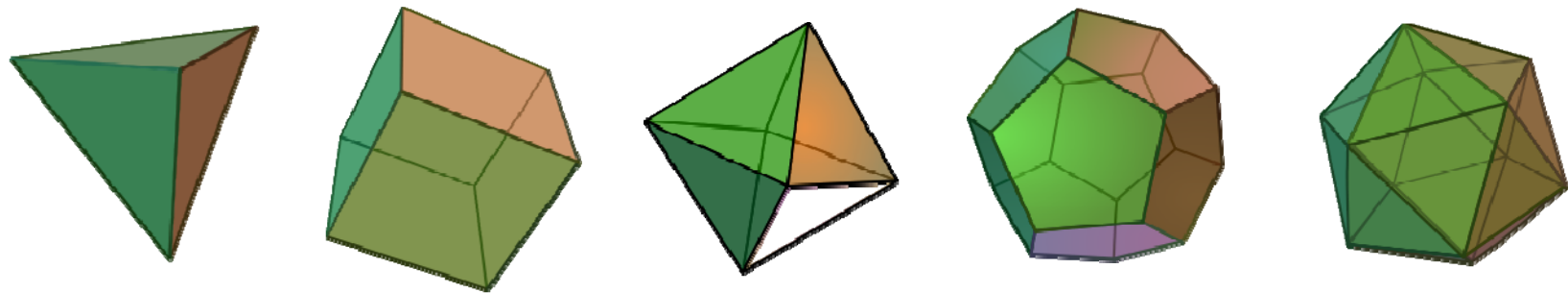


# 今日の予定

1. 展開図の基礎的な知識
  1. 正多面体の共通の展開図
- } 1時間目～2時間目
2. 複数の箱が折れる共通の展開図: 3時間目
  3. Rep-Cube: 最新の話
  4. 正多面体に近い立体と正4面体の共通の展開図
  5. ペタル型の紙で折るピラミッド型: 2時間目～3時間目



## 複数の正多面体を折れる展開図について



上原隆平(JAIST), 堀山貴史(埼玉大学), 白川俊博(アマチュア数学者?)

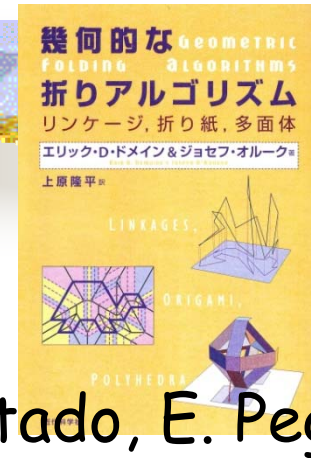
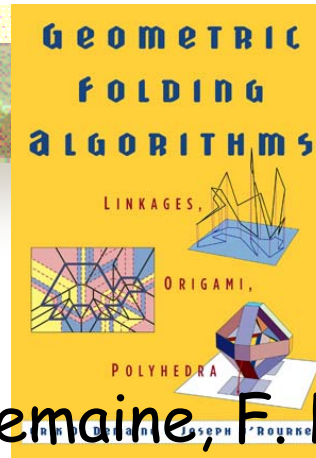
### 文献

Toshihiro Shirakawa, Takashi Horiyama, and Ryuhei Uehara.  
Construct of Common Development of Regular Tetrahedron and Cube  
*27th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2011)*  
pp. 47–50, 2011/3/28–30

# はじめに

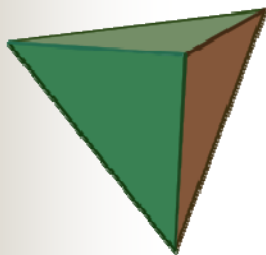
## ■ 未解決問題25.6

(by M. Demaine, F. Hurtado, E. Pegg)

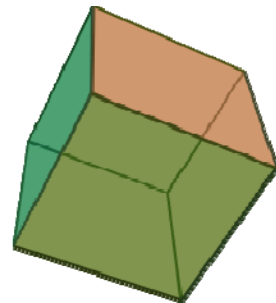


- Can any **Platonic solid** be cut open and unfolded to a polygon that may be refolded to a **different Platonic solid**?

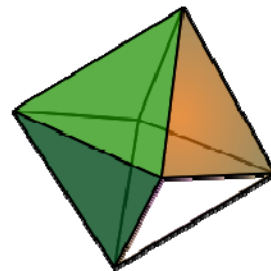
For ex., may a cube be so dissected to a tetrahedron?



