面体: 全 92種類



- J17 (Gyroelongated square dipyramid)



- J84 (Snub disphenoid)

共通の展開図あり

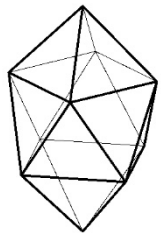
- 半正多面体、正 n 角柱、正 n 反角柱、
その他JZ多面体 90種類: 共通の展開図なし

Our Results

- 正四面体 (一般展開)
v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

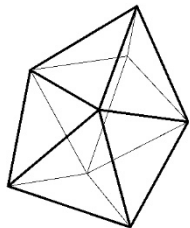
- 各面が正多角形
- 凸多面体

- ジョンソン・ザルガラー多面体: 全 92種類



- J17 (Gyroelongated square dipyramid) 辺展開 13,014 個

- 78個 : 1通りの折り方
- 8個 : 2通りの折り方
- 1個 : 3通りの折り方



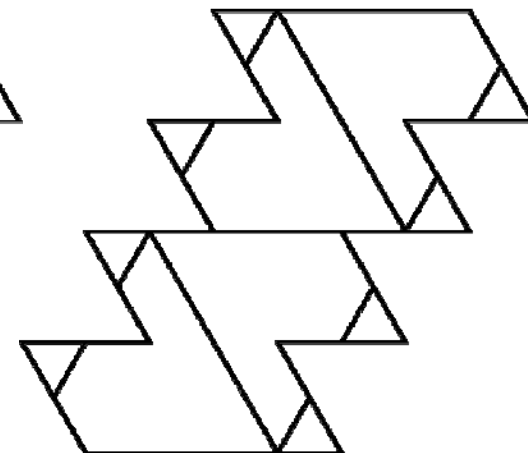
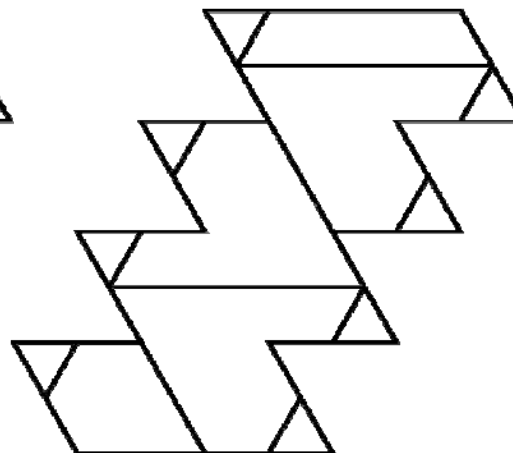
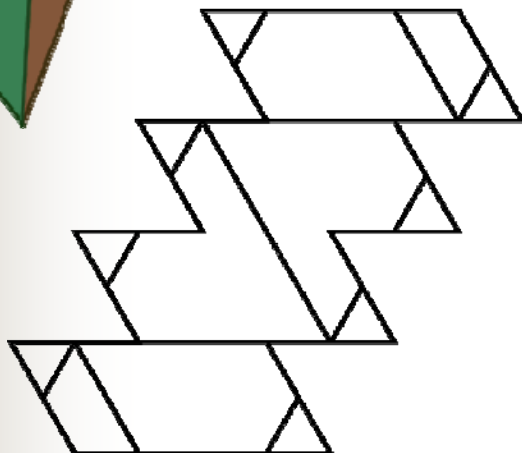
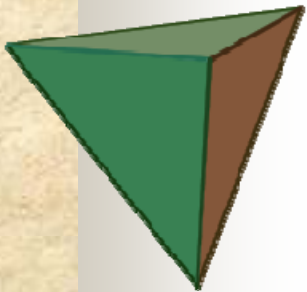
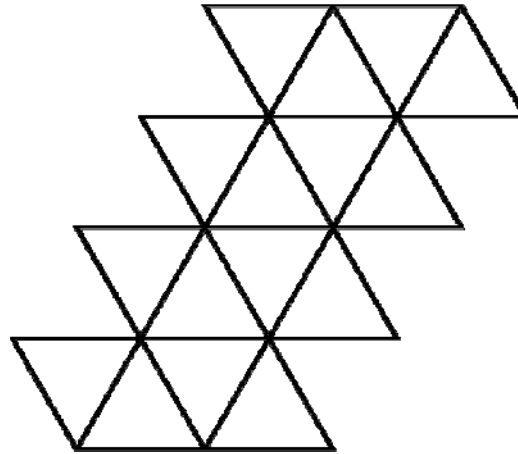
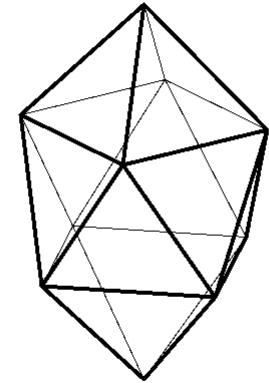
- J84 (Snub disphenoid) 辺展開 1,109 個

