じゃばらを高速に折る
--- folding complexity ---

上原隆平（うえはらりゅうへい）
北陸先端科学技術大学院大学　情報科学研究科
Japan Advanced Institute of Science and Technology (JAIST)
uehara@jaist.ac.jp
http://www.jaist.ac.jp/~uehara

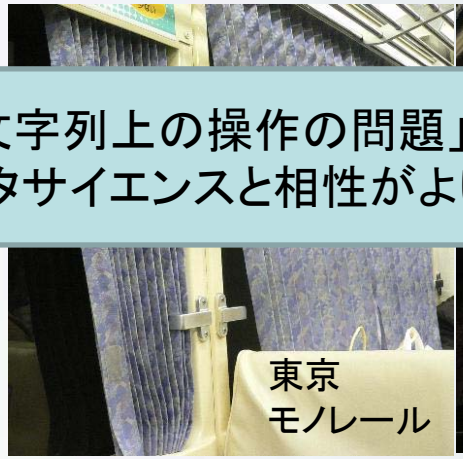
Google に “上原　折り紙” でもOK!

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/

じゃばら折り = 1次元折り紙

- 山折りと谷折りが等間隔に交互に続く
- 折り紙の基本ツール
- 応用も…?
- 山/谷を一般化したときの複雑さとは?

「(M/Vによる)2進数文字列上の操作の問題」と考えると、コンピュータサイエンスと相性がよい



折り紙の複雑さ/効率(?)

- 計算機科学の視点で考えよう…
- 例えばチューリング機械モデルにおける2種類の資源とは
  1. 時間：基本演算の適用回数
  2. 領域：計算に必要なメモリ量

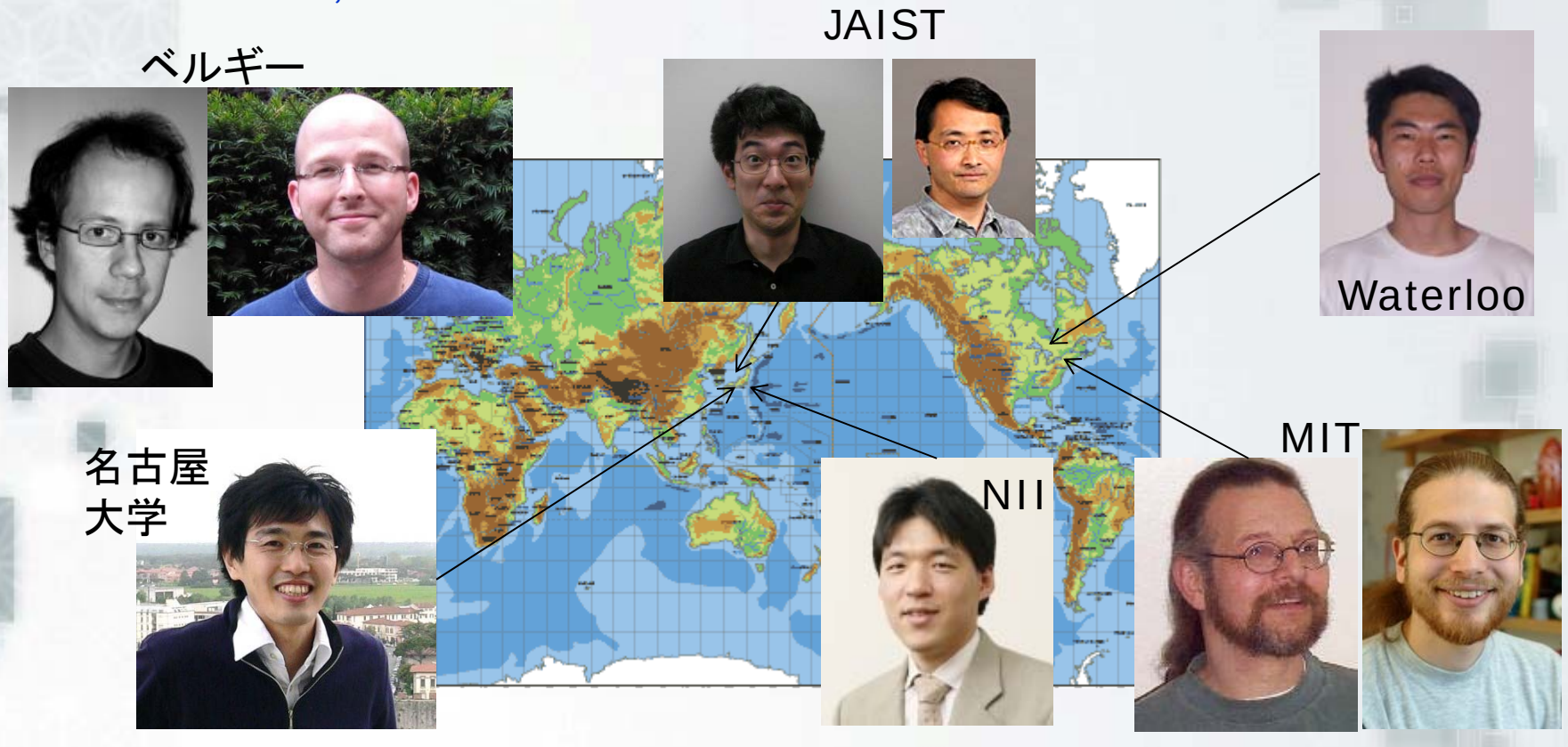
折り紙の複雑さ/効率(?)