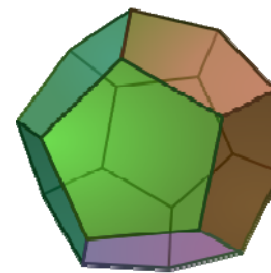
正4面体



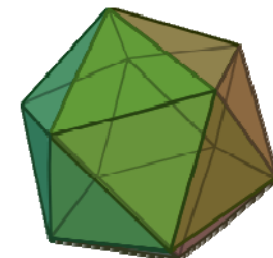
立方体



正8面体



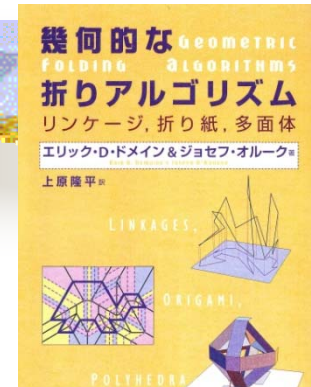
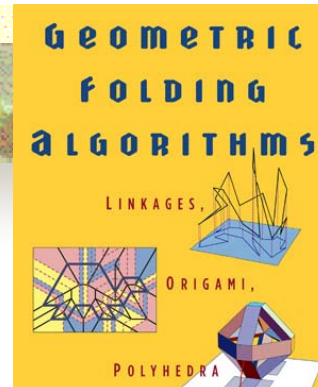
正12面体



正20面体

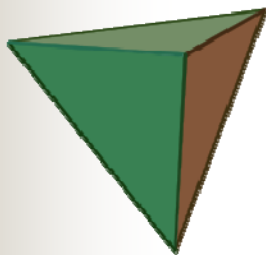
# はじめに

## ■ 未解決問題25.6

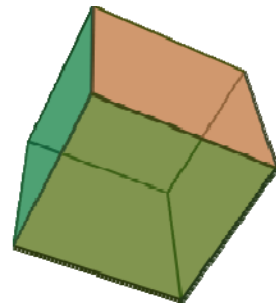


複数の正多面体を折ることができる  
共通の展開図は存在するの？

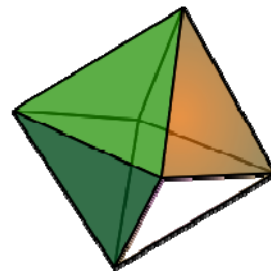
For ex., may a cube be so dissected to a tetrahedron?



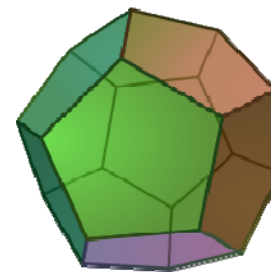
正4面体



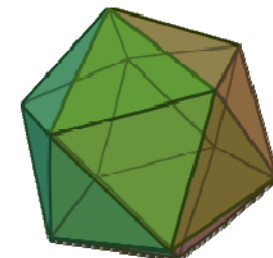
立方体



正8面体



正12面体



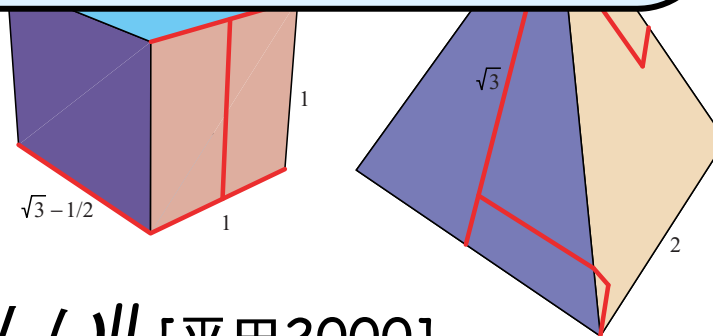
正20面体

はじめに

複数の正多面体を折ることができる  
共通の展開図は存在するの？

惜しい！ [O'Rourke]

正8面体  $\Leftrightarrow$  4単面体  
(=すべての面が合同な4面体)



