計算幾何学特論：計算折り紙入門

上原　隆平
北陸先端科学技術大学院大学　情報科学研究科教授

一日目の演習問題の解答の一部など

展開図の簡単な歴史

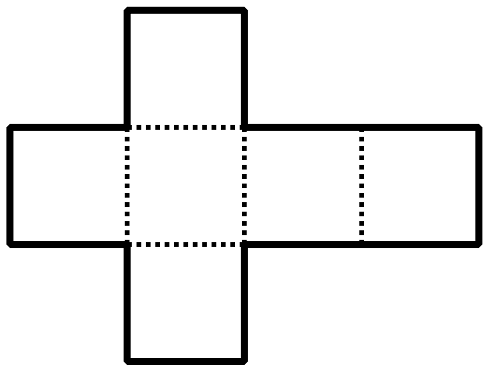
ポイント：展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

本研究の興味の対象：

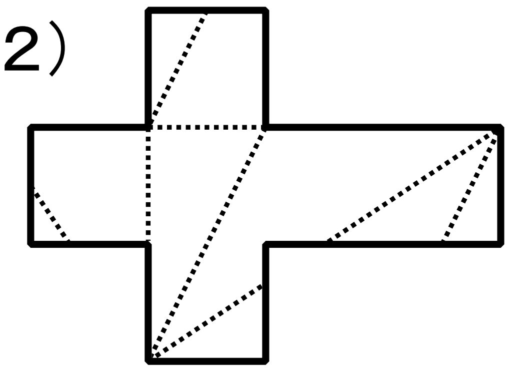
- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる（凸）多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- （凸）多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム

演習問題：何が折れるでしょう？

（1）



（2）

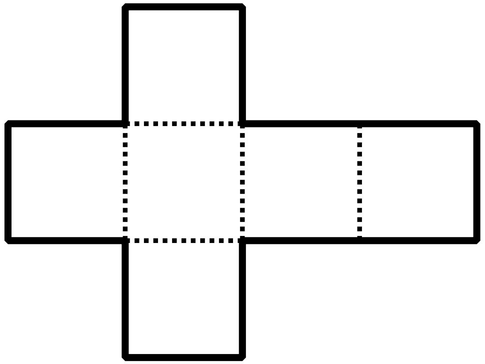


ちなみにこの「ラテンクロス」からは85通りで23種類の異なる凸多面体が折れることが知られている.

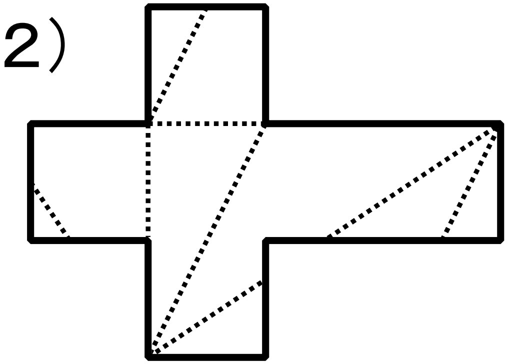
ポイント：展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

演習問題：何が折れるでしょう？

（1）



（2）



ちなみにこの「ラテンクロス」からは85通りで23種類の異なる凸多面体が折れることが知られている．

解答：４面体

コメント：現時点では，この手の問題を解くには，網羅的なDPによる方法しか知られていない．ちなみに本多角形の場合，
2重被覆長方形2種，4面体7種，5面体3種，
6面体5種(含立方体)，8面体6種が折れる．

