切手折り問題

上原隆平(うえはらりゅうへい)
北陸先端科学技術大学院大学　情報科学研究科
Japan Advanced Institute of Science and Technology (JAIST)
uehara@jaist.ac.jp
http://www.jaist.ac.jp/~uehara

折り紙の複雑さ/効率(?)

- 計算機科学の視点で考えよう…
- 折り紙モデルにおける2種類の資源とは？

1. 時間…折り(基本演算)の回数
   - J. Cardinal, E. D. Demaine, M. L. Demaine, S. Imahori, T. Ito, M. Kiyomi, S. Langerman, R. Uehara, and T. Uno: Algorithmic Folding Complexity, *Graphs and Combinatorics*, Vol. 27, pp. 341-351, 2011.
2. 領域…???
   - R. Uehara: Stretch Minimization Problem of a Strip Paper, *5th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*, 2010/7/13-17.
   - R. Uehara: On Stretch Minimization Problem on Unit Strip Paper, *22nd Canadian Conference on Computational Geometry*, pp. 223-226, 2010/8/9-11.

一般化じゃばら折り問題

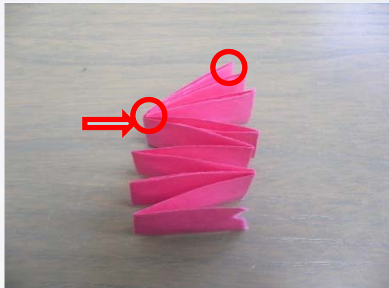
- 入力：等間隔の山折りと谷折りの列
- 出力：入力を実現する平坦な折りたたみ状態

[定理] どんな入力に対しても、平坦な折りたたみ状態が存在する。

[証明(?)] 端から一つずつ折っていけばよい。

[疑問] 「良い平坦折り状態」とは？？

例：山谷山谷山谷山山谷山谷山谷山



左側の一つの折り目に右側を全部入れる

×良くない！！

どの折り目も2枚以下の紙しか挟まっていない

○良い！！

• 平坦折りの「良さ」

ある折り目の伸び（ストレッチ）
＝その折り目に挟まった
他の紙の枚数

[疑問] 「良い平坦折り状態」とは？？

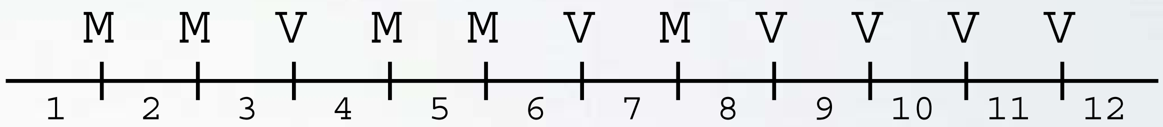
- 「折り目に挟まった紙」が少ないほど「良い」！
  - 厚みがあっても精度が確保されやすい
  - バランスがよさそう
  - 「時間」と「伸び」はトレードオフがある
    （計算機モデルにおける「時間」「領域」に似ている）
- 良さの指標
  1. 折り目の伸びの最大値
  2. 折り目の伸びの平均値
  3. 折り目の伸びの総和

指標[2]と[3]は本質的に同じ:
平均値＝(総和/折り目の数)

指標による結果の違い

答えが自明ではない例

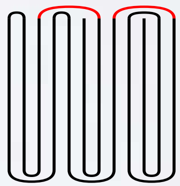
入力: 山山谷山山谷山谷谷谷谷



折りたたみ方: 正当な平坦折りの個数:100通り

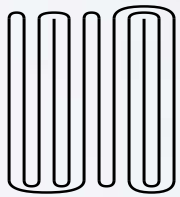
解答: 指標によって結果が違う(しかも両方唯一解):

- 最大値が最小値3の唯一解
  [5|4|3|6|7|1|2|8|10|12|11|9]



総和=13

- 総和が最小値11の唯一解
  [5|4|3|1|2|6|7|8|10|12|11|9]



最大値=4

最小伸び折りたたみ問題(仮)