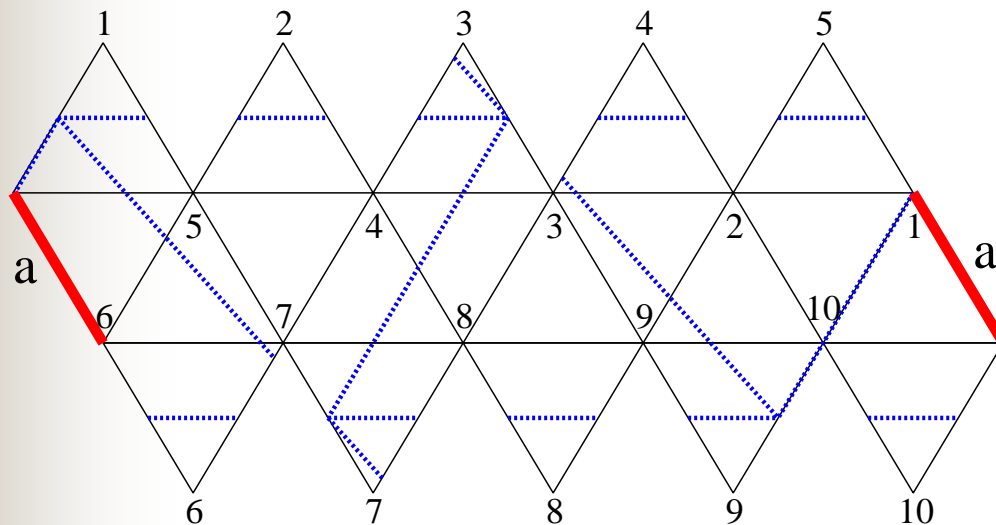
惜しい!! [平田2000]

正4面体  
 $\Leftrightarrow$  箱(大きさ  $1 \times 1 \times 1.232$ )

# 複数の正多面体を折ることができる 共通の展開図は存在するの？

惜しい! 例たち(上原2010)

演習問題



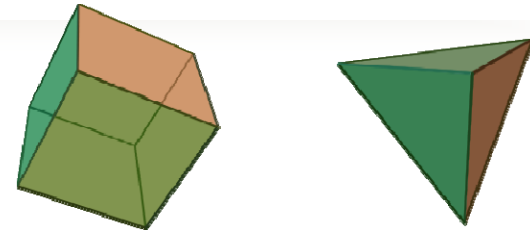
正20面体 ⇔ 4単面体

以下の共通の展開図を  
考えてみよ. どのくらい  
正多面体に近い  
か検討せよ.

- 立方体 4単面体
- 八面体 4単面体



# 今回の結果



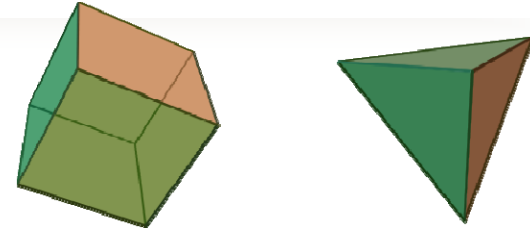
ある「点列を生成するプログラム」を作った。  
生成される点列は、

(1) 無限個の点を生成すると、それは**立方体**と**正4面体**  
が両方折れる展開図に収束する！

- ある意味で未解決問題を解決した！
- ...一部証明できてない部分がある

(2)

## 今回の結果



ある「点列を生成するプログラム」を作った。

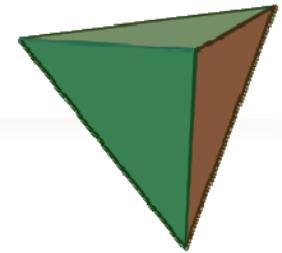
生成される点列は、

(1) 無限個の点を生成すると、それは**立方体**と**正4面体**が両方折れる展開図に収束する(一部予想)

(2) 立方体と正4面体に極めて近い4単面体を折れる展開図が存在する。「極めて近い」辺の長さの誤差は高々  $\varepsilon < 2.89 \times 10^{-1796}$  でおさえられる(定理)



# 鍵を握る定理



- 定理 [秋山2007, 秋山・奈良2007]