- 計算機科学の視点で考えよう…
- 折り紙モデルにおける2種類の資源とは？

1. 時間…折り(基本演算)の回数
   - J. Cardinal, E. D. Demaine, M. L. Demaine, S. Imahori, T. Ito, M. Kiyomi, S. Langerman, R. Uehara, and T. Uno: Algorithmic Folding Complexity, *Graphs and Combinatorics*, Vol. 27, pp. 341-351, 2011.
2. 領域…???
   - R. Uehara: Stretch Minimization Problem of a Strip Paper, *5th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*, 2010/7/13-17.
   - R. Uehara: On Stretch Minimization Problem on Unit Strip Paper, *22nd Canadian Conference on Computational Geometry*, pp. 223-226, 2010/8/9-11.

1. 時間…折り(基本演算)の回数

- J. Cardinal, E. D. Demaine, M. L. Demaine, S. Imahori, T. Ito, M. Kiyomi, S. Langerman, R. Uehara, and T. Uno: Algorithmic Folding Complexity, *Graphs and Combinatorics*, Vol. 27, pp. 341-351, 2011.



http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/

じゃばら折り

「中央で半分に折る」ことが
もっとも多くの折り目を
つけることができる

じゃばら折り(1次元折り紙)

- 単純な方法: n 回折ればよい
- n 個の折り目をつけるには $\log n$ 回は折らないといけない

- もっと効率よく折り目をつけることはできるのか…?
- 一般のM/Vパターンに対してはどうか?

- CCCG 2008 の “Open Problem Session” にて上原が提案(Ron Graham が絶賛してくれた!!)
- 何度かの発表と結果の改善を経て多くの共著者を得て論文に至る

じゃばら折りの複雑さ

モデル：紙の厚みは0

[最大の疑問] n 個の折り目からなるじゃばら折りは n 回折らなければ作れないのか？

1. 答えは“No”!
   - ***任意のM/Vパターン***は高々 $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil \log n \rceil$ 回折れば作れる！
   - では $o(n)$ 回ではどうか?
   - Yes!! …わずか $O(\log^2 n)$ 回の折りで作る方法がある

2. 下界; $\log n$
   - じゃばら折りは $\Omega(\log^2 n/\log\log n)$ 回未満の折りでは作れない!!

一般化じゃばら折りの複雑さ

[次の疑問] 与えられた長さ n の任意の M/V パターンを折る問題の複雑さはどうか？

- ***任意のM/Vパターン***高々 $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil \log n \rceil$ 回折れば作れる!!