- 32個 : 1通りの折り方
- 5個 : 2通りの折り方

- 半正多面体、正 n 角柱、正 n 反角柱、
その他JZ多面体 90種類 : 共通の展開図なし

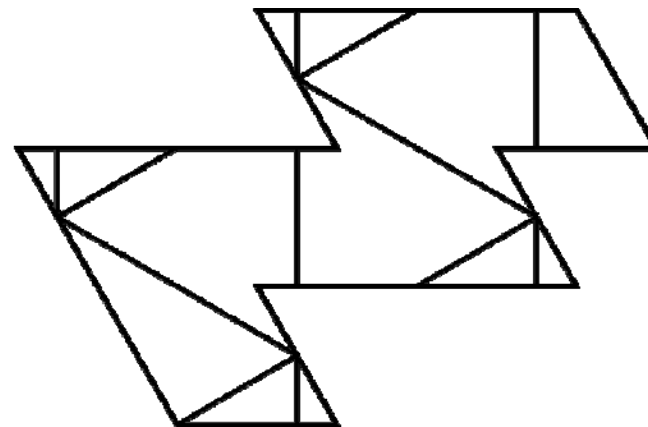
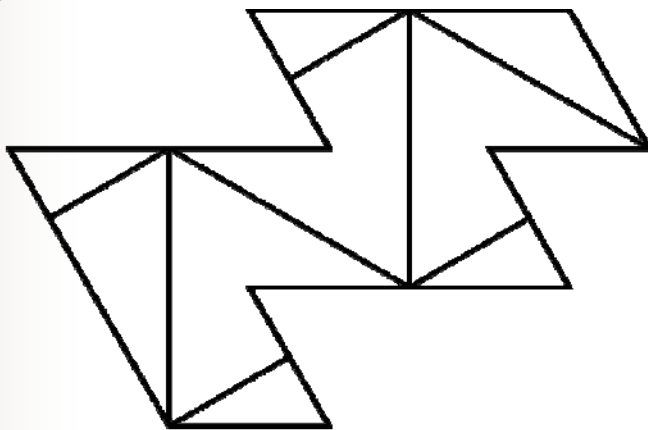
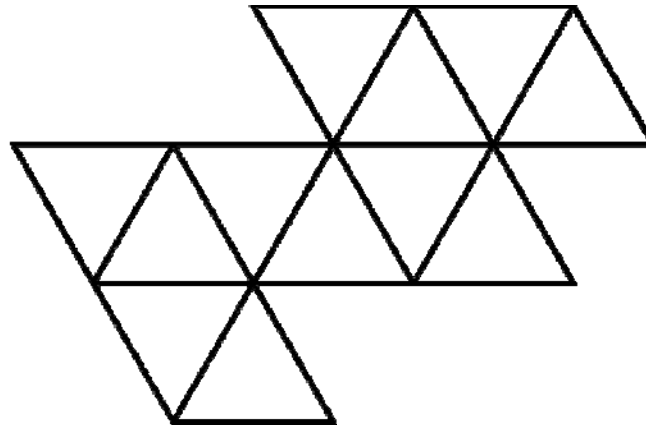
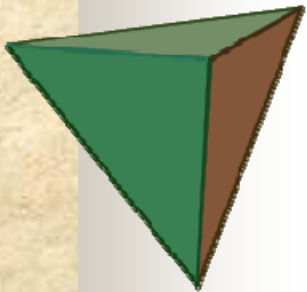
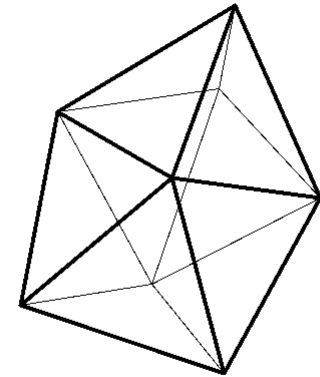
Our Results

