本講義のトピック

そのA：展開図とそこから折れる凸立体の研究

- 展開図と立体のとても悩ましい関係：最大の未解決問題
- 与えられた「展開図」を折って作れる（凸）「立体」をどうやって計算するか？
  - 数学的な特徴づけ/アルゴリズム/計算パワー

そのB：「折り」のアルゴリズムと計算量の関係

- 折り紙の基本操作
- 折り紙のアルゴリズムと計算量
  - １次元の紙における効率のよい折り方（アルゴリズムと計算量）
    - 高速に折るアルゴリズム（折る回数を減らせるか？）
    - 「良い折り畳み状態」を評価する指標のモデル
  - １次元の紙における計算不能性（計算の理論）
    - 計算モデル

A1. （辺）展開図とは？

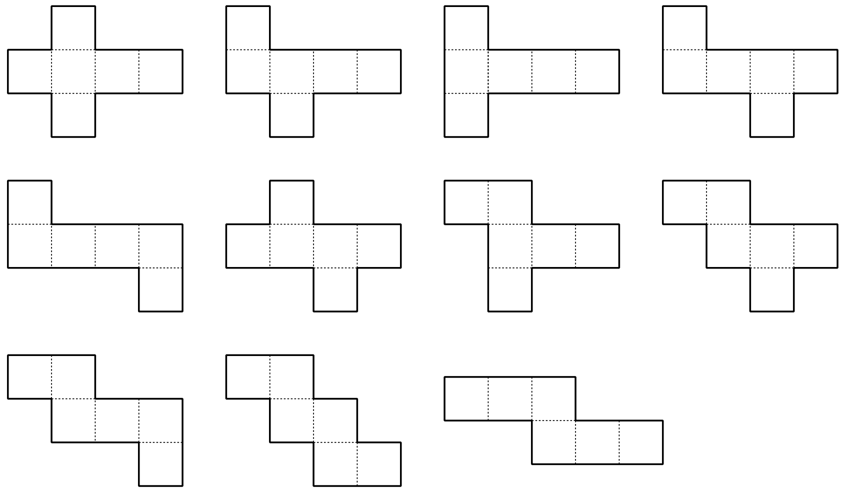
- （一般）展開図：多面体の表面を切って平面上に広げた多角形
  - 連結であること
  - 重なりを持たない単純多角形であること（便宜上、直線の集まりとする）
- （辺）展開図：多面体の辺に沿って切り広げた多角形
  - 展開の境界部分は多面体の辺からなる

★今日は「展開図」といえば一般の展開図という意味なので注意

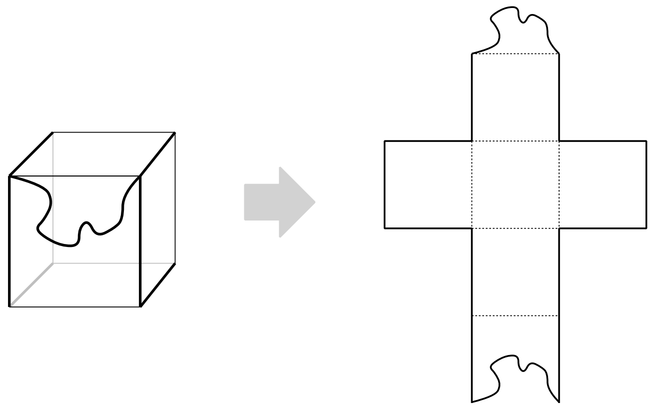
A1. 展開図の基礎知識：パズル

Special Thanks: 岩井政佳氏

- 「立方体の展開図は11通りである」と小学校で習う．しかしこれは，辺展開図に限定している．実際には無限に存在する．
- パズル：立方体の展開図で，正方形6つで作られるものを，上記の11通り以外に見つけて！
  1. 大きさが同じでなくてもよい場合は？
  2. 大きさがすべて同じ場合は？

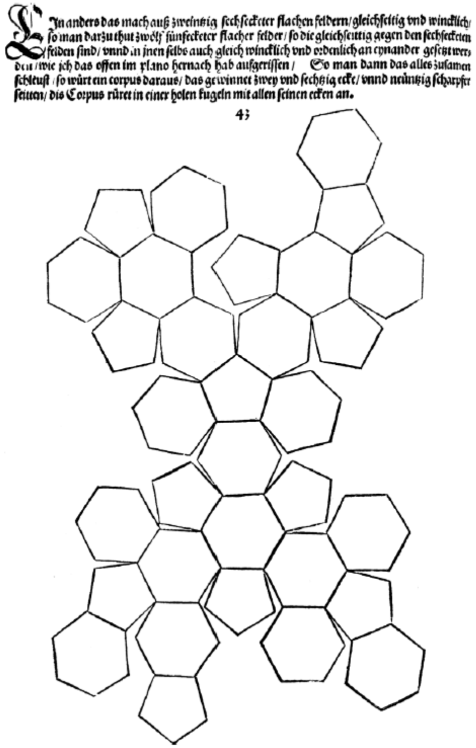


紙風船でも折って考えてみよう！



展開図の簡単な歴史

- アルブレフト･デューラーの『画家マニュアル』(1525)



