本講義のトピック

そのC：最新の成果たち

8. Rep-cube=Rep-tile + 展開図
9. ペタル型の紙で折るピラミッド型
10. ジッパー辺展開可能性

最新の結果の一部は，公開にあたって削除しました．オリジナルが欲しい方は，お気軽に上原までお問合せ下さい．

Rep-cubes: Dissection of Unfolding of Cubes

参考文献

- Dawei Xu, Jinfeng Huang, Yuta Nakane, Tomoo Yokoyama, Takashi Horiyama, Ryuhei Uehara: Rep-cubes: Dissection of a Cube into Nets, 某 journal に投稿中
- Dawei Xu, Takashi Horiyama, and Ryuhei Uehara: Rep-cubes: Unfolding and Dissection of Cubes, *The 29th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2017)*, 2017/07/26-2017/07/28, Ottawa, Canada.
- Zach Abel, Brad Ballinger, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Jeff Erickson, Adam Hesterberg, Hiro Ito, Irina Kostitsyna, Jayson Lynch, and Ryuhei Uehara: Unfolding and Dissection of Multiple Cubes, Tetrahedra, and Doubly Covered Squares, Journal of Information Processing, Vol. 25, pp. 610-615, August 2017. (JCDCG^3 2016 で発表)

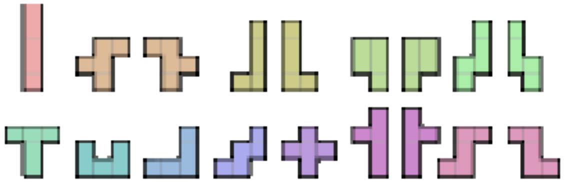
Rep-cube

以下のワークショップで研究が始まる:
31st Bellairs Winter Workshop on Computational Geometry, Barbados, 2016

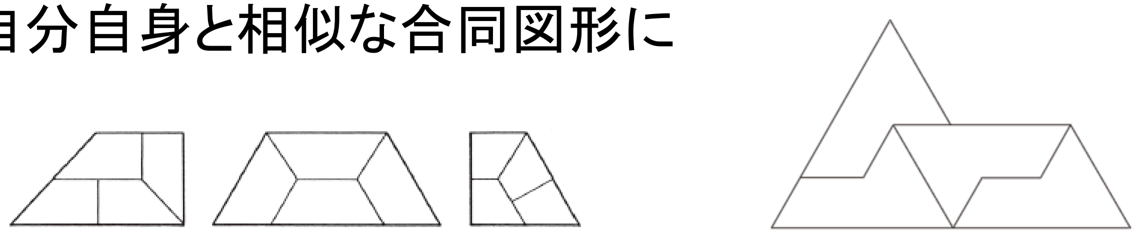
Solomon W. Golomb (1932-2016)

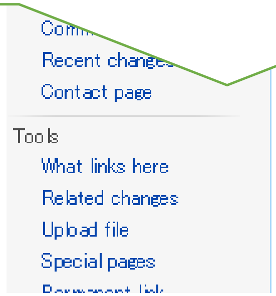
レクリエーション数学の視点からみると:

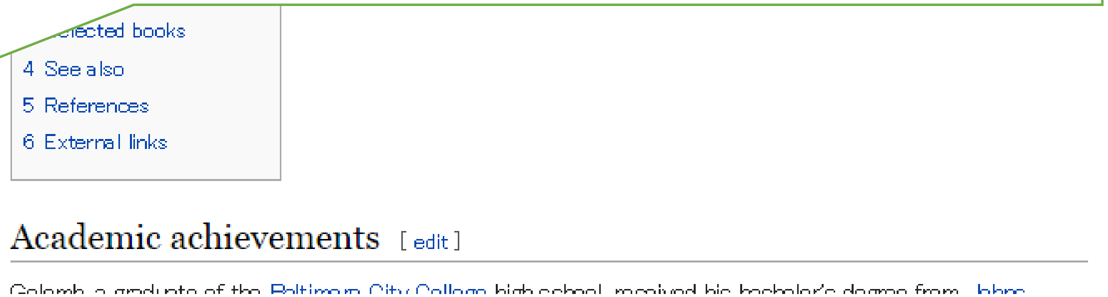
ポリオミノ(polyomino): 単位正方形からなる形



レプタイル(rep-tile): 自分自身と相似な合同図形に分割できる図形

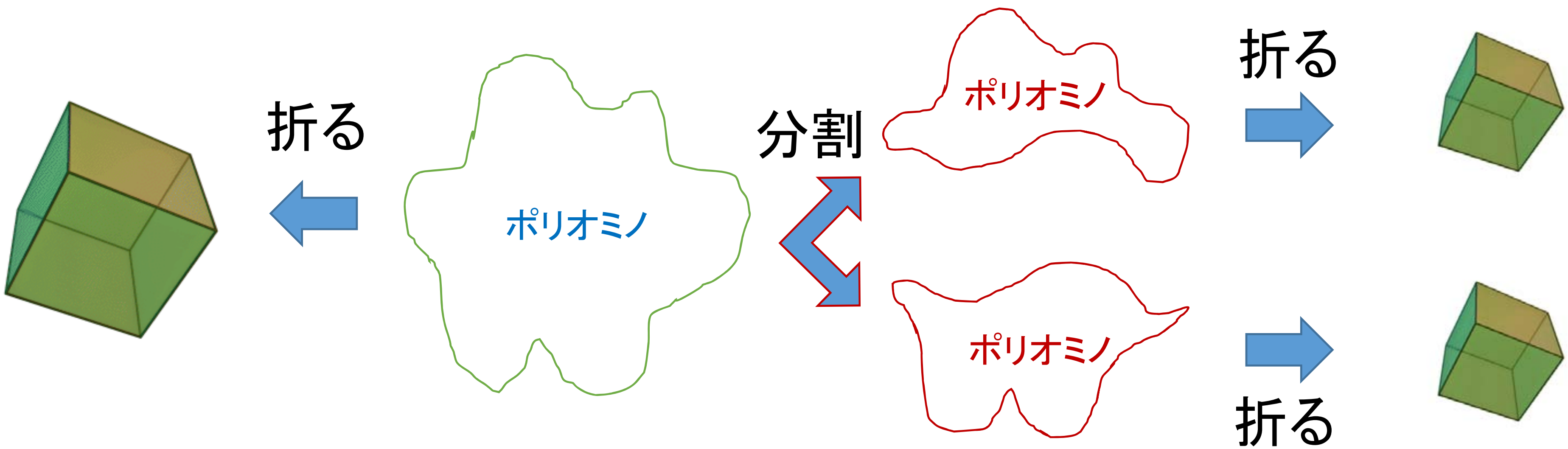






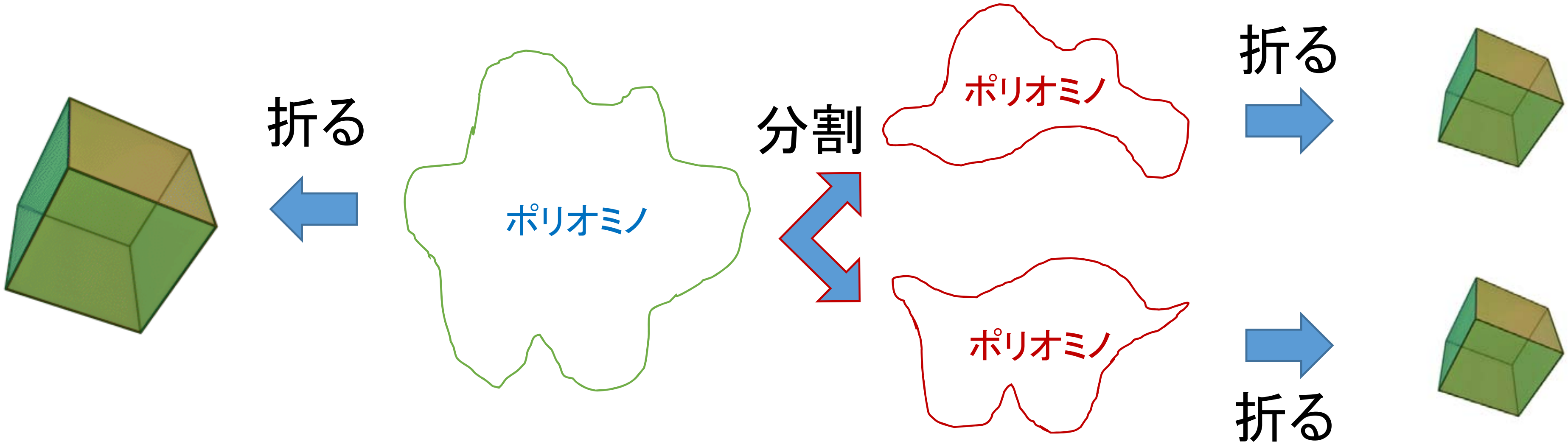
折り問題への拡張

自然な疑問: 立方体が折れるポリオミノで，分割したポリオミノがそれぞれ立方体を折れるようなものは存在するか？



新しい概念:「レプキューブ(rep-cube)」

- ポリオミノが次数(order) kのレプキューブ
  ⇔ それ自体が立方体を折れて，かつそれぞれが立方体を折れる k 個のポリオミノに分割できる
- レプキューブが正則(regular) ⇔ k 個がどれも同じ面積



2016年の結果:

定理1 以下のkに対して次数kの正則レプキューブが存在する:

k = 2, 4, 5, 8, 9, 36, 50, 64.

定理2 任意の自然数k'と{2, 4, 5, 8, 9, 36, 50, 64}の要素gに対して,
次数$36gk'^2$の正則レプキューブが存在する.
つまり正則なレプキューブは無限に存在する.