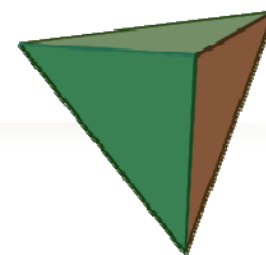
正四面体の任意の展開図を $P$ とする。

すると $P$ はタイリングである。

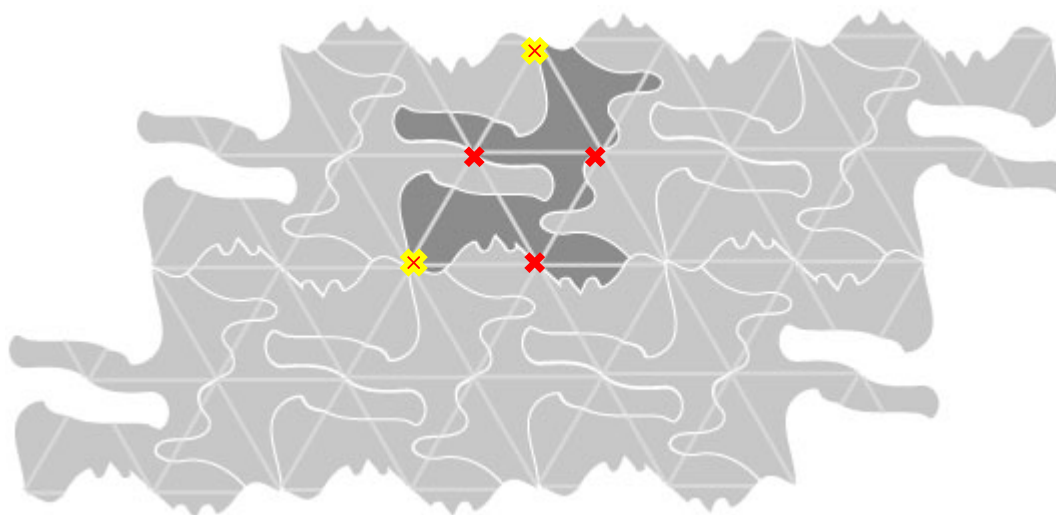
つまり $P$ は平面を埋め尽くす。



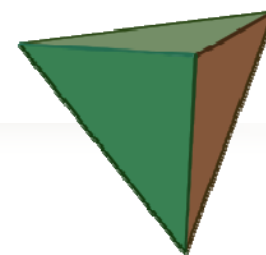
## 鍵を握る定理(詳細)



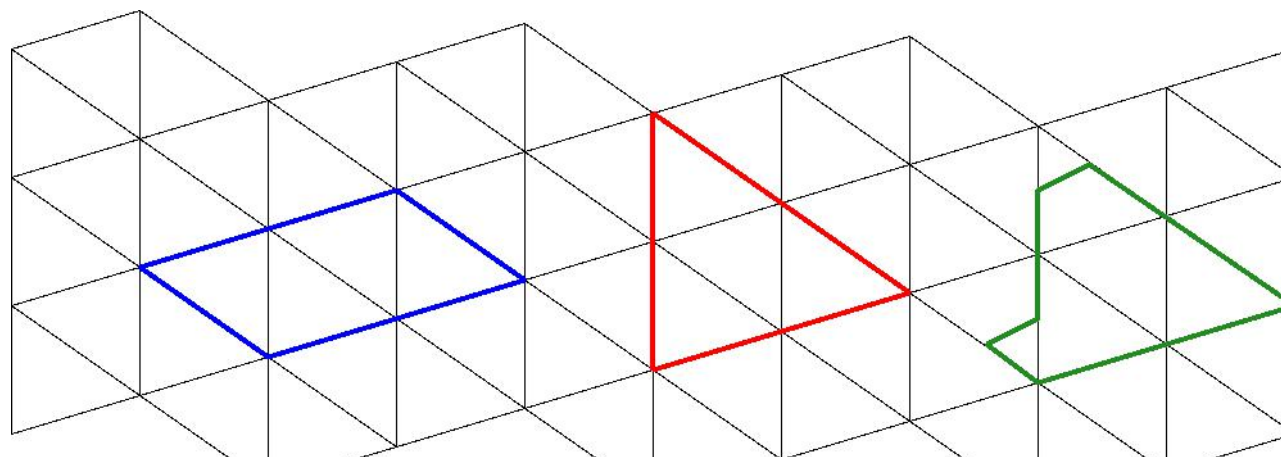
- 定理 [秋山2007, 秋山・奈良2007]  
P が正四面体の展開図である必要十分条件は
  - (1) Pはp2タイリング。つまり180°回転で生成される
  - (2) 回転中心の4点が三角格子を構成する
  - (3) 上記の4点はタイリング上の「同値関係」にない