1. 展開図の基礎知識：演習問題

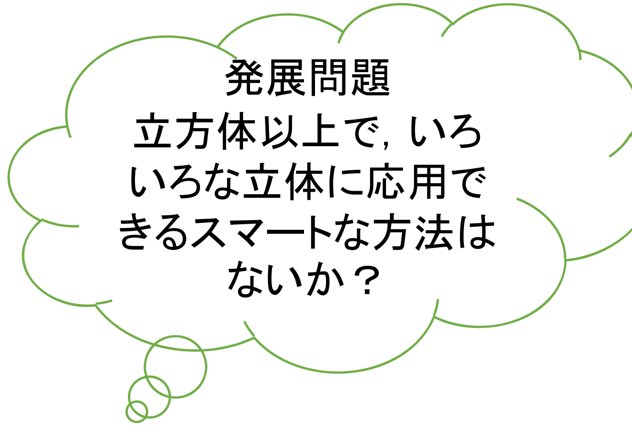
正多面体の一般展開図の最短カットの長さは？

- 正4面体にはわりと美しい最適解があります
  - 最適解とその証明ができればなおよし
- 正8面体と正6面体
  - 最適解を見つけるのは、なんとかなると思う
  - 最適性を示すのは、手間がかかります
- 正20面体と正12面体
  - 最適解を見つけるのはちょっと大変かも

以下の文献にすべての解答が載っている，けど．．．

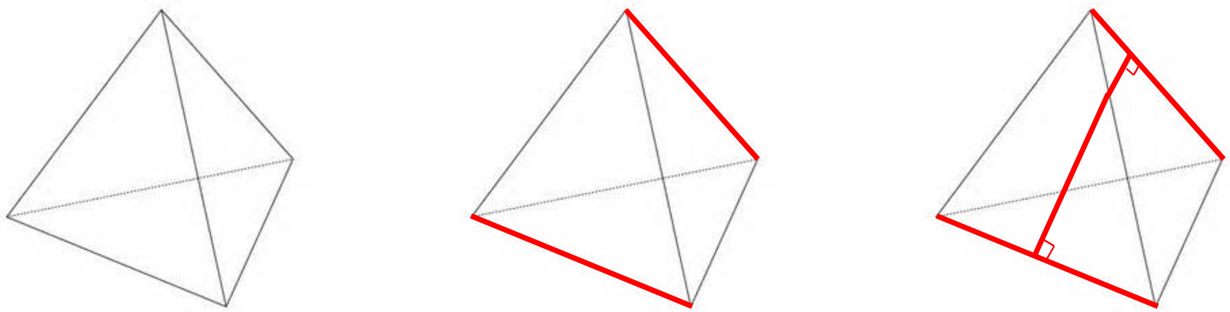
J. Akiyama, G. Nakamura, X. Chen, and M.-J. Ruiz.
Minimum Perimeter Developments of the Platonic Solids,
Thai J. or Math., 9(3), pp. 461-487, 2011.

1. 展開図の基礎知識：演習問題

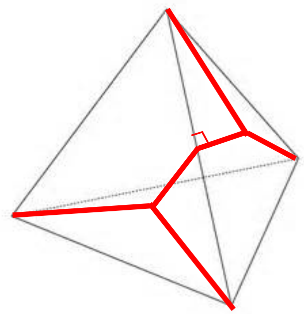


正4面体：

- 上界その1：辺を切る：3
- 上界その2：辺を二つ切り，
  筒状にしてからつぶして垂線で結ぶ：2+√3/2=2.866...