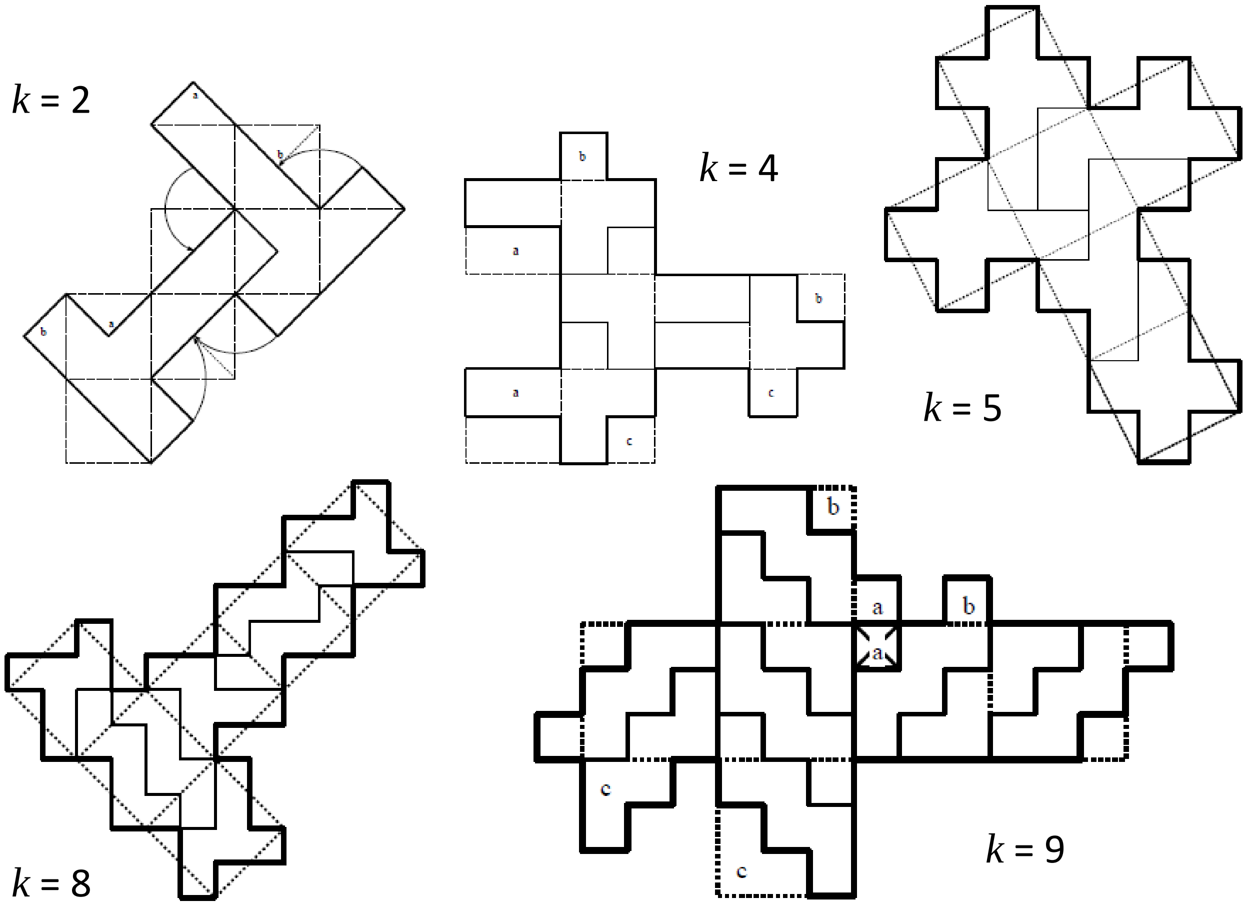
定理3 以下のkに対して次数kの非正則レプキューブが存在する:

$k = 2, 10.$

定理1 以下のkに対して次数kの正則レプキューブが存在する:

k = 2, 4, 5, 8, 9, 36, 50, 64.

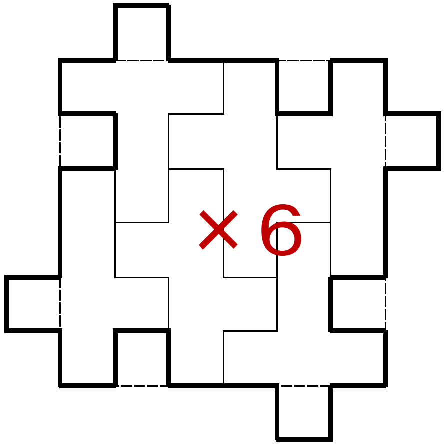
技法:
試行錯誤



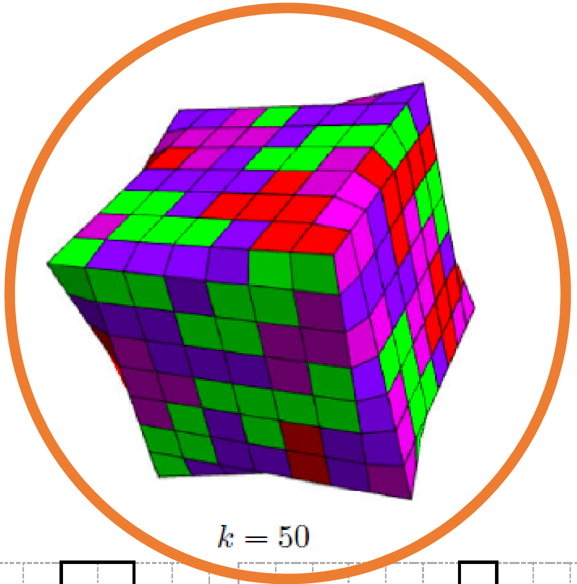
定理1 以下のkに対して次数kの正則レプキューブが存在する:

k = 2, 4, 5, 8, 9, 36, 50, 64.