1. 上界:
   どんなM/Vパターンも $(4+\varepsilon)\frac{n}{\log n} + o\left(\frac{n}{\log n}\right)$ 回の折りで作れる
2. 下界:
   ほぼすべてのM/Vパターンは $\frac{n}{3+\log n}$ 回以上折らないと作れない

[おまけ] じゃばら折りは例外的に簡単なパターンであった！

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/

•定義

2種類のパリティがあるところが{難しい|面白い}
- “表/裏”は層のパリティで決まる
- 同じパリティでないと重ねて折れない

入力: 長さ $n+1$ の紙と $\{M, V\}^n$ の文字列 s

出力: s にしたがって等間隔に折り目のついた紙

基本操作

1. 整数点で{一部/全部}の紙を{山/谷}折りにして平坦にする (=単純折りモデル)
2. {すべて/任意/直前}の折り目で開く (=単純折りの逆操作)

規則(仮定)

1. それぞれの折り目は最後に折られた方向を記録している
2. 紙は折り目を除いて剛体

目標: 折り操作の回数の最小化

注意: 紙を開く操作のコストは気にしない

• 単位長折りの上界(1)

- どんなパターンも $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil \log n \rceil$ 回で折れる
  1. 指定にしたがって紙を中心で半分に折る
  2. 折られた紙の中心を見て、MとVの多数決をとる
     (裏返った紙に注意)
  3. 多数決に従って中心で半分に折る
  4. 2と3を繰り返す
  5. 全部広げる
  6. 間違った折り目を逐一直す

ステップ1~4の折りは $\log n$ 回でステップ6は高々 $n/2$ 回の折り

□

じゃばら折りの上界(1)

[観測]
もし $f(n)$ 回の折りで「n 個の山折り」が作れるなら、
n 個のじゃばら折りは $2\,f(n/2)$ 回の折りで作れる

以下の方法でよい:

- 偶数点だけに着目して $f(n/2)$ 回折って全部山折りにする;
- 紙を裏返す;
- 奇数点だけに着目して $f(n/2)$ 回折って全部山折りにする.