結局：√7=2.645...が最適

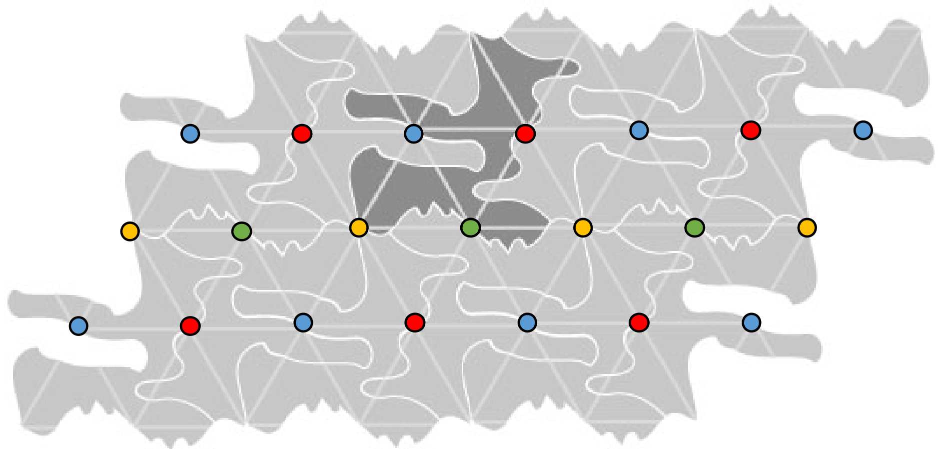


・立体の表面上で頂点を張るシュタイナー木を作ればよい！

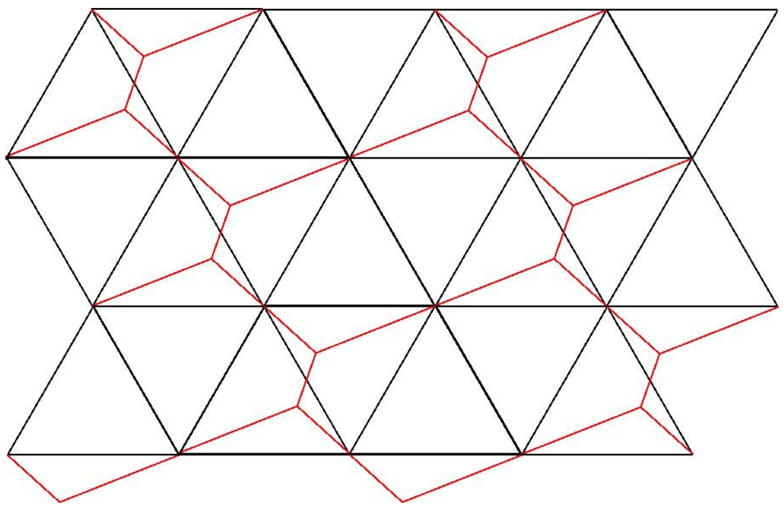
1. 展開図の基礎知識：演習問題

正4面体：表面上で頂点を張るシュタイナー木を作ればよい！

正4面体の場合，正三角格子上の
どの4点も選び方によらず
同じ形なので，この4点を結ぶ
シュタイナー木を作ればよい．



[シュタイナー点] 3辺の分岐の角はどこも120°

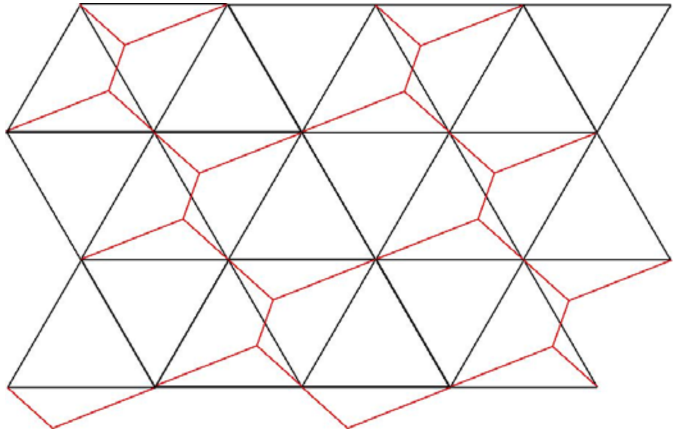


[トリチェリの作図法]

鋭角三角形 P1 P2 P3 に対して，P1 P2 X が正三角形となる代替点 X をおく．このとき3点 P1 P2 X を通る円と直線 X P3の交点がシュタイナー点Sで，しかも|P1 S|+|P2 S|+|P3 S|=|P3 X| である．