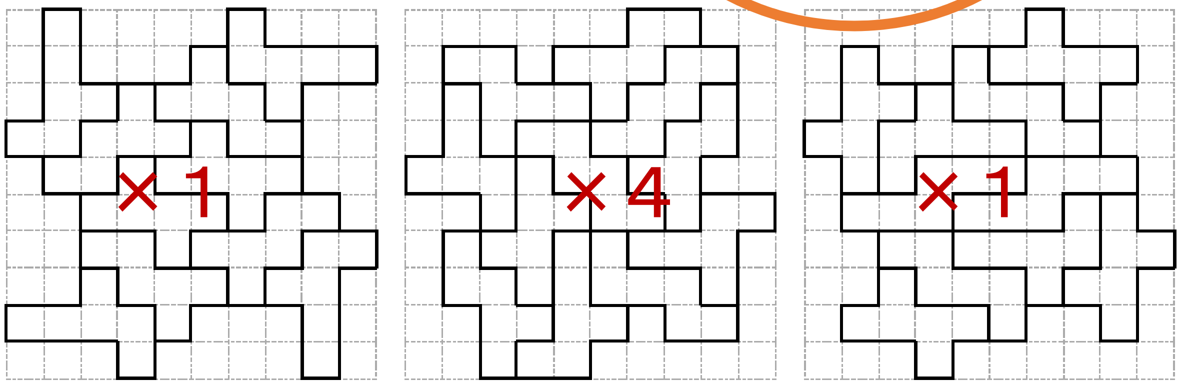
技法:
試行錯誤と
Mathematica



$k = 36$



$k = 50$

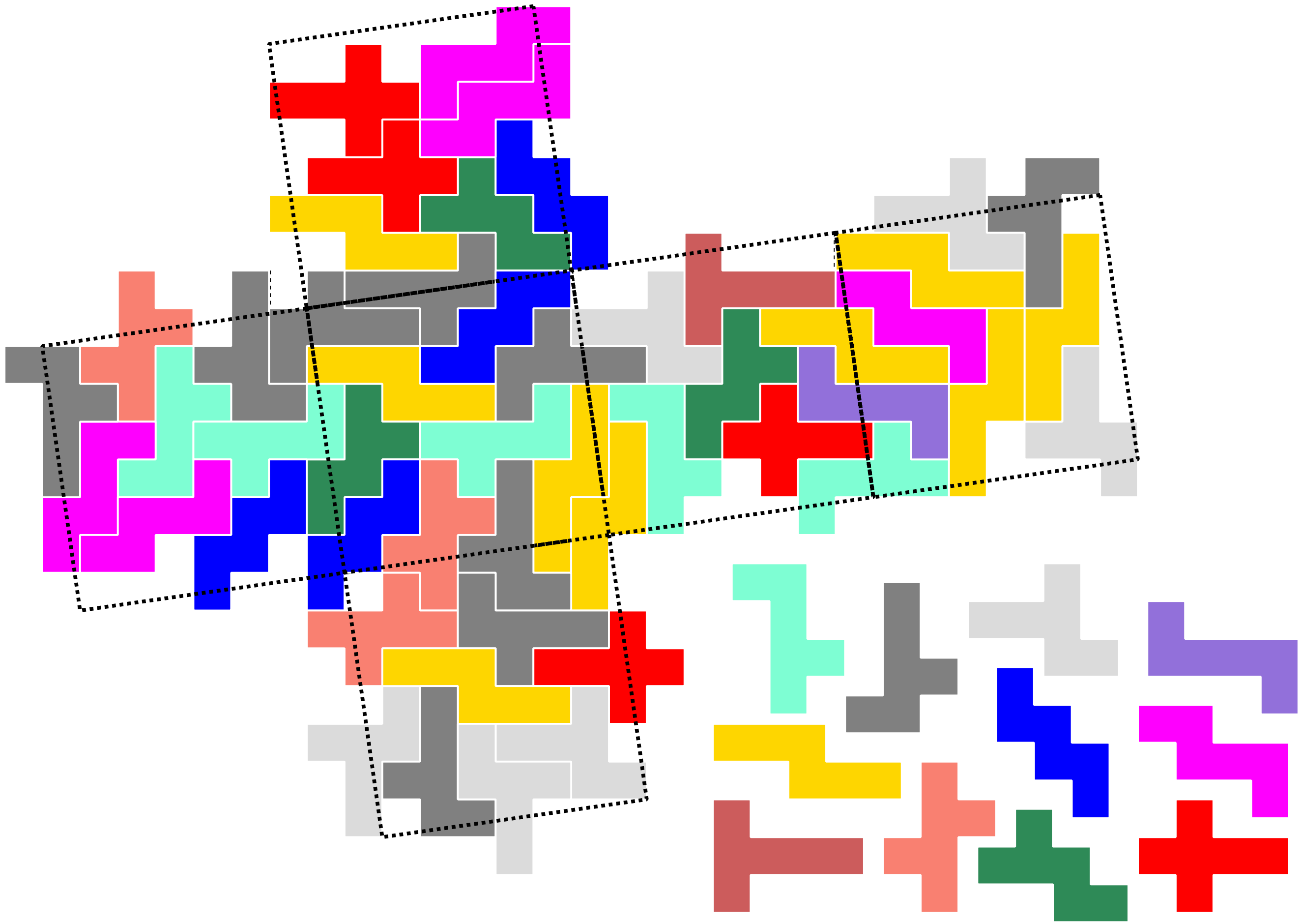


$k = 64$

定理1 以下のkに対して次数kの正則レプキューブが存在する:

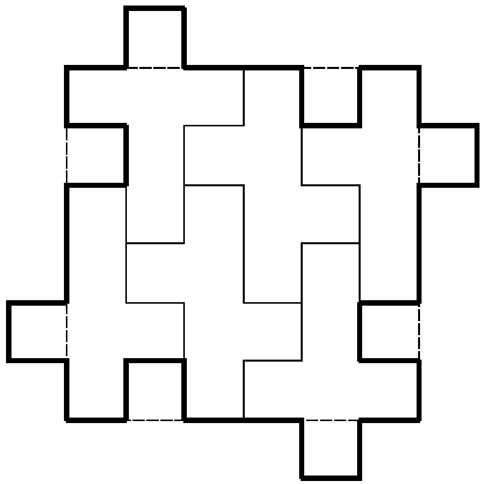
k = 2, 4, 5, 8, 9, 36, 50, 64.