## 鍵を握る定理(詳細)



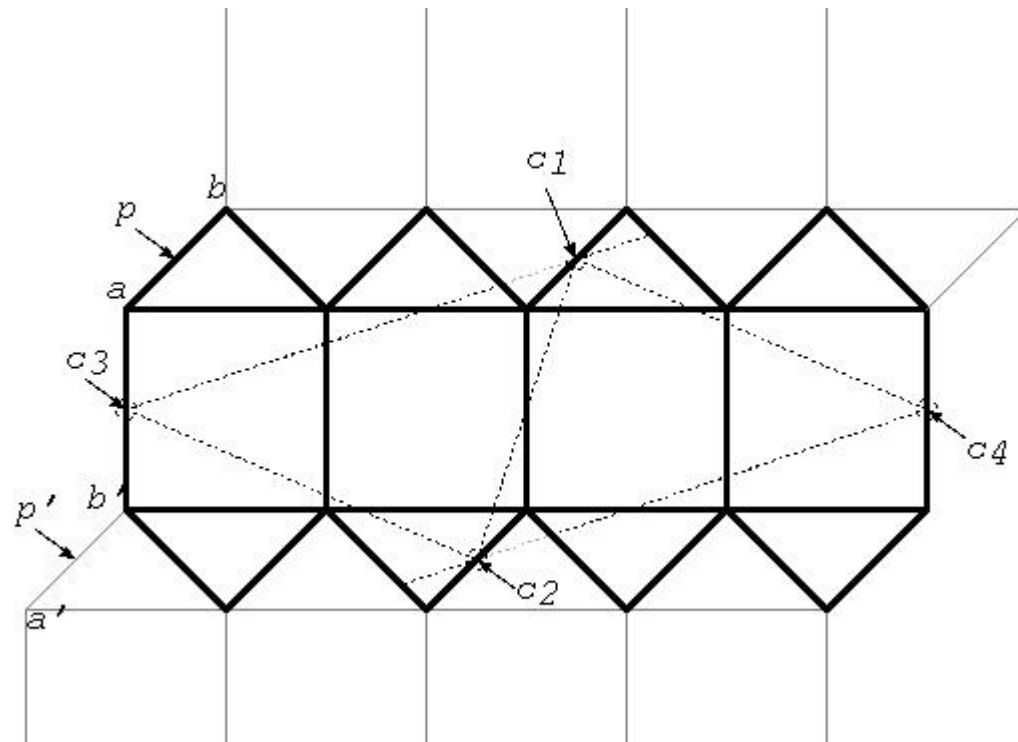
- 定理 [秋山2007, 秋山・奈良2007]  
P が**4単面体**の展開図である必要十分条件は
  - (1) Pは**p2タイリング**。つまり180° 回転で生成される
  - (2) **回転中心**の4点が(**必ずしも正三角形でない**)  
三角格子を構成する
  - (3) 上記の4点はタイリング上の「同値関係」にない