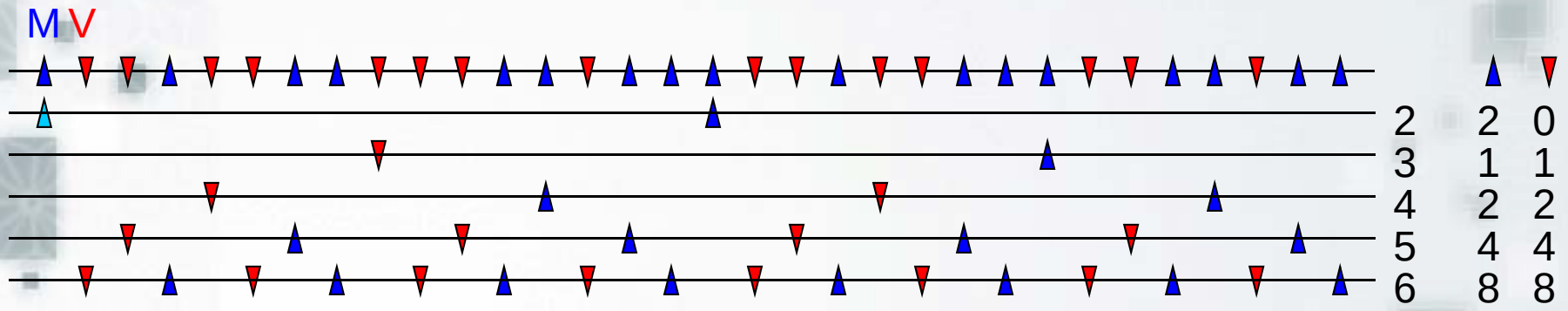
よって以下では「山折り問題」を考える

参考:「山折り問題」の$O(n^{0.69})$アルゴリズム

[定理] 山折り問題を解く $O(n^{0.69})$ アルゴリズム

[証明] $n=2^k$ として以下のアルゴリズムを使う

1. 左端を山折りにして、長さを 2^k-1 にする
2. 中央で山折りにする
3. 長さ1になるまで2を繰り返す
4. 全部開いて…

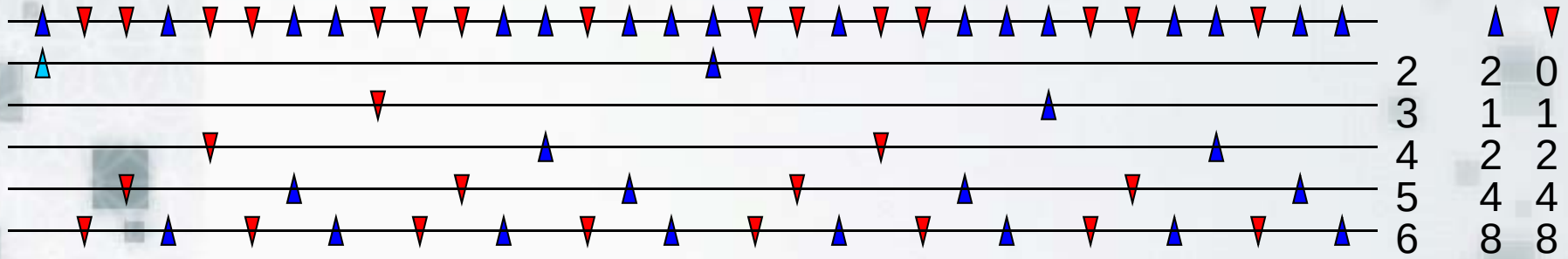


$k+1$回折って $2^{k-1}+1$ 個の山と $2^{k-1}-1$ 個の谷ができる

参考:「山折り問題」の$O(n^{0.69})$アルゴリズム

[定理] 山折り問題を解く $O(n^{0.69})$ アルゴリズム

[証明]



2^{k-1}-1 個の谷は独立で等間隔な k-1 個の層に分けられる!!

$$\therefore \quad f(2^k) = 1 + k + f(2^{k-2}) + f(2^{k-3}) + \cdots + f(4) + f(2) + f(1)$$

$$f(2^{k-1}) = k + \qquad\qquad f(2^{k-3}) + \cdots + f(4) + f(2) + f(1)$$

$$f(2^k) - f(2^{k-1}) = f(2^{k-2}) + 1$$

$$(f(2^k) + 1) = (f(2^{k-1}) + 1) + (f(2^{k-2}) + 1)$$

k に関するフィボナッチ数列！

参考:「山折り問題」の$O(n^{0.69})$アルゴリズム

[定理] 山折り問題を解く$O(n^{0.69})$アルゴリズ

[証明]

kに関するフィボナッチ数列！

$$(f(2^k)+1)=(f(2^{k-1})+1)+(f(2^{k-2})+1)$$

初期条件:

$$f(2^0)=1,\ f(2^1)=2,\ f(2^2)=4$$

よって $\quad f(2^k)+1=F_{k+3}$

[フィボナッチ数列]

$F_0=0, F_1=1, F_i=F_{i-1}+F_{i-2}\ (i>1)$

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,...

$$F_i=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right)$$

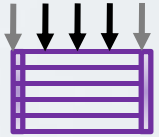
$$\therefore\ f(n)=f(2^k)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+3}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+3}\right)-1\ \square\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+3}$$

$$=O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\log n}\right)=O\left(n^{\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)=O(n^{0.694242})$$

□

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/

山折り問題を $\log^2 n$ 回の折りで解くアルゴリズム



ステップ1;

1. 「半分に折る」を繰り返して以下をえる ($\log n$-2 回の折り): [vvv]
2. 3回山折りして以下を得る: [MMM]
3. 開く; vMMMvvvvMMMvvvvMMMvvvvMMMvvvv…

ステップ2; [MvvvvvM]

1. すべての “vvvv”が重なるように半分折りを繰り返す($\log n$-3 回折る)
2. 5回山折りして以下を得る: [MMMMMMM]
3. 開く; vMvMMMMMMvMvvvvvMvMMMMMMMvMvvvvvMvM

ステップ3; “vvvv” が一つ残るまでステップ 2 を繰り返して以下を得る:

vMvMMMvMMMvMMMMMMMvMMMvMMMvMvvvvvMvM

ステップ4; すべてのとびとびの v を一つずつ折る.

- ステップ2~3の繰り返し回数; $\log n$
- ステップ4での v の個数; $\log n$

折りの回数のトータル~ $(\log n)^2$

• 単位長折り問題の下界

[定理] $o(2^n)$個の例外を除くほぼすべてのパターンは
$\Omega(n/\log n)$ 回折らないと作れない

{表/裏}×{前/後}

[証明] 単純な数え上げ法による:

- n 個の折り目のパターンの数 $> 2^n/4 = 2^{n-2}$
- k 回折ったことで作れるパターンの数 $<$

$$(2\times n)\times(n+1)\times(2\times n)\times(n+1)\times\ldots\times(n+1)\times(2\times n) < (2n(n+1))^k$$