- J17 (Gyroelongated square dipyramid)



Our Results

- J84 (Snub disphenoid)



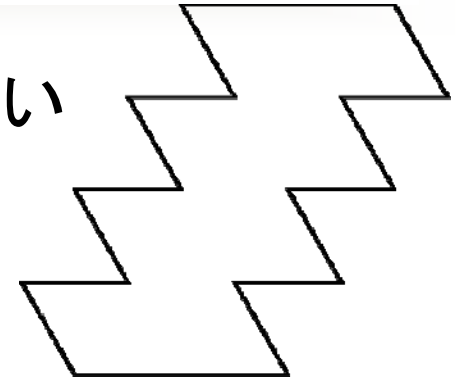
ざっくりした分類

- 整面凸多面体の辺展開図群
 1. タイリングが存在しないなら, 4単面体は折れない.
 - [Akiyama 他 2011]による分類結果があった
 2. 面積や長さの「つじつま」があっていなければ正4面体は折れない.
 3. どちらもパスした立体の辺展開は, 試してみなければわからない!

以下, 3と2を紹介します.

創造力が試される折り紙 (?)

Q: 多角形 P を折って、凸多面体を作りなさい



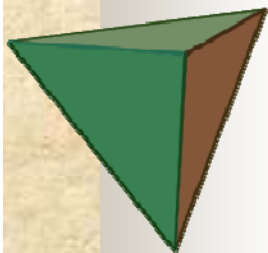
- 凸多面体が折れるような辺々接着は、動的計画法で求められる[Lubiw, O'Rourke 1996]
- でも、どこを折るか、折り目を求めるアルゴリズムは Unknown
- 頂点は、外周上の $1/2$ 単位のところにくる (証明略)

Key: Tiling Theorem

[Akiyama 2007]

[Akiyama, Nara, 2007]

- Theorem : P は四面体の一般展開 iff
 - (1) P が p2 tiling 可能 (180° 回転のタイリング)
 - (2) 回転中心 4つ が三角格子を形成
 - (3) 回転中心 4つ が格子点
 - (4) 回転中心 4つ が別々の同値類に属す



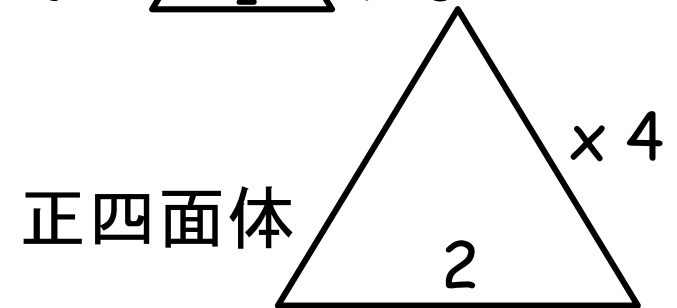
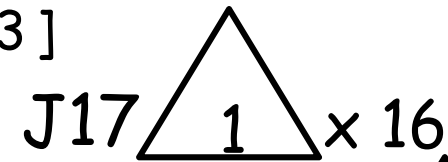
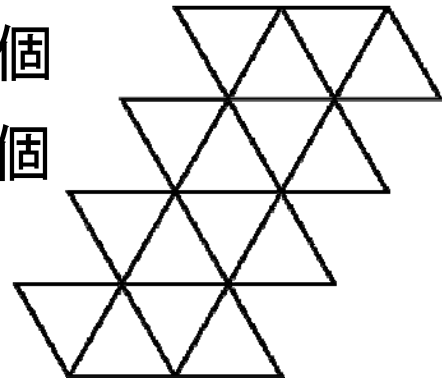
- 正三角格子
→ 正四面体
- 一般の三角格子
→ tetramonohedron

J17, J84 の展開図

- 展開図の列挙アルゴリズム [Horiyama, Shoji 2011]
- 展開図の個数 [Horiyama, Shoji 2013]