11種類の展開図がすべて使われている



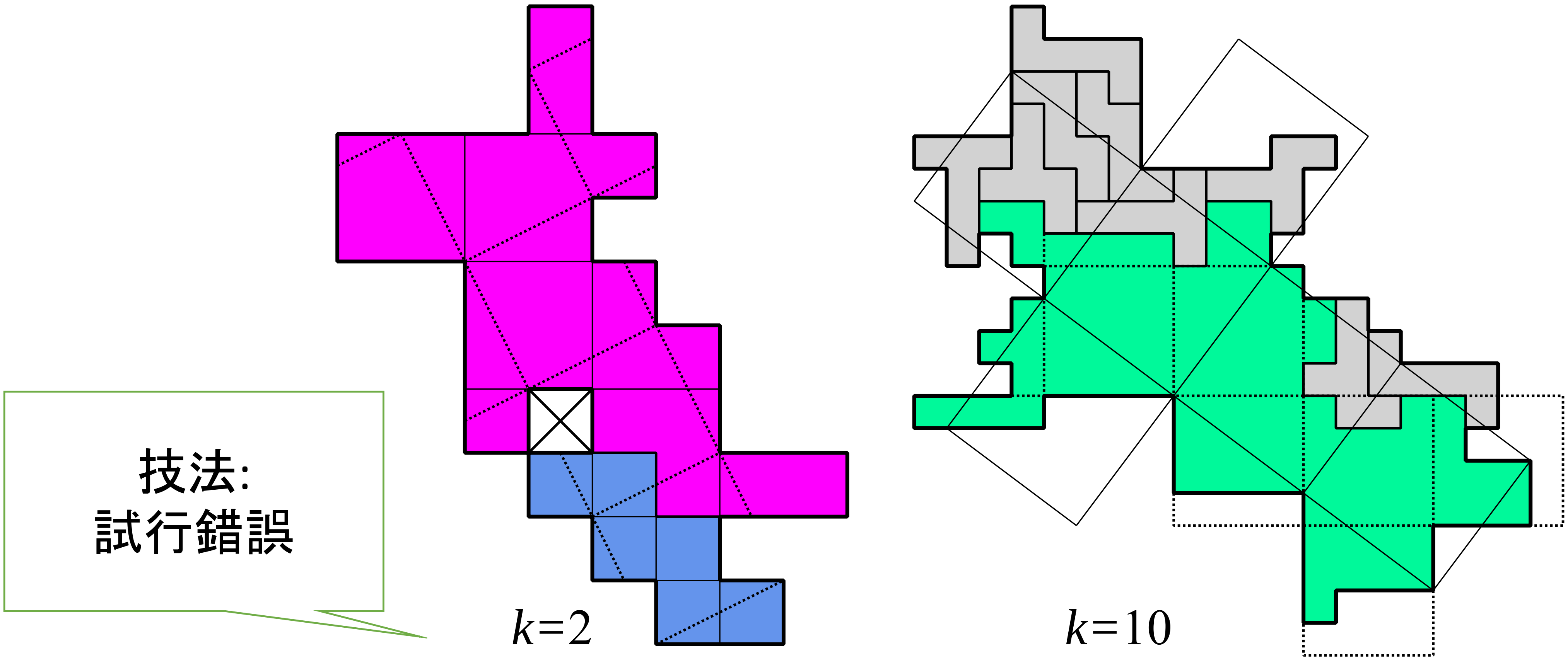
定理2 任意の自然数k'と{2, 4, 5, 8, 9, 36, 50, 64}の要素gに対して，
次数$36gk'^2$の正則レプキューブが存在する.
つまり正則なレプキューブは無限に存在する.

証明 定理1の好きなパターンを選ぶ.
それぞれの単位正方形を定理1の
$k=36$のパターンで置き換える.
これを繰り返せばよい.



$k = 36$

定理3 以下のkに対して次数kの非正則レプキューブが存在する: $k = 2, 10.$



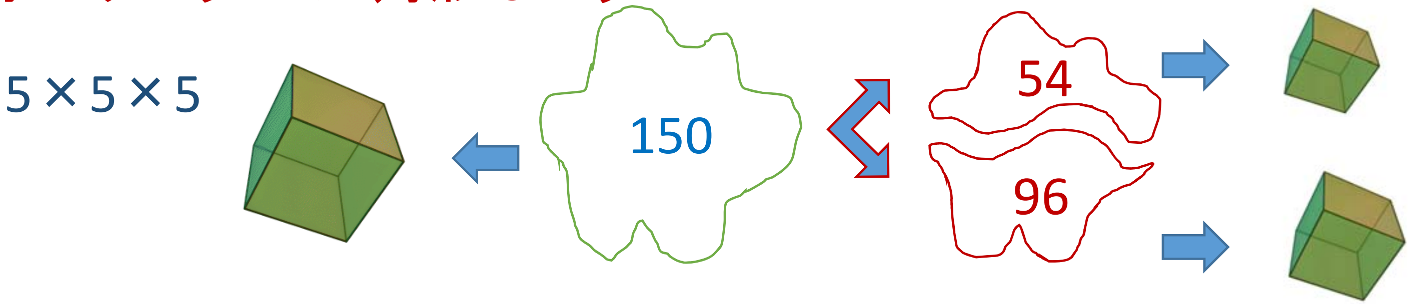
2016年時点での貢献と未解決問題

貢献:

- 新しい概念 rep-cube を導入し、多くの例を示した
- Rep-cube が無限に存在することを示した

未解決問題:

- 正則でないものは無限にあるのか？
  - 特殊な例:ピタゴラスの3角形はどうか？



発展課題

- もっと理論的な結果や性質は?
- 応用があるといいけれど ... レクリエーション数学だけか?