1. 展開図の基礎知識：演習問題

正4面体：表面上で頂点を張るシュタイナー木を作ればよい！



[シュタイナー点] 3辺の分岐の角はどこも120°

[4点以上の場合] Melzak の方法（1961）で，おおむね総当り

1. 3点ずつ[トリチェリの作図法]で点の数を縮約して三角形にまでもっていく
2. 3頂点の最適な選び方はNP完全なので、全部やってみないといけない

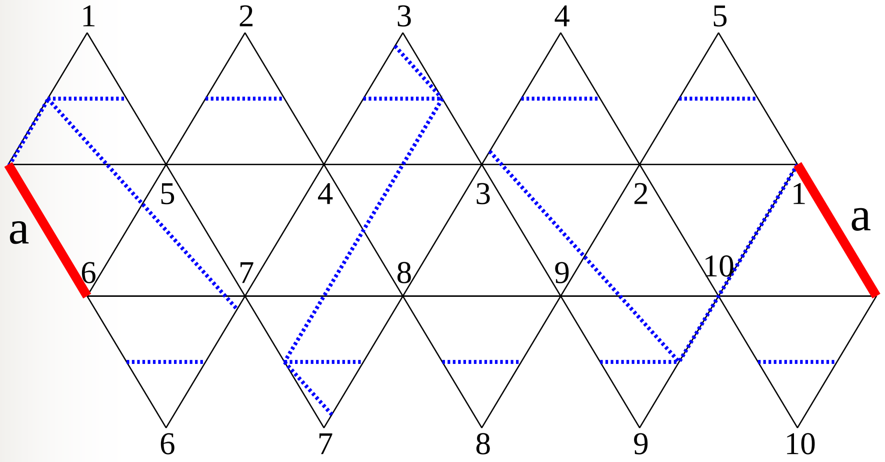
[Akiyama et.al の方法] 基本的には以下の非常に効率の悪い方法

1. 展開図をかたっぱしから作る
2. 展開図上の点配置について Melzak の方法で総当たり

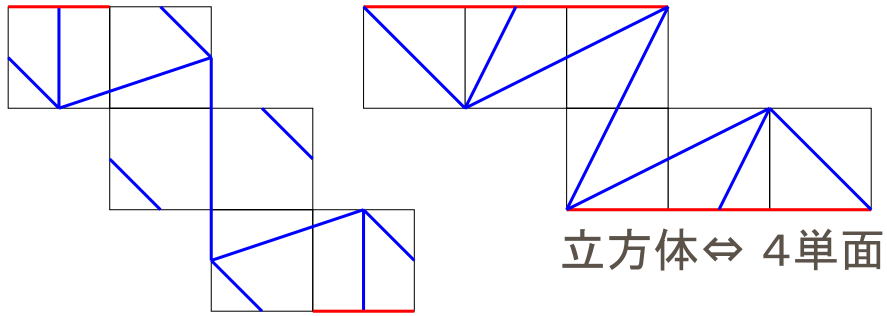
総当たりを2回やるため、非常に効率が悪い

正多面体の共通の展開図の惜しい例

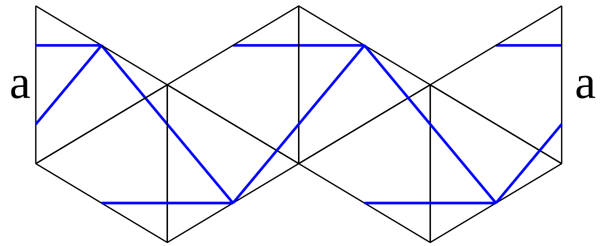
惜しい！ 例たち（上原2010）



正20面体⇔ ４単面体



立方体⇔ ４単面体



正8面体⇔ ４単面体

演習問題

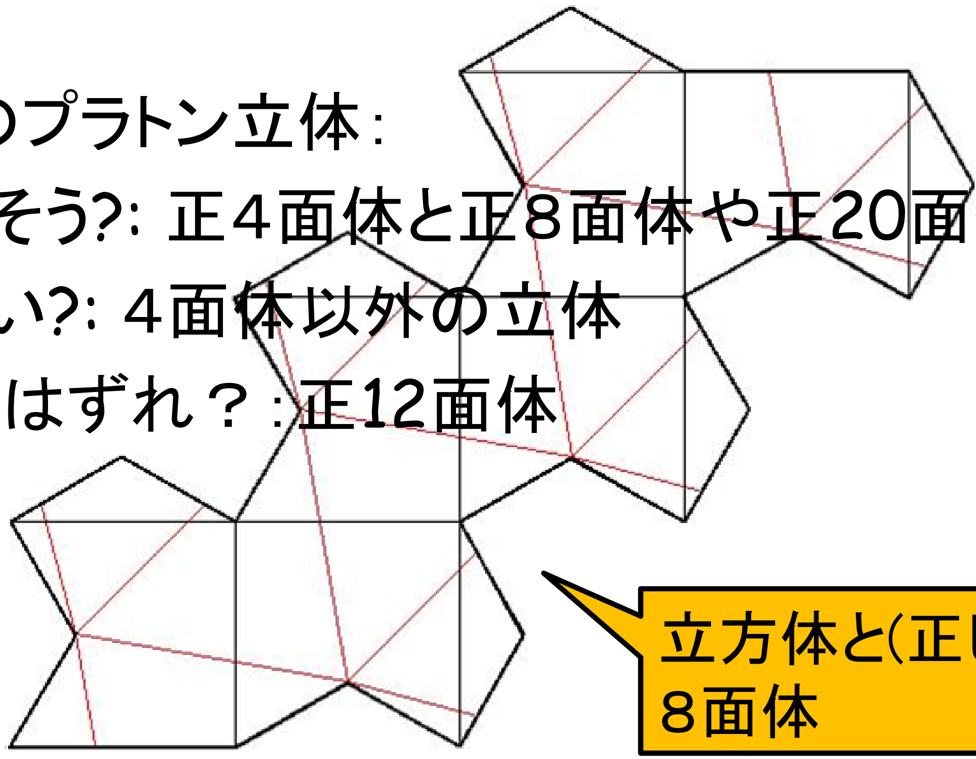