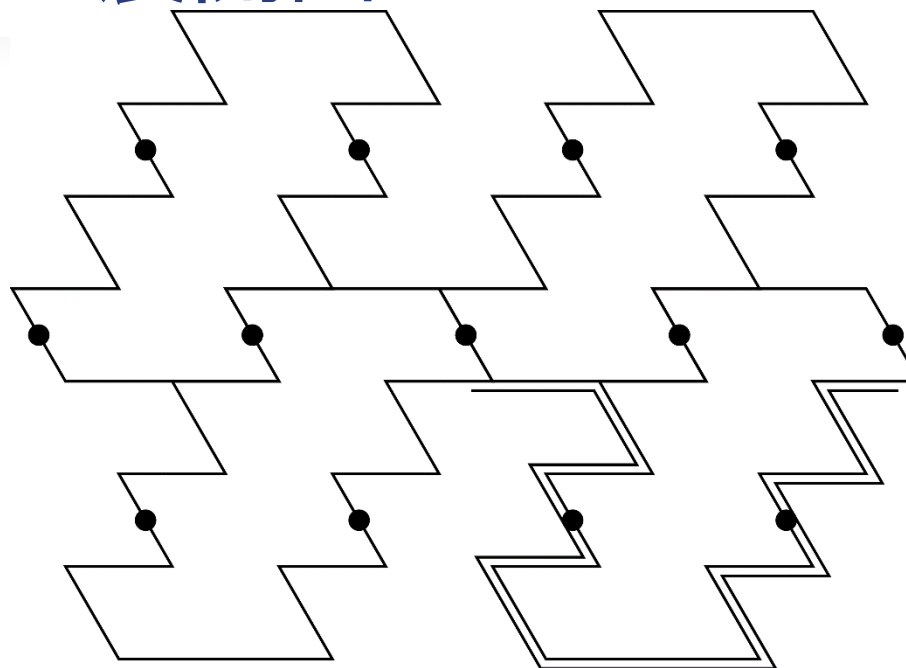
- J17 13,041個

- J84 1,109個



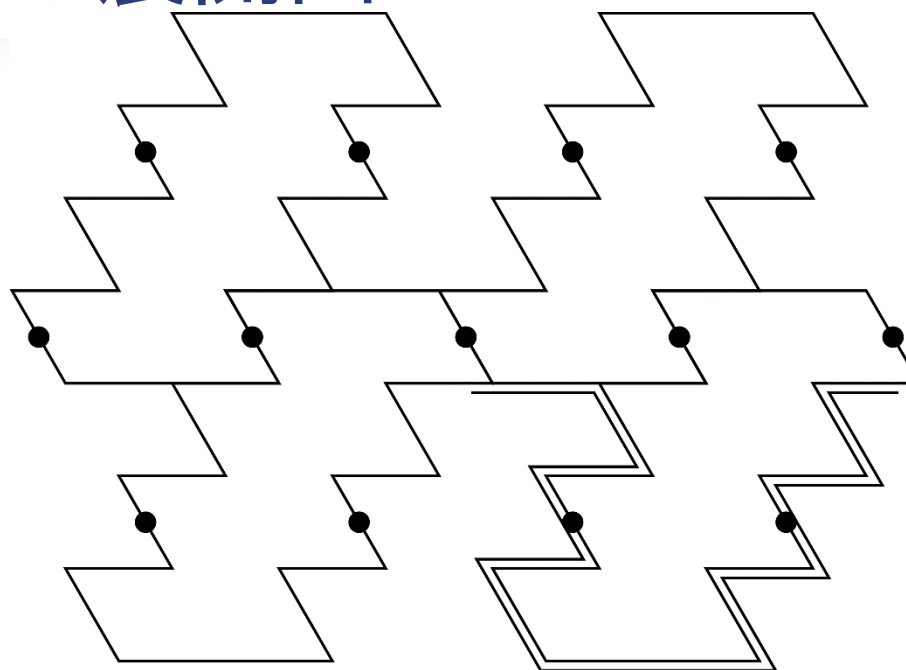
- 各頂点の内角を、巡回リストで持つ
 - 辺々接着を考えて、各辺の midpoint も頂点として追加
 - 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180
- 回転中心 r_1, r_2 を guess / Check $r_1 r_2 = 2$