# 展開図の構成方法

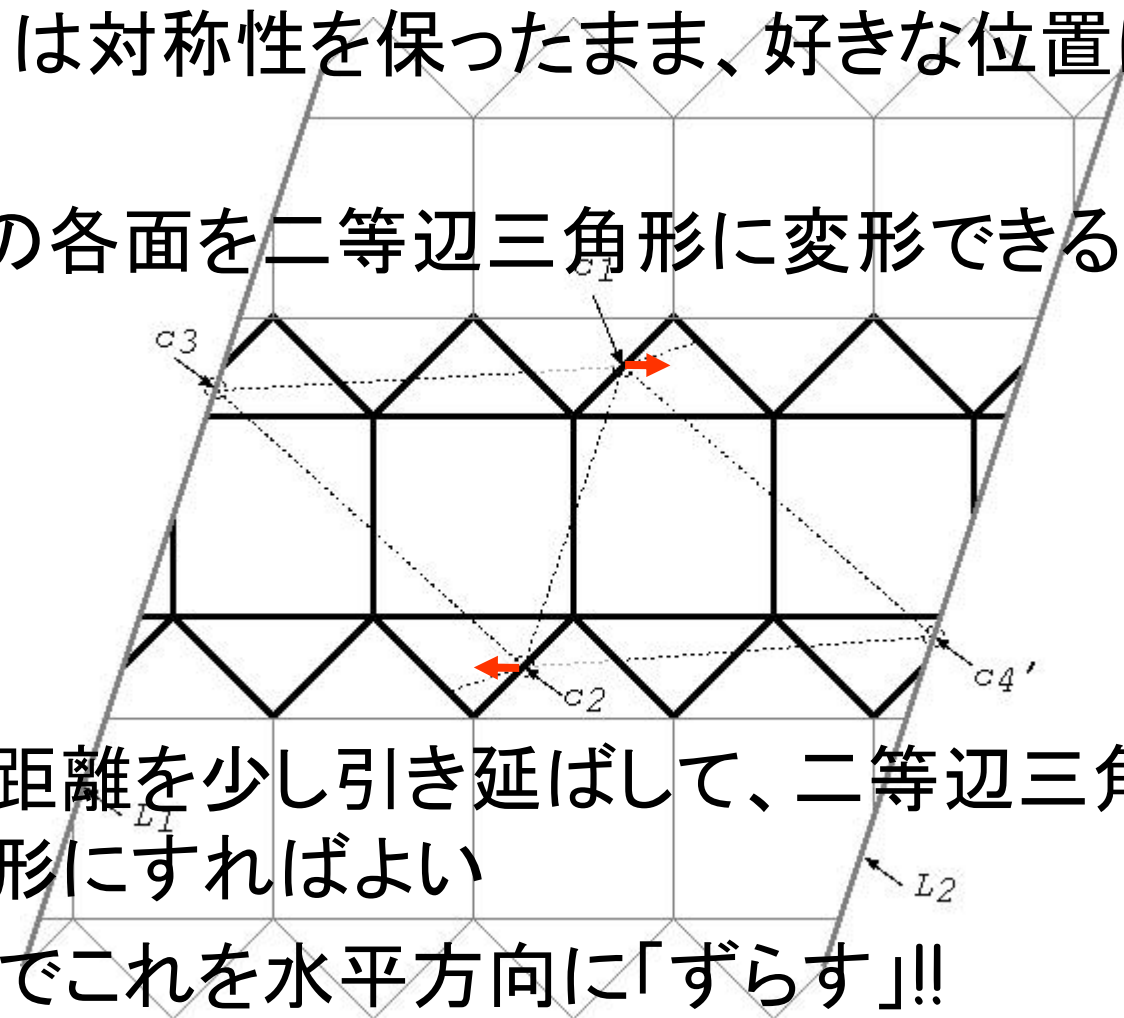
- 立方体の展開図を以下を保持したまま変形する:
  - 立方体の展開図
  - $p2$ タイリング = 4単面体の展開図

初期展開図



# 展開図の構成方法

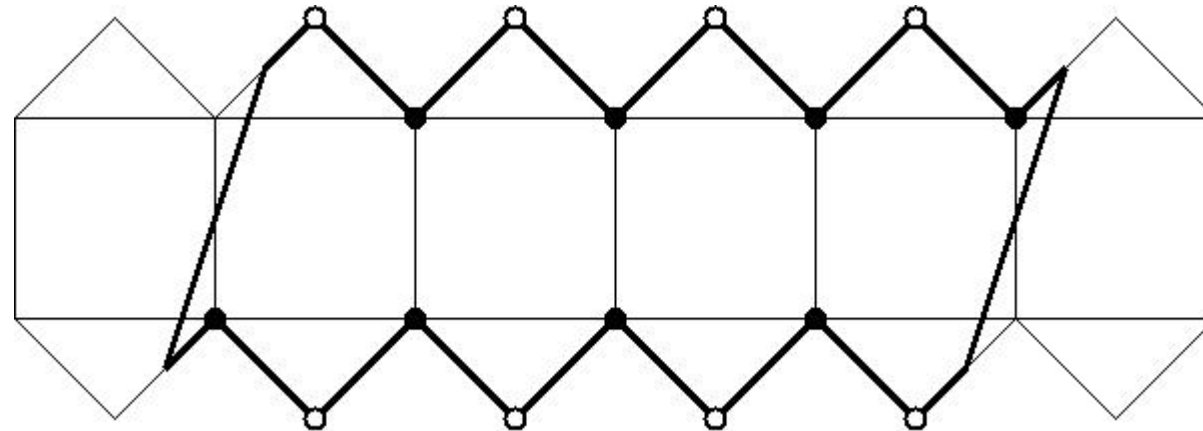
- $L_1$  と  $L_2$  を  $c_1c_2$  と平行に切りなおす  
...  $c_3$  と  $c_4$  は対称性を保ったまま、好きな位置に移動できる
- 4単面体の各面を二等辺三角形に変形できる



- $c_1c_2$  間の距離を少し引き延ばして、二等辺三角形を正三角形にすればよい
  - ...そこでこれを水平方向に「ずらす」!!