以下の共通の展開図を考えてみよ．どのくらい正多面体に近いか検討せよ．

- 立方体⇔4単面体
- 八面体⇔4単面体

未解決問題

- [実験的な観測/予 定理 うした「フラクタル曲線」は、l_1 の値の連分数展開の係数によって決まる

- その他のプラトン立体:
  - できそう?: 正4面体と正8面体や正20面体
  - 難しい?: 4面体以外の立体
  - 仲間はずれ?: 正12面体



このあたりなら,
多少はできそう

立方体と(正じゃないけど)
8面体

箱を折る問題：

➢ 演習問題：

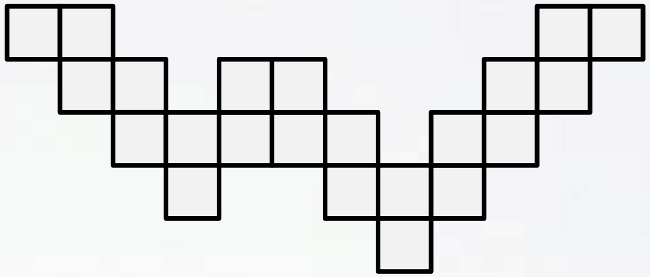
箱を折る展開図を構成するとき，暗に展開図の中に切込みが入ってないと仮定している．実は一般性を失うことなく，これを仮定してよい．なぜか？

[略証]

広い長方形の中に切り込む切込みがあったとする．
すると，このとき切込み線は木であり，葉がある．
葉の部分で周囲を囲む面の角度の合計は360度である．
箱は凸多面体なので，どの点をとってもその点の周囲は高々360度である．
したがって，この葉の切込みは冗長であり，切る必要はない．
以下，これを繰り返せば，この木はすべて冗長な切込みからなる．