J17, J84 の展開図



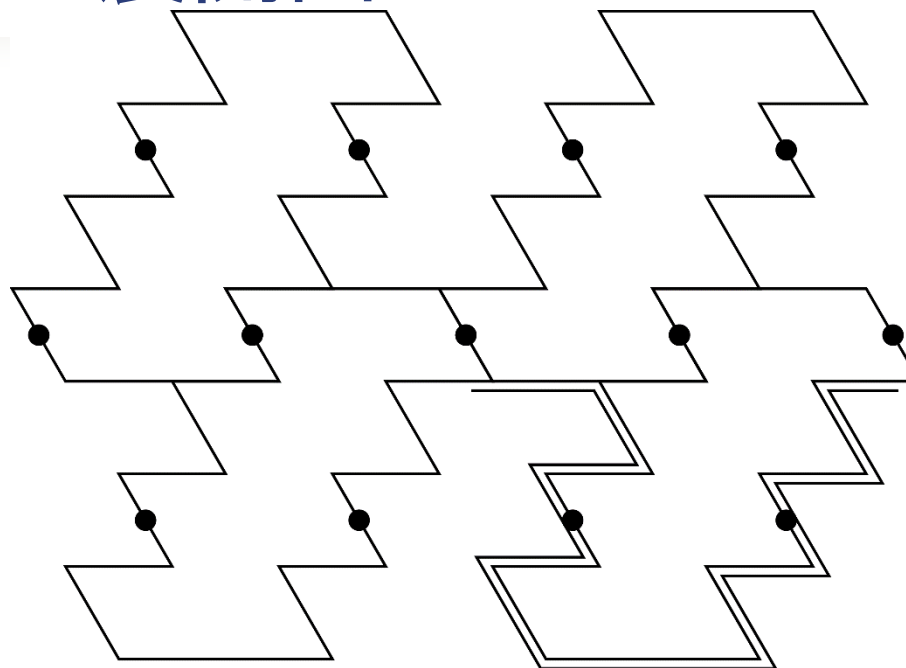
- 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180
- 回転中心 r_1, r_2 を guess $\rightarrow r_1, r_2$ で 180° 回転

J17, J84 の展開図



- 180, 180, 240, 180, 300,
 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180,
 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180
- 回転中心 r_1, r_2 を guess $\rightarrow r_1, r_2$ で 180° 回転

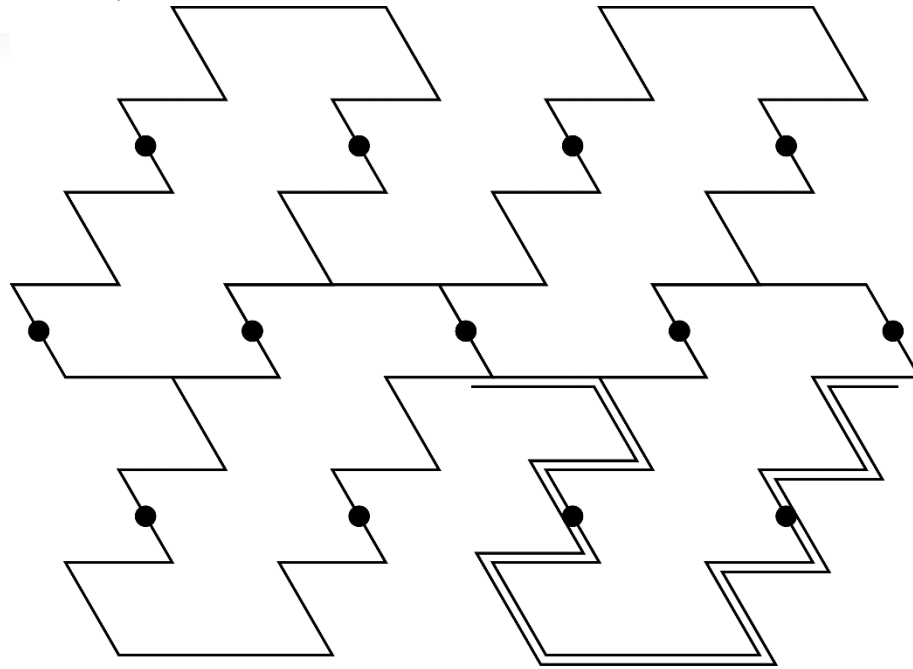
J17, J84 の展開図



- 回転中心 r_3 を guess $\rightarrow r_3$ で 180° 回転, r_4 に到達

- 180, 180, 240, 180, 300,
180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180,
300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180