最近の進展（新発表）

定理4 次数2と4の正則レプキューブを全列挙した.

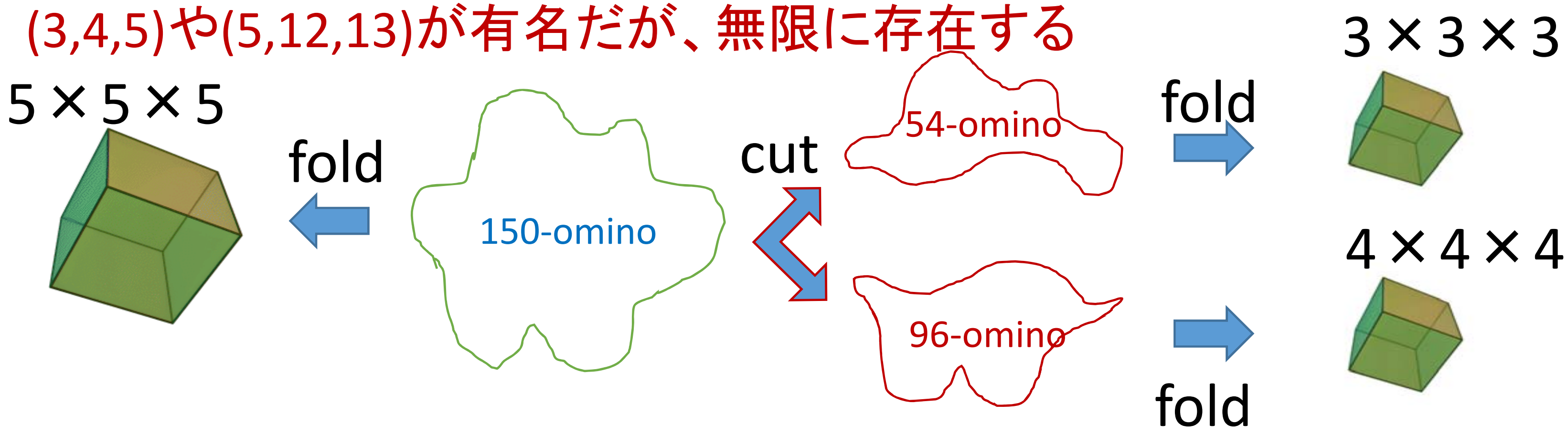
定理5 次数3の正則レプキューブは存在しない. ＋α（未発表）

定理6 非正則レプキューブは無限に存在する（未発表）

定理7 ピタゴラスの3角形との間の未解決問題への進展

ピタゴラスの3角形：自然数 a, b, c で $a^2+b^2=c^2$ を満たす組

(3,4,5)や(5,12,13)が有名だが、無限に存在する



定理4 正則レプキューブの列挙(k=2, 4)

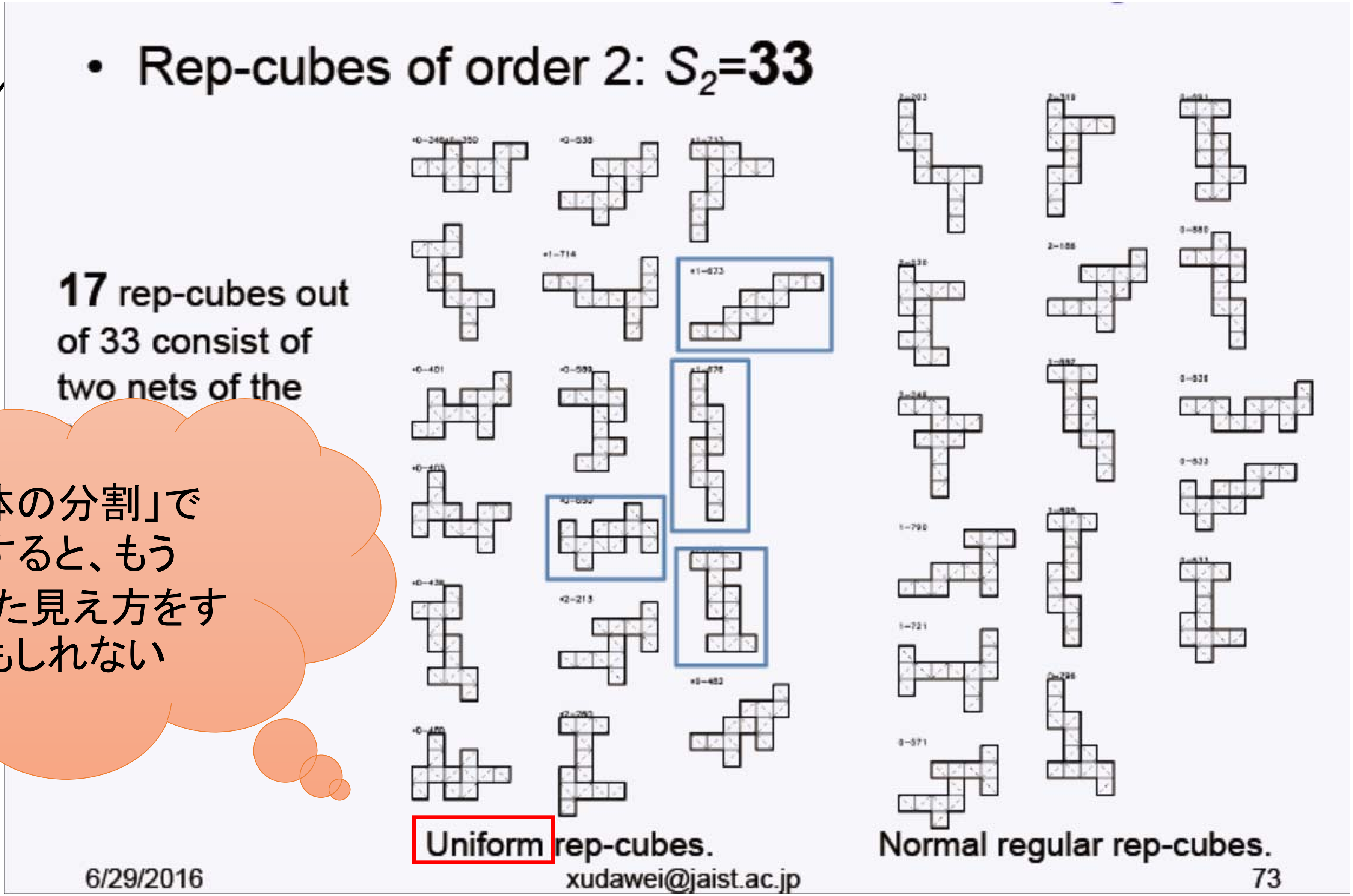
- 幅優先探索アルゴリズムで全列挙：
  1. S_1={11種類の辺展開図}
  2. For each i=1,2,3
     1. S_i の要素に S_1 の要素を可能なすべての方法で張り付けて
     2. 求める立方体に重なりなく貼れるかどうかを調べて
     3. 貼れるならS_{i+1}の要素に入れる