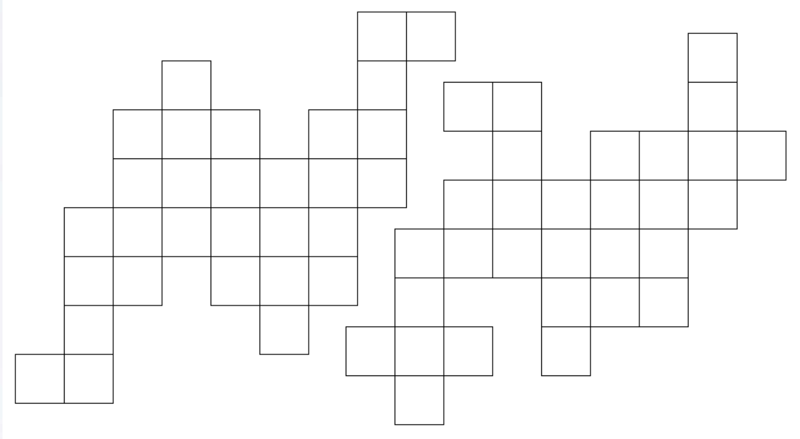
もう少し真面目な証明は：『2種類の箱を折れる展開図に関する研究』
上原隆平・三谷純，折り紙の科学，Vol. 1, No. 1, pp. 3-18, 2011年.