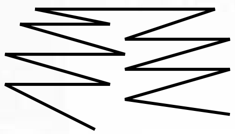
入力: 長さ $n+1$ の紙と[山/谷]の長さ n の文字列 s

出力: s に従って平坦に折られた紙

目的: 伸びの少ない「良い」平坦折り状態

- わかっていること;
  1. 2種類の最適化問題の解答は違う場合がある
  2. パターンがじゃばら折りである⇔
     伸びが0である⇔
     折り方が一意的
  3. 指数関数的な組合せをもつ入力例がある

[証明]　余白がせますぎて書けない



[例]　山谷山谷山谷…山谷山山谷山谷山谷…山谷山

最小伸び折りたたみ問題(仮)

- この当時解けなかった問題:
  - NP完全(後年解決!)
  - 「伸び≦ k 」としたら多項式時間で解けるか?(これも後年解決!)
  - もっとも組合せの多いパターンは?(未解決)

- このとき解けた問題:
  1. ランダムなパターンの折りたたみ方の期待値
  2. (「単純折りモデル」の万能性)

最小伸び折りたたみ問題(仮)

既解決問題:

1. ランダムなパターンの折りたたみ方の期待値
   - 長さ n のランダムな山谷パターンに対する折りたたみ方 $f(n)$ が相対に小さければ、力技で解けるかもしれない…
   - …という考えは甘かった
   - 実験的: $f(n)=\Theta(1.65^n)$
   - 理論的: $f(n)=\Omega(1.53^n)$ かつ $f(n)=O(2^n)$

   …単純な全数チェックは望みがない

2. (「単純折りモデル」の万能性)

最小伸び折りたたみ問題(仮)

1. ランダムなパターンの折りたたみ方の期待値

- 長さ n の紙を(折り目は考えずに)長さ1になるまで折りたたむ方法を $F(n)$ とすると、$f(n)=F(n)/2^n$

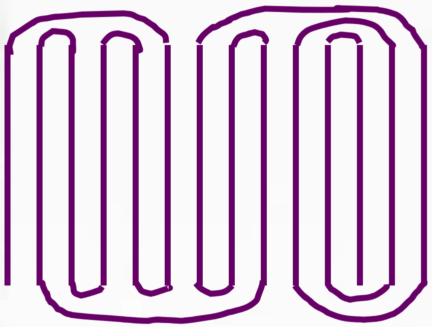
- $F(n)=\Omega(3.06^n)$ かつ $F(n)=O(4^n)$ を示せばよい。

後日談:この関数$F(n)$は有名な未解決問題
「切手折り問題(stamp folding)」として知られており,
既存の上下界は $\underline{2^n \leqq F(n)} \leqq 4^n$ であった!

最小伸び折りたたみ問題(仮)

$F(n)$の上界: $F(n)=O(4^n)$

[証明] 満たすべき条件:奇数折り目と偶数折り目がそれぞれ入れ子状になっていなければならない



入れ子

(()())(()(()))

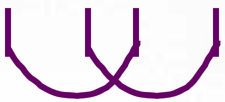
$n/2$組の()の組合せ＝カタラン数$C_{n/2}$

×

入れ子

・(()()())((・))