J17, J84 の展開図



- 回転中心 r_3 を guess $\rightarrow r_3$ で 180° 回転, r_4 に到達
- r_1, r_2, r_3, r_4 が正三角格子に載っているか確認
 - $\underline{180}, 180, \underline{240}, 180, 300,$
 $180, 60, \underline{180}, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180,$
 $300, 180, 60, \underline{180}, 300, 180, 60, 180, 300, 180$

J17, J84 以外

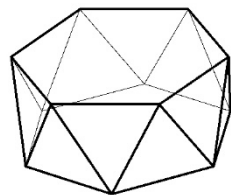
■ JZ多面体の展開図の個数 [Horiyama, Shoji 2013]

■ J01	8
■ J02	16
■ J03	308
■ J04	3,030
■ J05	29,767
■ J06	7,825,005
■ ...	
■ J71	2,079,942,317,394,110,986,896,181,956,672
■ J72	20,668,673,558,050,742,614,946,330,896
■ J73	10,597,511,106,353,370,064,654,696,448
■ ...	

207穰 9942秭 3173垓 9411京
986兆 8961億 8195万 6672

J17, J84 以外

- 展開図がタイリングになる整面凸多面体 [Akiyamara ら 2011]
 - JZ多面体： J1, J8, J10, J12, J13, J14,
(18種類) J15, J16, J17, J49, J50, J51,
J84, J86, J87, J88, J89, J90
 - 正6反角柱 (上下が正六角形、側面に正三角形12枚)


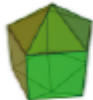






細かい補足:[Akiyama ら]はタイリングを考えたが、今の枠組みでは p2 タイリングを考える必要がある。

- 「展開図の長さや面積」と正4面体のその「つじつま」があっている必要がある。

J17, J84 以外

- タイリングをもつ各 J_x について,
 1. 面積 S_x を求める
 2. その面積を持つ正4面体の辺の長さ L_x を求める
 3. J_x を構成する正多角形(ここでは正3角形と正方形のみでよい)を敷き詰めた「部分展開図」を考える
 4. 部分展開図上の「格子点」+「1/2点」上の2点が L_x になりうるかどうかをチェックする

	J15	J16	J17	J49	J50	J51
Name	T15	J16	T17	T49	T50	T51
Image						
# of □s	4	5	0	2	1	0
# of △s	8	10	16	6	10	14
L_{J_i}	$\sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2}$ = 2.075...	$\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{5}{2}}$ = 2.320...	2	$\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2}}$ = 1.629...	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{5}{2}}$ = 1.754...	$\sqrt{3.5}$ = 1.870...

J17, J89

図10のベクトルの和が Lx になることが必要.

■ タイリング

$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ の単純な線形和になるので, 例えば $\sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3} + 5}$ などは作れない. よってそうした立体の展開図にはなりえない.

3. Jx を構

でよい

「展開図」を考える

4. 部分展

「格子点」+「1/2点」上の2点が Lx になりうるかチェックする

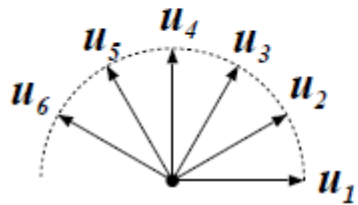


Figure 10: Six unit vectors.