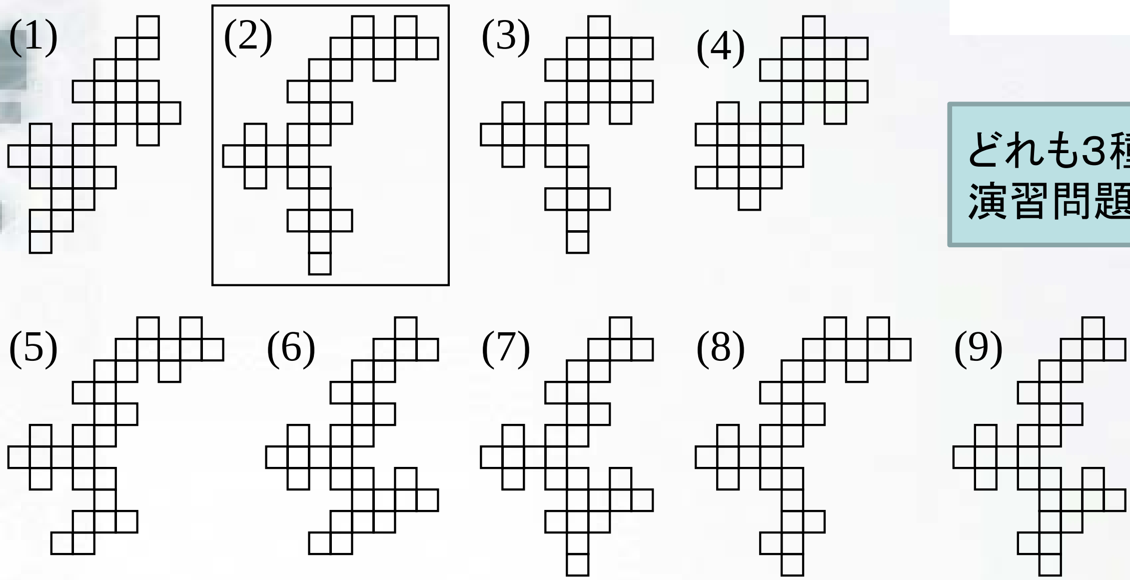
おまけ問題たち：箱を折る



3通り．ただし一つはちょっとずるい

2通り．ただし斜めが必要



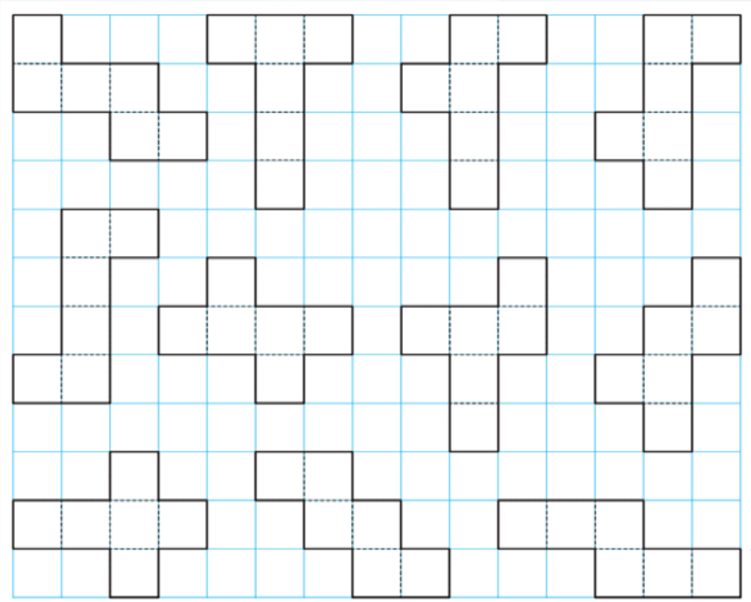


どれも3種類．
演習問題7：(2)だけどう特別なのか？

どれも$1\times1\times7$，$1\times3\times3$，
$\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$の箱が折れるが，
(2)はなんと$\sqrt{5}^3$の箱が2通り折れる！

おまけ問題

- 立方体の辺展開は11通りある。



問1：正方形6個からなる展開図を
　　これ以外に見つけよ。
（ヒント：すべて同じ大きさでなくてもよい）

問2：すべて同じ大きさの正方形6個からなる
　　展開図が無限にあることを示せ

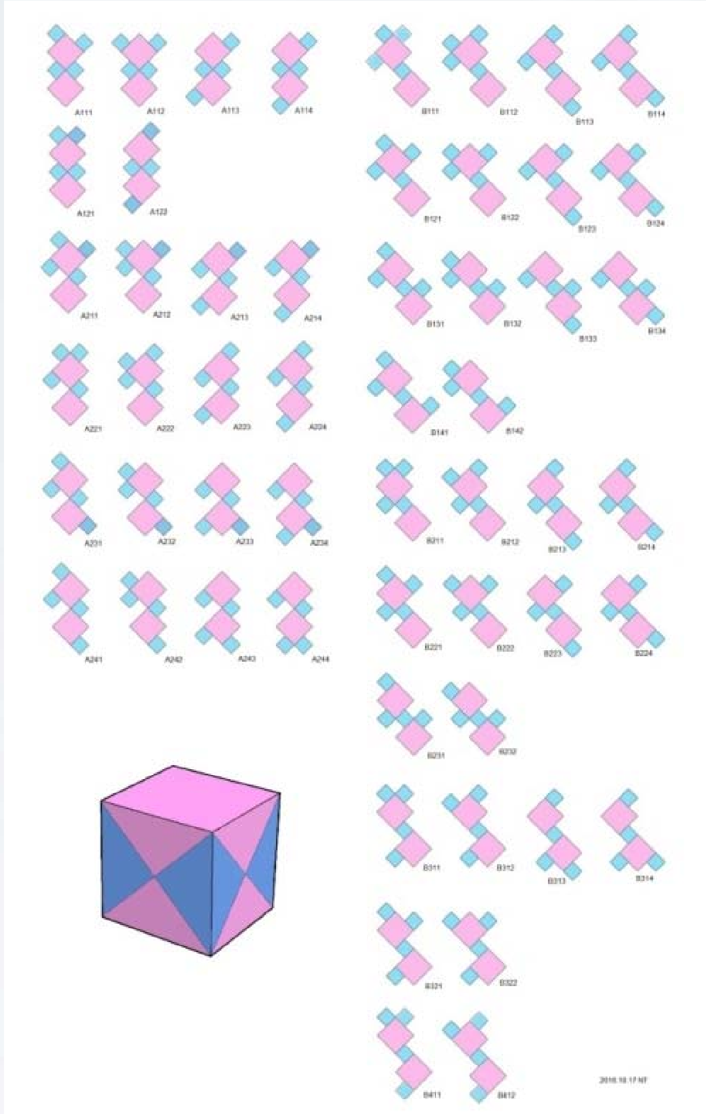
http://happylilac.net/rippotai_tenkaizu-12.pdf