部分展開図

- k=2, 4のところまでがとりあえず限界でした…
  - k=2 のときは33種類のレプキューブがあった
  - k=4 のときは7185種類のレプキューブがあった

定理4 r

- k=2:



「立方体の分割」で
分類すると、もう
少し違った見え方をす
るかもしれない

定理5 次数3の正則レプキューブは存在しない.

[証明の概要]

- もしこうしたポリオミノが存在するなら、
  - 面積$6x^2$で立方体Q',Q'',Q'''がそれぞれ折れる
  - 面積$18x^2$の面積で立方体Qが折れる
- Qの各正方形の面の面積は$3x^2$でなければならないので、Qの辺の長さは$(\sqrt{3})x$となる。
- Qの展開図の「格子点」と「1/2格子点」をどうつないでも、$(\sqrt{3})x$という長さは作れない。

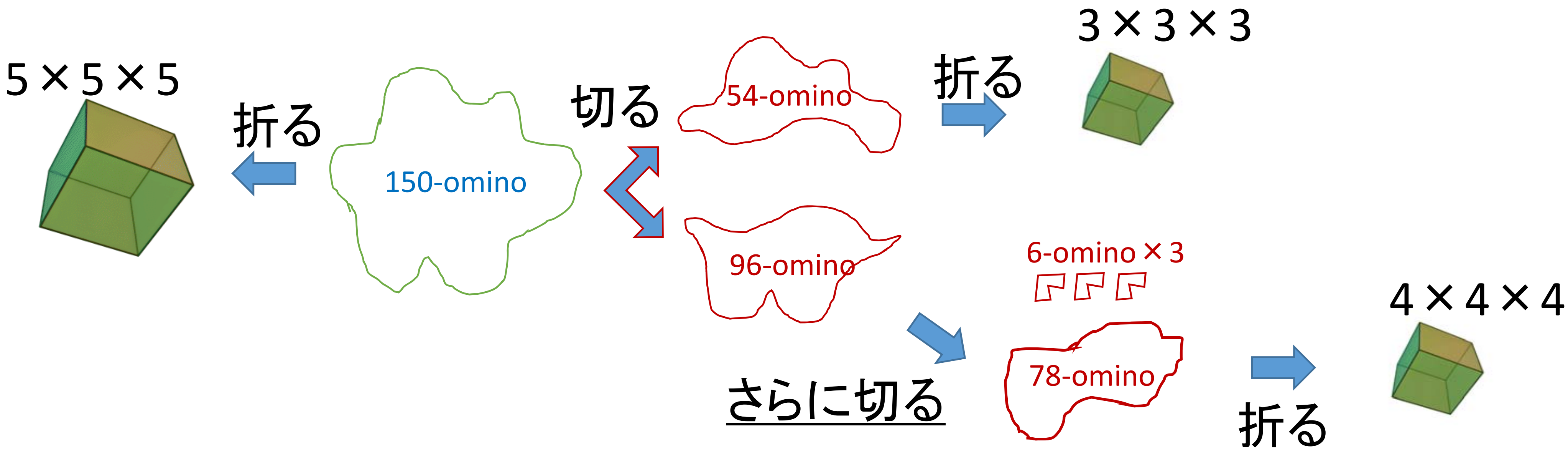
[詳細を略した定理]
ポリオミノの「カド」と「1／2の点」しかQの頂点（曲率270度）になれない