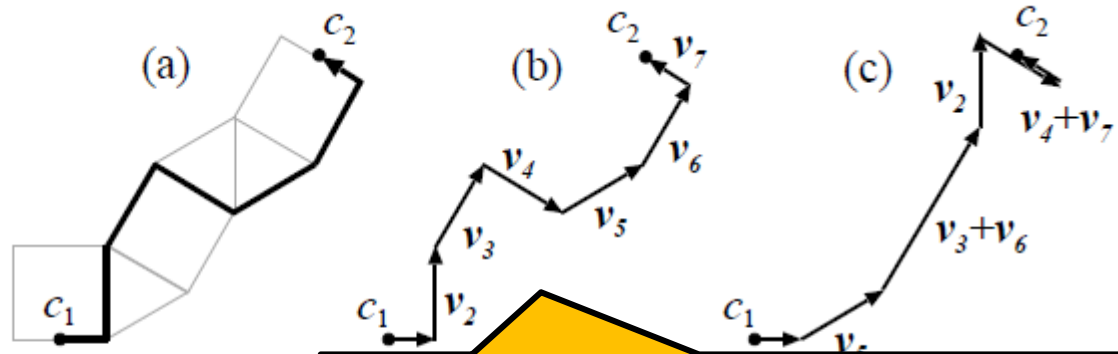


Figure 11: Linkage (a) linkage, (b) correspond

この時点で生き残った候補: J12, J13, J14, J51, J89

J12, J13, J14, J51, J89

- タイリングの枚数に上限(10枚; 証明略)があるので, 長さ10の可能な組合せを全部試して, 上記のどの辺の長さも作れないことを示せばよい.
 1. 国際会議発表時: 下図(a)のパターンを全探索.
10時間程度で計算終了. どの長さも現れなかった.
 2. 最近: ベクトルを(c)のように正規化すればよい!

⇒ 1秒未満!!

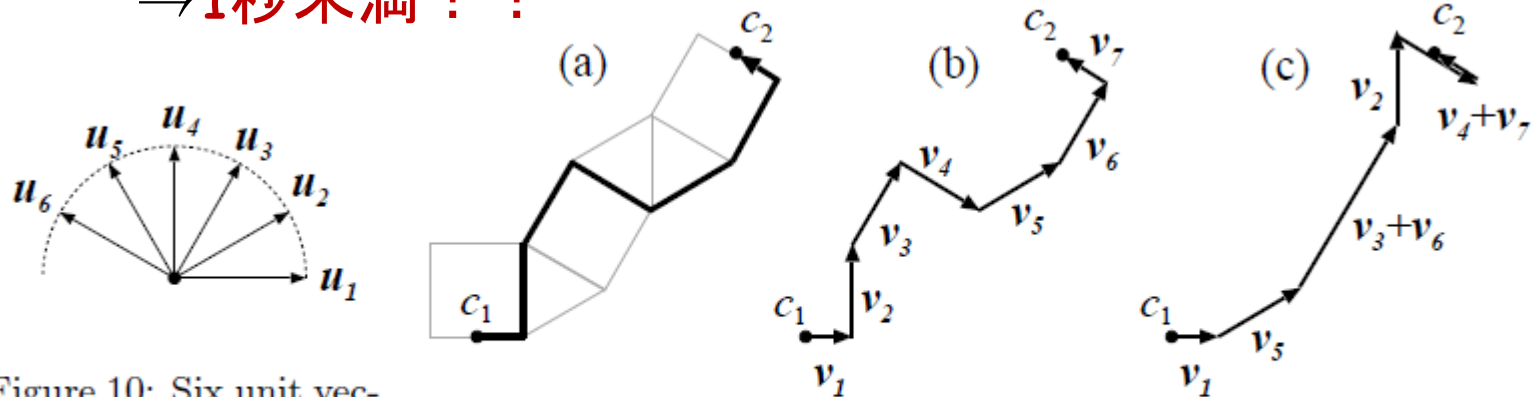


Figure 10: Six unit vectors.

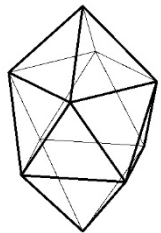
Figure 11: Linkage as the set of unit vectors: (a) given tiling and linkage, (b) corresponding vectors, and (c) reorganized vectors.

Our Results

- 正四面体 (一般展開)
v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

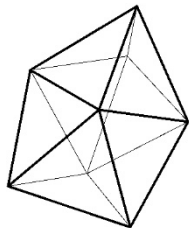
- 各面が正多角形
- 凸多面体

- ジョンソン・ザルガラー多面体: 全 92種類



- J17 (Gyroelongated square dipyramid) 辺展開 13,014 個

- 78個 : 1通りの折り方
- 8個 : 2通りの折り方
- 1個 : 3通りの折り方



- J84 (Snub disphenoid) 辺展開 1,109 個

- 32個 : 1通りの折り方
- 5個 : 2通りの折り方

- 半正多面体、正 n 角柱、正 n 反角柱、
その他JZ多面体 90種類 : 共通の展開図なし