Ein anders das mach auß zweintzig ſechſeckter flachen feldern/ gleichſeitig vnd wincklich/ ſo man darzu thut zwölff fünfeckter flacher felder/ ſo die gleichſeittig gegen den ſechſeckten felden ſind/ vnnd in jnen ſelbs auch gleich wincklich vnd ordenlich an eynander geſetzt werden/ wie ich das offen im plano hernach hab aufgeriſſen/ So man dann das alles zuſamen ſchleuſt/ ſo würt ein corpus daraus/ das gewinnet zwey vnd ſechtzig ecke/ vnnd neüntzig ſcharpffe ſeitten/ dis Corpus rüret in einer holen kugeln mit allen ſeinen ecken an.

43

- 数多くの立体を辺展開図で記述していた
- どうも以下の成立を予想していた…?

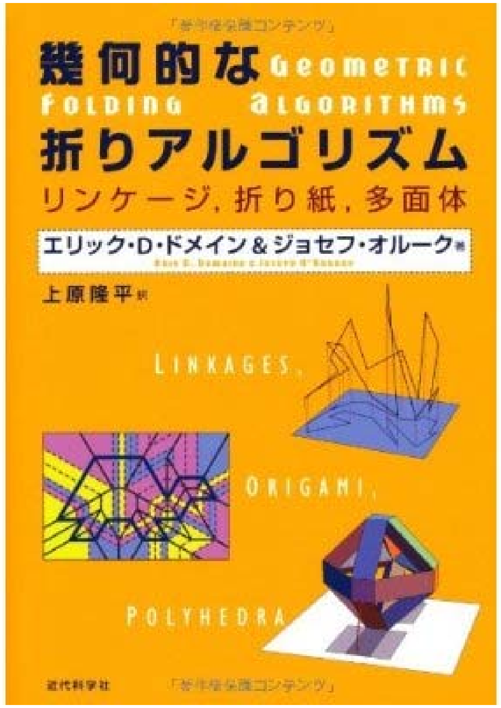
未解決予想:
任意の凸多面体は辺展開図を持つ

展開図の簡単な歴史

未解決予想:
任意の凸多面体は辺展開図を持つ

(今日はやらない)未解決予想の周辺の結果:

- 反例らしいものすら見つかっていない(当然?)
- 凹多面体なら反例がある
  (どんな辺展開も重なってしまう)
- 辺展開でなく一般展開なら可能
  (一般の点から各頂点に最短路を描いて切るという方法)
- ランダムな凸多面体をランダムに展開すると
  実験的にはほぼ確率1で重なってしまう



もし興味があれば…

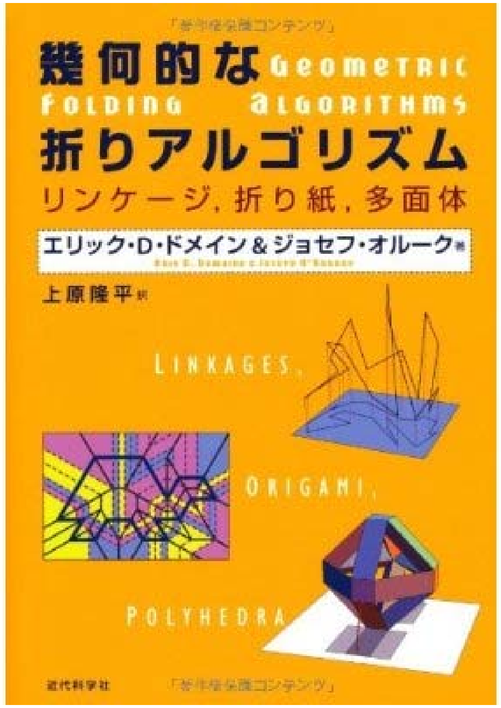
まとめ: <u>展開図に関してわかっていることは、ほとんどない</u>

展開図の簡単な歴史

未解決予想:
任意の凸多面体は辺展開図を持つ

まとめ: <u>展開図に関してわかっていることは、</u>
<u>ほとんどない</u>

本研究の興味の対象:
- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる（凸）多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- （凸）多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム



もし興味があれば…

展開図の簡単な歴史

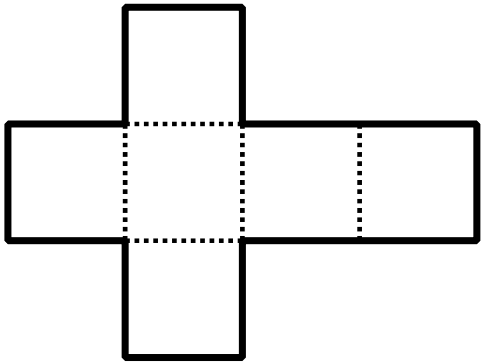
ポイント：展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

本研究の興味の対象：

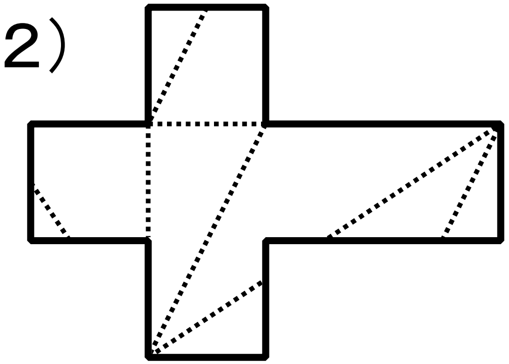
- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる（凸）多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- （凸）多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム

演習問題：何が折れるでしょう？

（1）



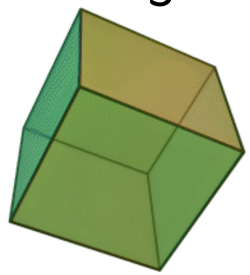
（2）



ちなみにこの「ラテンクロス」からは85通りで23種類の異なる凸多面体が折れることが知られている.

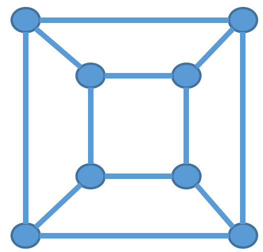
A1. 展開図の基礎知識(1)

凸多面体Sの頂点と辺から構成されるグラフをGとする



[全域木定理(その1)]
Sの辺展開におけるカットラインは、G上の全域木である

系:正多面体では、すべての辺展開においてカットの長さは同じ



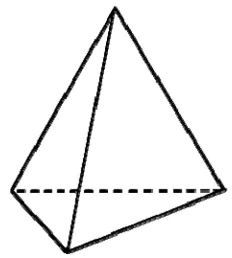
[証明]
- すべての点を訪れること:
  カットされない頂点があると、平坦に開けない
- 閉路をもたないこと:
  閉路があると、展開図がばらばらになってしまうため、連結にならない

[全域木定理(その2)]
Sの一般展開におけるカットラインは、S上ですべての頂点を張る木である

A1. 展開図の基礎知識(2)