おまけ問題

- 立方体の辺展開は11通りある。

問1：正方形6個からなる展開図を
　　これ以外に見つけよ。
（ヒント：すべて同じ大きさでなくてもよい）

http://www.iwai-masaka.jp/56290.html

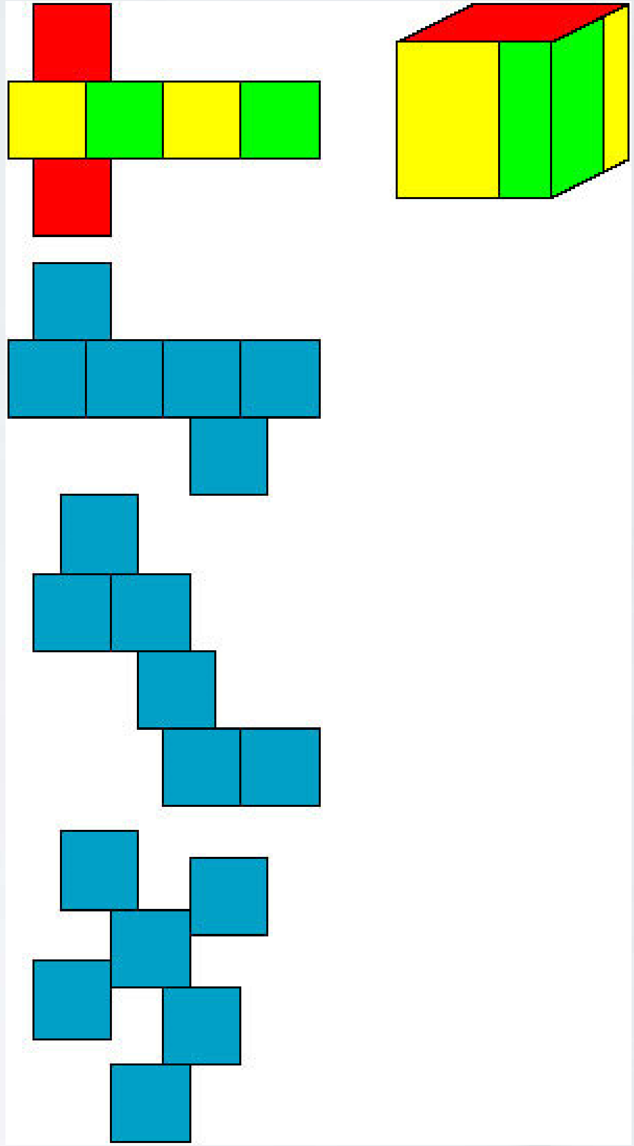


おまけ問題

- 立方体の辺展開は11通りある。

問2：すべて同じ大きさの正方形6個からなる展開図が無限にあることを示せ

http://www.iwai-masaka.jp/56291.html



さいごのまとめ

未解決予想:
任意の凸多面体は辺展開図を持つ

ポイント: 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

本研究の興味の対象:
- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる（凸）多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- （凸）多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム

未解決問題が多く,
現段階ではおもしろい結果が出しやすい分野だと思います.