# 展開図の構成方法

- 展開図の辺上には、いくつか動かすことのできない「固定点」が存在する



○ : 立方体の「フタ/底」の中心を作る点

● : 立方体の「角(頂点)」を作る点

回転対称の相手同士でもある…









# 生成例

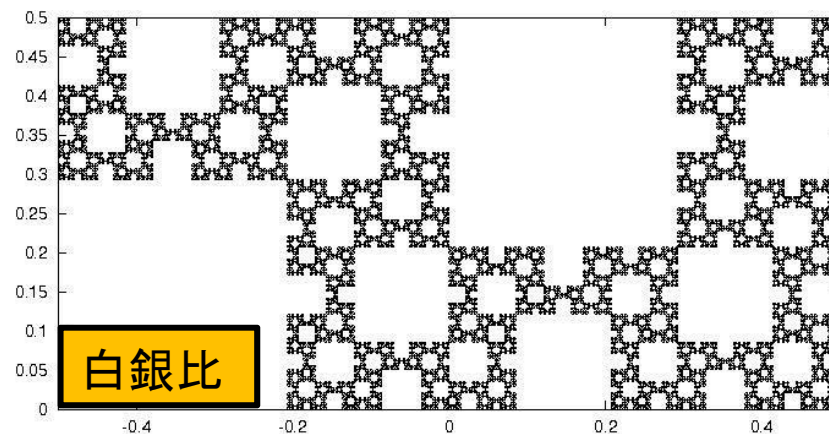
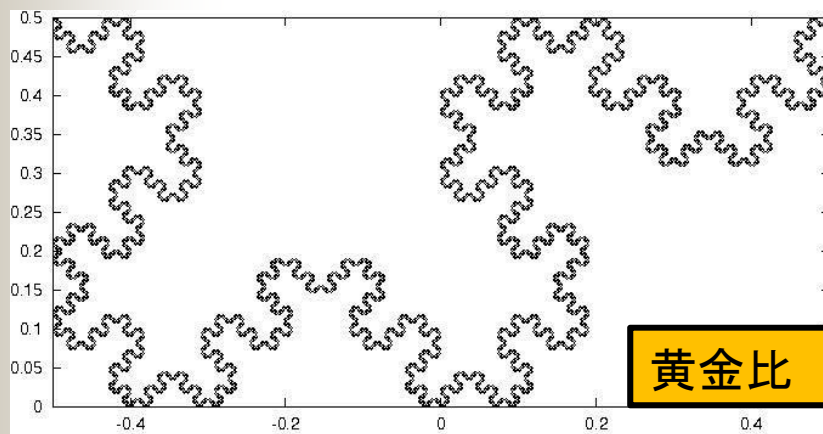
立方体と正四面体にととても近い14単面体

輪郭線は一種の「フラクタル構造」をしている

展開図を「連結」にするためには、 $l_1$  と  $l_2$  の選び方に注意が必要



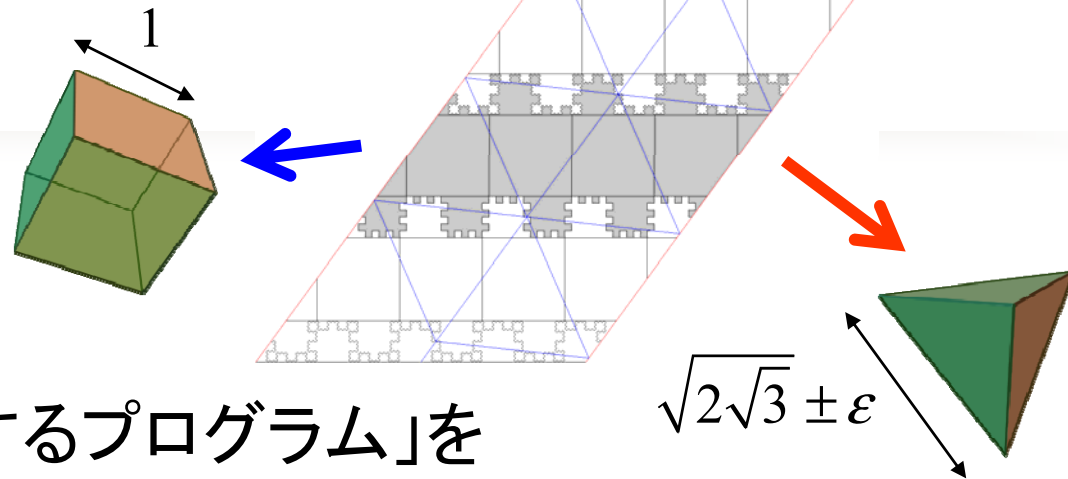
## 輪郭線の特徴(予想)