正4面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

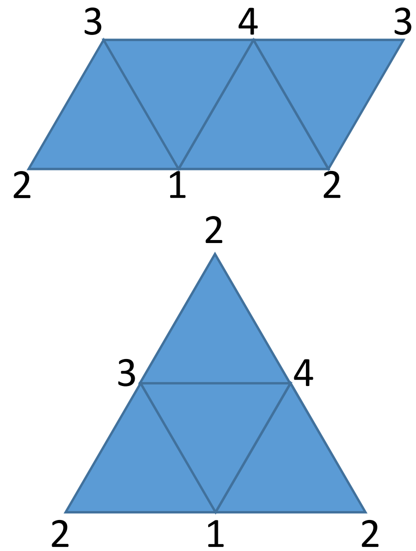
P

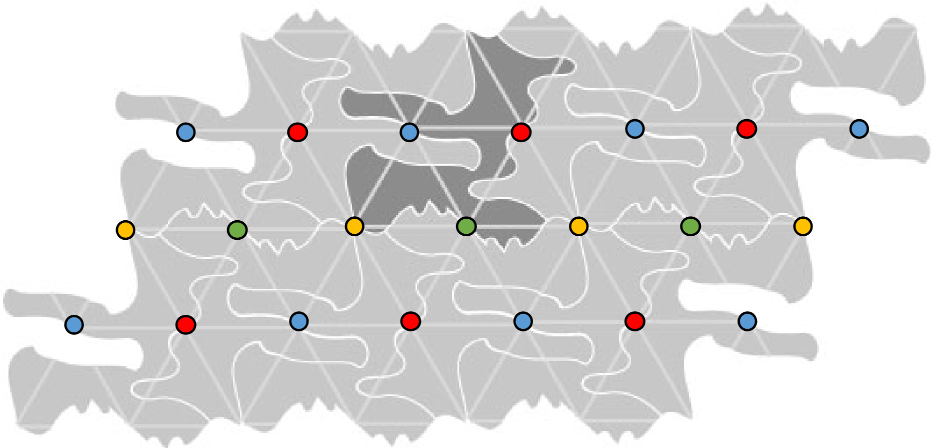


[正4面体の展開図定理(秋山 2007)]
正4面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。

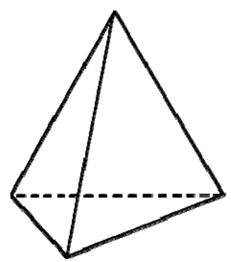
(1) **P** は **p2 タイリング。**つまり180° 回転で敷詰め可能
(2) **回転中心**の **4** 頂点が正三角格子をなす
(3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

参考:正4面体の辺展開図は二種





A1. 展開図の基礎知識(2)



正4面体の（一般）展開図に関する特徴づけ

[正4面体の展開図定理(秋山 2007)]
正4面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。
(1) **P** は **p2 タイリング。**つまり180° 回転で敷詰め可能
(2) **回転中心**の **4** 頂点が正三角格子をなす
(3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

Tile-Makers and Semi-Tile Makers, Jin Akiyama, *The Mathematical Association of America*, Monthly 114, pp. 602-609, 2007.

[直感的な説明]
平面上で正４面体を４回、
上手に転がすと、元に戻る。
各面にインクをつけて転がすと
平面全体にスタンプを押せる。

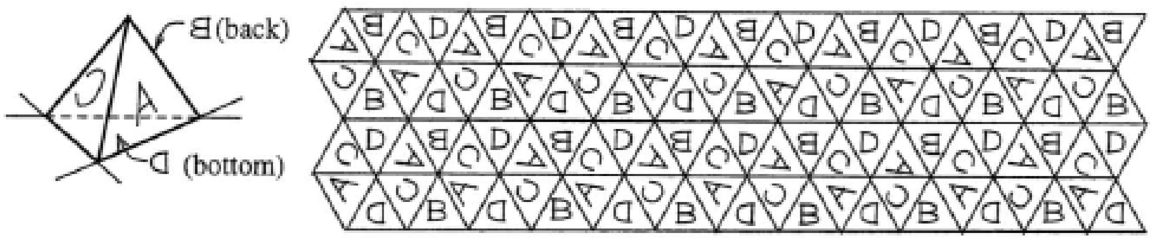
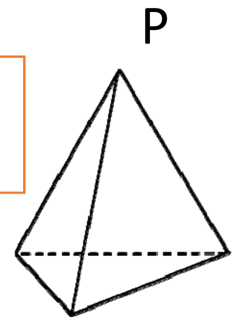


Figure 2.1. Carved regular tetrahedron R and the tiling by stamping with *R*.

A1. 展開図の基礎知識(3)

4単面体(Tetramonohedron):
4つの面が合同な4面体

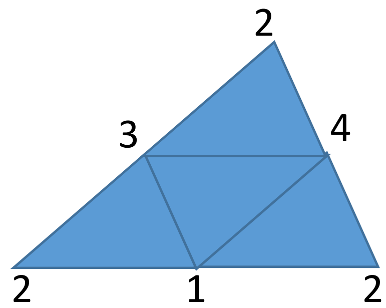


4単面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

[4単面体の展開図定理(秋山、奈良 2007)]
4単面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。
(1) **P** は **p2 タイリング。**つまり180゜ 回転で敷詰め可能
(2) **回転中心**の **4** 頂点がその単面による三角格子をなす
(3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

[直感的な説明]
正三角形格子を全体にゆがませればよい。

演習:どんな鋭角3角形からも4単面体が折れることを示せ



A1. 展開図の基礎知識：演習問題

1. 立方体の辺展開図を一つ選び、どのくらい多くの凸立体が折れるか、試してみよう。何かわかることはあるか？
2. どんな鋭角3角形からでも4単面体が折れることを示せ。どんな3角形でもタイリングできるが、それとの関係はどうか？鈍角3角形ではどうなるか？どんな4角形でも（凸でなくても！）タイリングできるが、これから立体は折れるか？折れないとすればなぜか？
3. 正多面体の一般展開図の最短カットの長さは？
   - 正4面体にはわりと美しい最適解があります
     - 最適解とその証明ができればなおよし
   - 正8面体と正6面体
     - 最適解を見つけるのは、なんとかなると思う
     - 最適性を示すのは、手間がかかります
   - 正20面体と正12面体
     - 最適解を見つけるのもちょっと大変かも