$n/2$組の()の組合せ＝カタラン数$C_{n/2}$



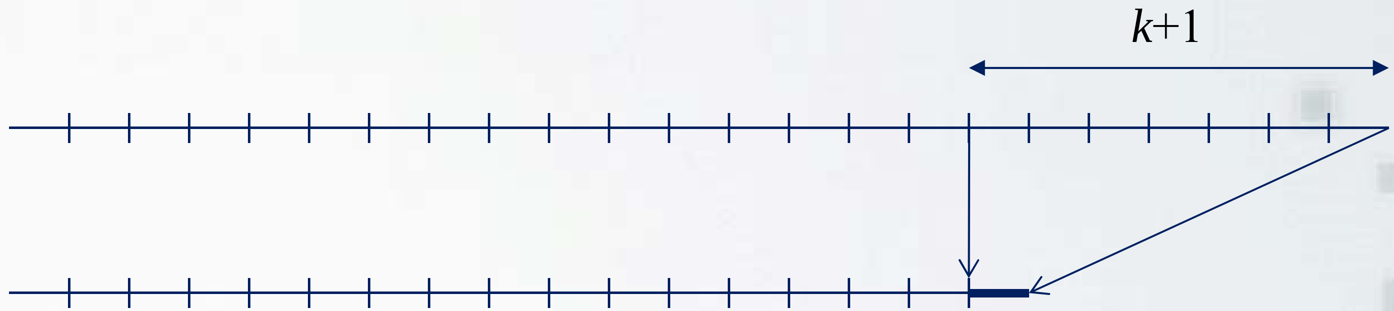
ダメ！

連結性は考慮していない

最小伸び折りたたみ問題（仮）

$F(n)$の下界: $F(n)=\Omega(3.07^n)$

[証明] 「紙の最後の k+1 長を折ってのり付け」を考える;



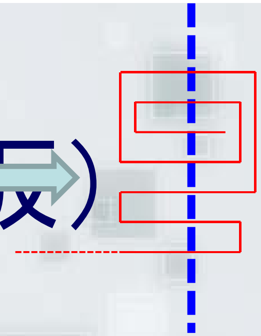
- $F(n)$: 長さ n+1 の紙の折りたたみ方
- $g(k)$: 長さ k+1 の紙の折りたたみ方
  ただし左端点は覆われない

n は変数だけど
k は定数

とすると以下を得る:

$$f(n) \geq (g(k))^{\frac{n}{k-1}} = \left(g(k)^{1/(k-1)}\right)^n$$

最小伸び折りたたみ問題(仮)



$F(n)$の下界: $F(n)=\Omega(3.07^n)$

[証明]「紙の最後の $k+1$ 長を折ってのり付け」を考える;

- $g(k)$: 長さ $k+1$ の紙の折りたたみ方(ただし左端点は覆われない)

とすると

$g(k)$=“the number of ways a semi-infinite directed curve can cross a straight line k times”,

“The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences” (A000682)

上記のデータベースによると、 $g(43)=830776205506531894760$.

よって

$$f(n) \geq (g(k))^{\frac{n}{k-1}} = \left(g(k)^{1/(k-1)}\right)^n$$

に代入すればOK!

最小伸び折りたたみ問題(仮)

既解決問題:

2. (「単純折りモデル」の万能性)

[単純折りモデルの万能性]:

「単位長の折り目のついた帯状の紙の任意の折りたたみ状態は、単純折りを繰り返すだけで必ず作れる」

- 問題が(単純折りモデル上で)well-defined
- 見た目ほど自明な結果ではない

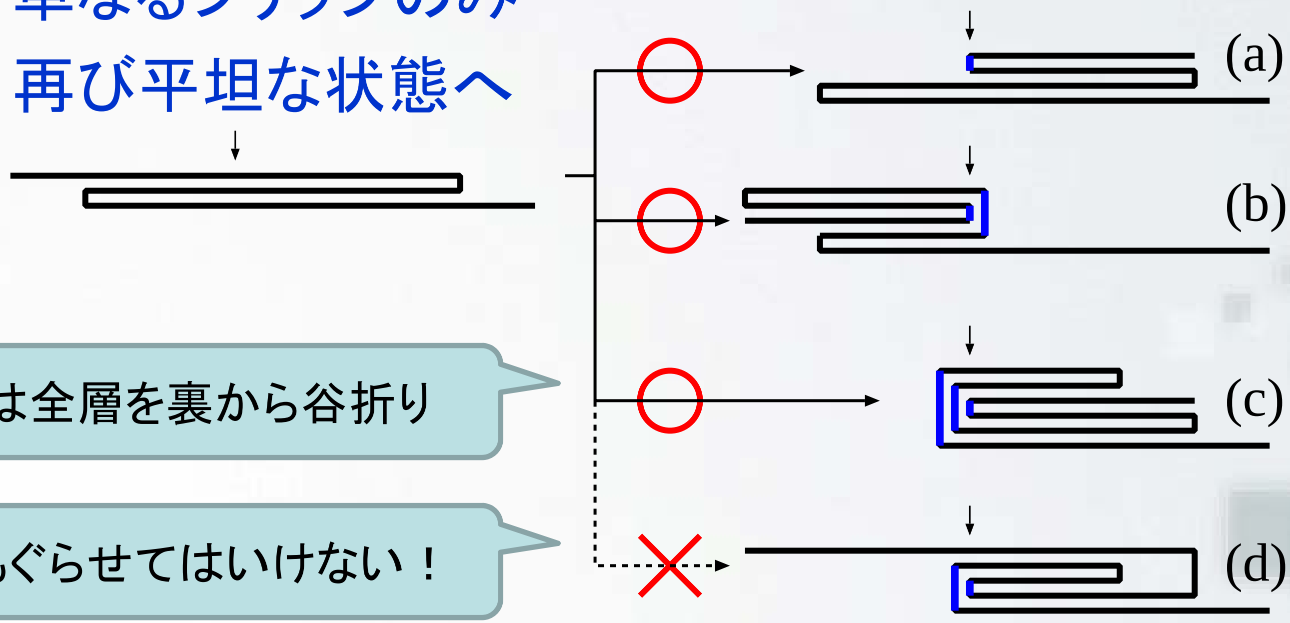
単純折りモデル

単純！

単純折りモデルでの基本操作

折り紙が
剛体でもOK

1. (平坦な状態から)
2. 1点を選ぶ
3. 内側の層を何枚か谷折りにする
   単なるフリップのみ
4. 再び平坦な状態へ



山折りは全層を裏から谷折り

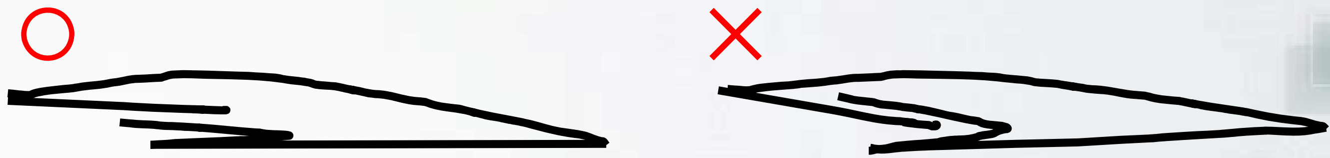
隙間にもぐらせてはいけない！

少し一般的な視点から...

単位長ではない1次元折り紙

- そもそも折れないパターンがある;

- 単純折りだと折れないパターンもある;



「最後の折り」が存在しない！

少し一般的な視点から…

単位長の1次元折り紙

- 任意の*M/V* パターンが与えられたとき、単位長にまで折りたたむことはできるのか?
  - ◆ “Yes”; 端から一つずつ折っていけばよい。
- 単位長の任意の「折りたたみ状態」が与えられたとき、これは折れるのか?
  - ◆ どんな折り方でもよければ “Yes”;
    - ▪ 「2次元空間のリンケージは絡まない」という（解決に10年以上かかった）大問題と関連がある
    - ▪ 直感的には「折りたたみ状態」を「ふんわりと」ほどいて開く。この操作を逆回しすればよい。
    - ✓ …が、これは「折り紙」とは言えない!!
  - ◆ **もっと単純なモデルで“Yes”と言いたい!!**

そこで単純折りモデル!