山/谷

位置

可能な展開

よって以下が成立する場合、高々 k 回の折りではすべてのパターンは作れない: $\sum_{i=0}^{k}(2n(n+1))^i \le (2n(n+1)+1)^k < 2^{n-2}$

ここで $n \ge 2, k = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$ とおくと $(2n(n+1)+1)^k = o(2^n)$ をえる。

□

任意のパターンを $cn/\log n$ 回の折りで作るアルゴリズム(概要)

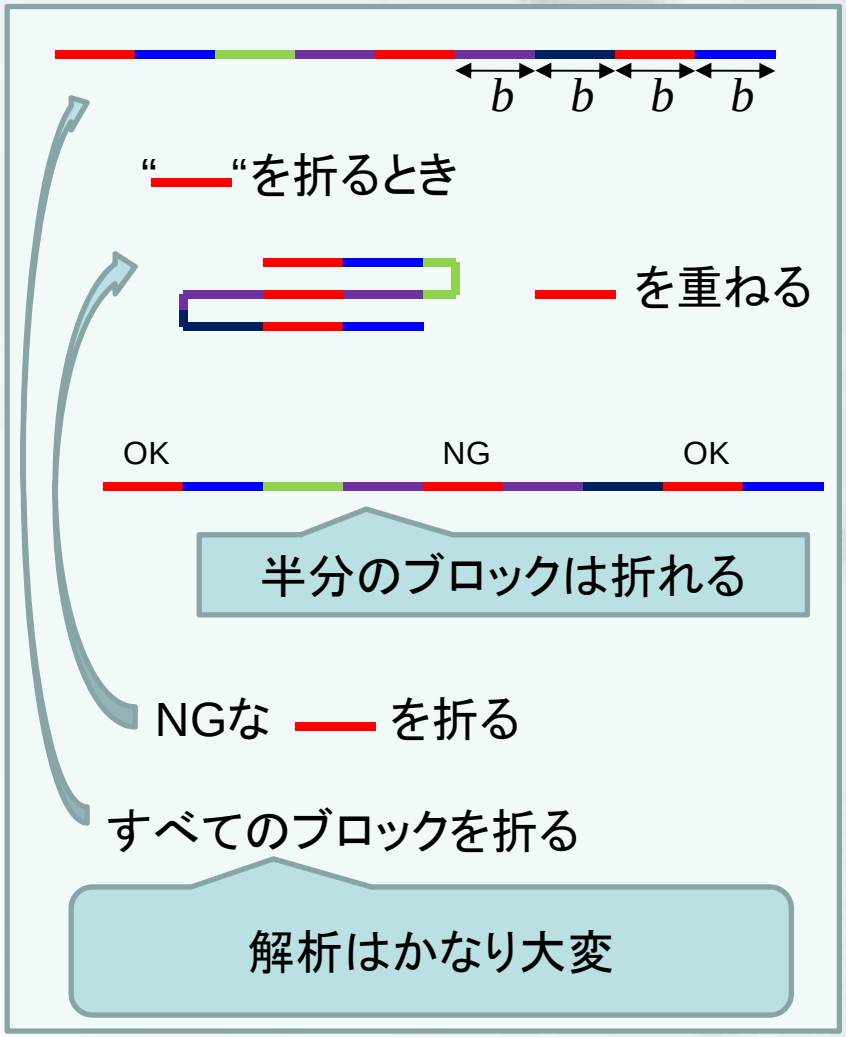
nに応じて適切に b を選ぶ.

準備:

- パターンを大きさbのブロックに分割;
  1. 各ブロックは $O(n/\log n)$ 回で折れる
  2. 2^b はそれほど大きくない

アルゴリズム:

- 可能なそれぞれのブロックパターンに対して
  1. 同じパターンをもつブロックが重なるように半分折りする
  2. 裏返っているブロックを直す
  3. 重ねるために折った所を直す



未解決問題

- じゃばら折り
  - 上界 $O(\log^2 n)$ と下界 $\Omega(\log^2 n / \log\log n)$ を近づける
- 「ほぼすべてのパターンは難しい」と言うけれど…
  - $(cn/\log n)$ 回の折りが本当に必要な**具体的な M/V パターン**の構成方法はわかっていない
- 紙を開くコストは無視しているけど…
  - 「折る回数」＋「開く回数」を最小化するとよいかも
  - (たかだか折った回数しか開けないけど…)

- もちろん2次元への拡張も…