- **[実験的な観測/予想]** こうした「フラクタル曲線」は、 $l_1$  の値の連分数展開の係数によって決まる

$$l_1 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

## まとめ



ある「点列を生成するプログラム」を作った。生成される点列は、

**予想** 無限個の点を生成すると、それは**立方体**と**正4面体**が両方折れる展開図に収束する

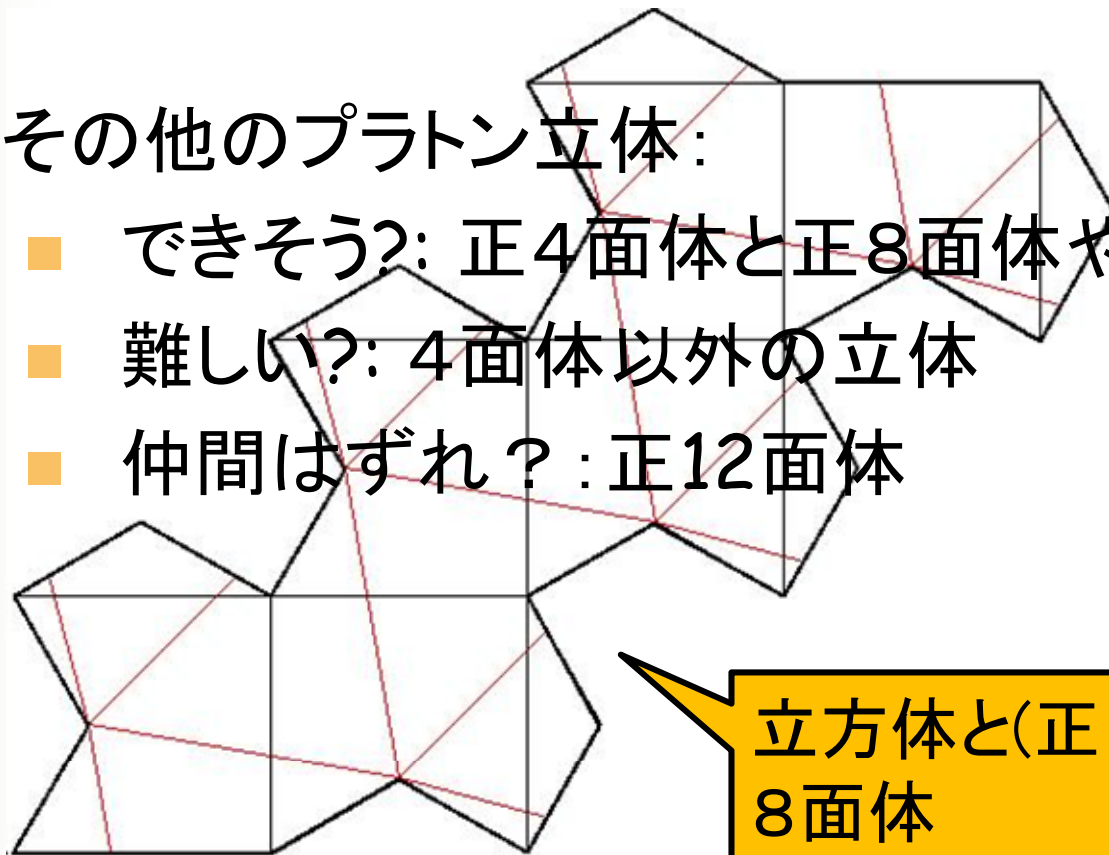
**定理** 立方体と正4面体に極めて近い4単面体を折れる展開図が存在する。「極めて近い」辺の長さの誤差は高々  $\epsilon < 2.89 \times 10^{-1796}$  でおさえられる

# 未解決問題

- [実験的な **定理** 予想] こうした「フラクタル曲線」は、 $l_1$  の値の連分数展開の係数によって決まる

- その他のプラトン立体:

- できそう?: 正4面体と正8面体や正20面体
- 難しい?: 4面体以外の立体
- 仲間はずれ?: 正12面体



立方体と(正じゃないけど)  
8面体