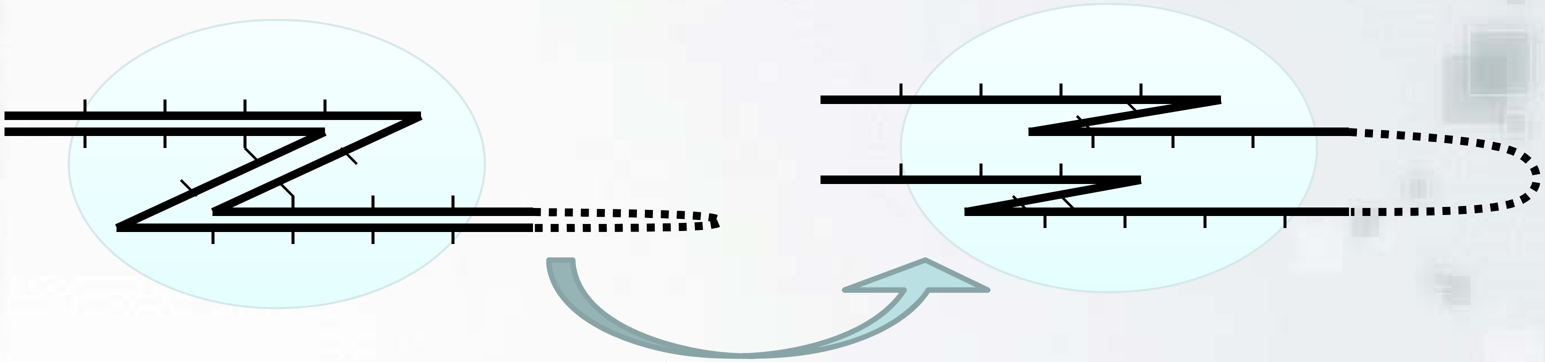
単純折りモデルでも、

- 単位長でなければ「万能定理」は成立しない

○

×

- 「局所的な戦略」だけでは折れない/開けない



「局所的」な単純折りだと、こうした
「絡み」をほどくことができない

万能定理

➤ 単位長折りの紙と単純折りモデルにおける万能定理;

> 折り目が等間隔の紙の任意の平坦折り状態 P は
> たかだか $2n$ 回の単純折りで折ることができる

[証明]

ポイント : P が折れる必要十分条件は、P を単純折りで平坦に戻せること。したがって任意の平坦折り状態 P をたかだか $2n$ 回の単純折りで平坦に広げられることを示す。

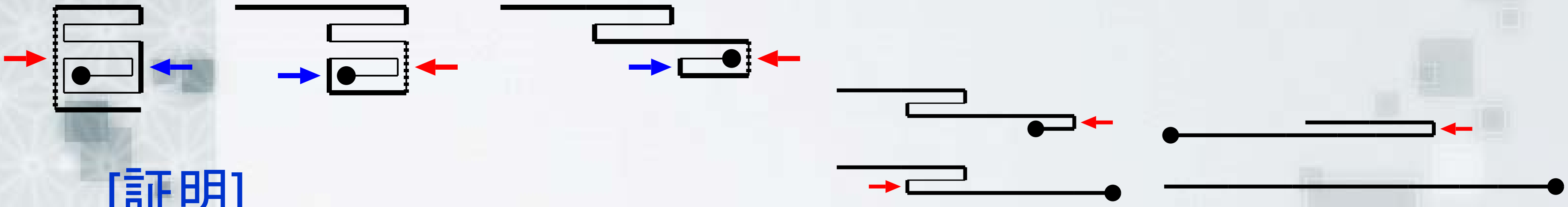
[ステップ1] 端点をむき出しにする

- 中に巻き込まれている端点を外から見えるようにする

[ステップ2] 端点から紙を剥いていく

- 後半の平坦部分を広げていく

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/



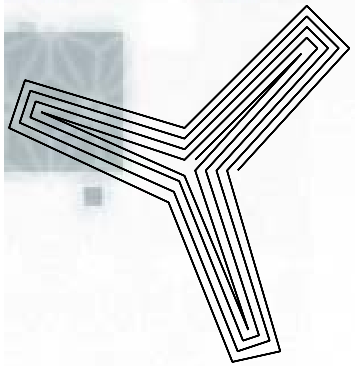
[証明]

[ステップ1] 端点をむき出しにする

- 端点が見えていないならば、「もっとも端点に近い見えている点」の奥を見えるように折る
- たかだか n 回開くと、端点が見えるようになる

[ステップ2] 端点から紙を剥いていく

- 「見える端点を含む最後の平坦な部分」をフリップして、その部分の長さを伸ばしていく
- たかだか n 回開けば、平坦な紙を得る



[注意]

それぞれのステップで、同じ折り目に何度も操作をすることがある

そのため、操作の回数全体のトータルを n でおさえられない

（ように見える）

折り目が等間隔の紙の任意の平坦折り状態 P は
たかだか $2n$ 回の単純折りで折ることができる

未解決:

- 展開の回数はたかだか n にできるのでは?
- 折り目が等間隔でないとき、単純折りで「折れない」かどうかを判定する問題は解けるか?

○

×