レプキューブができない自然数とできる（かもしれない）自然数の間の分類

定理7 ピタゴラスの3角形

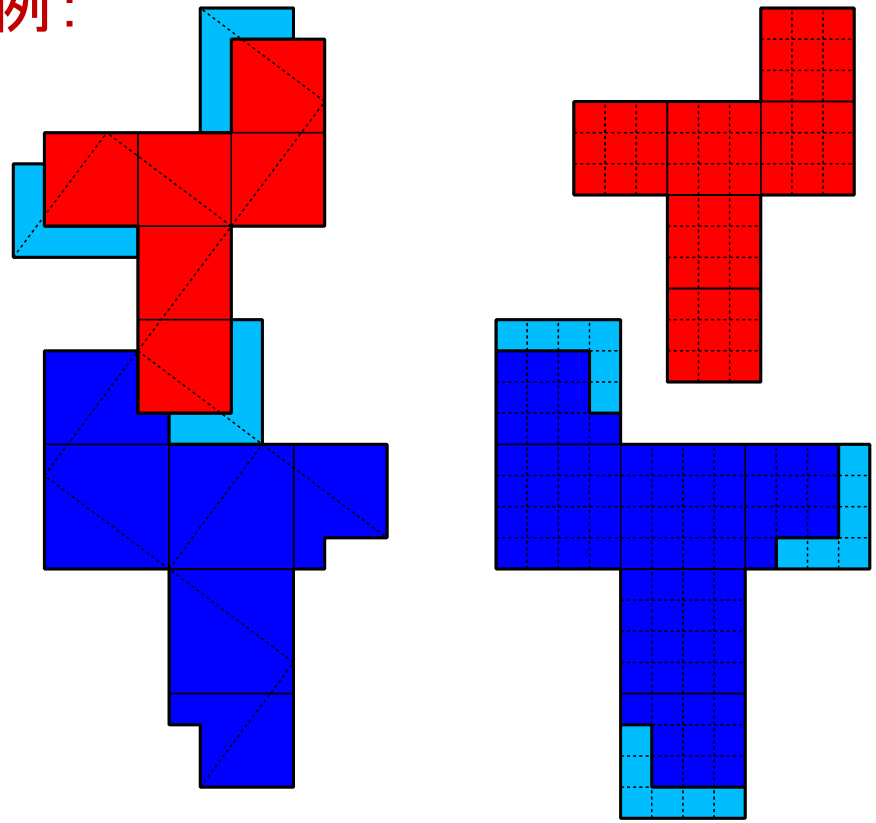
実際には、弱い定理を示しました:

右が2ピースでなく、5ピースでもよいなら、任意のピタゴラスの3角形について可能。

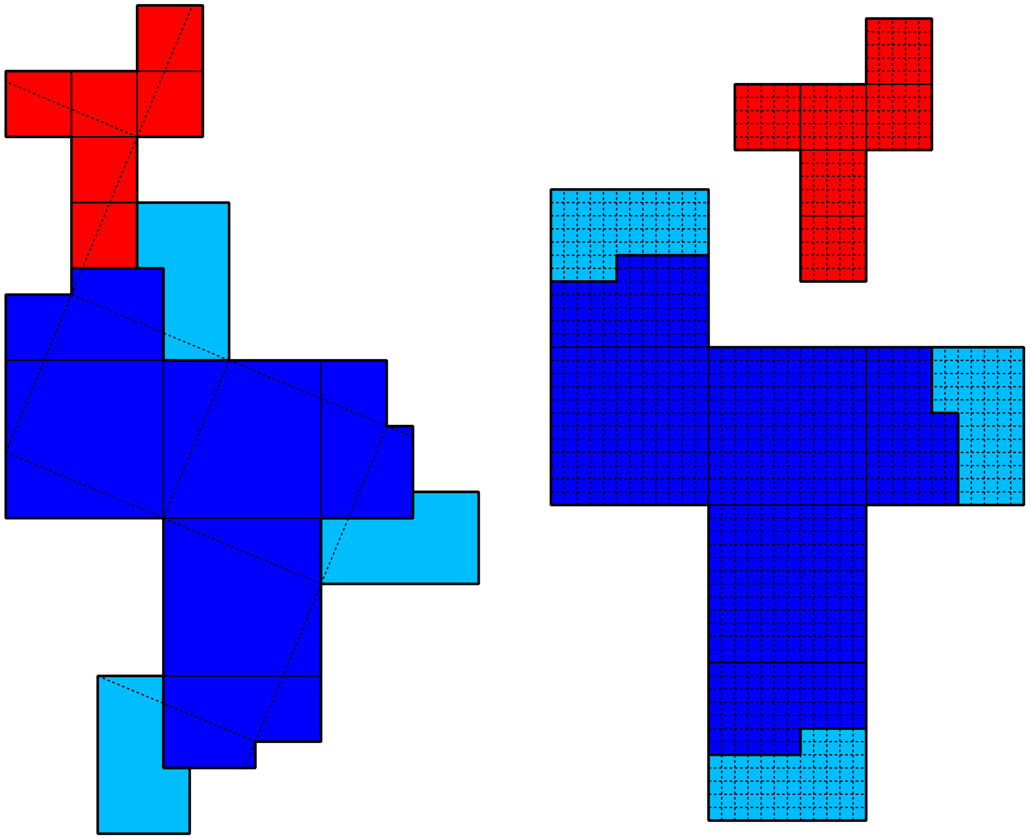


定理7 ピタゴラスの3角形

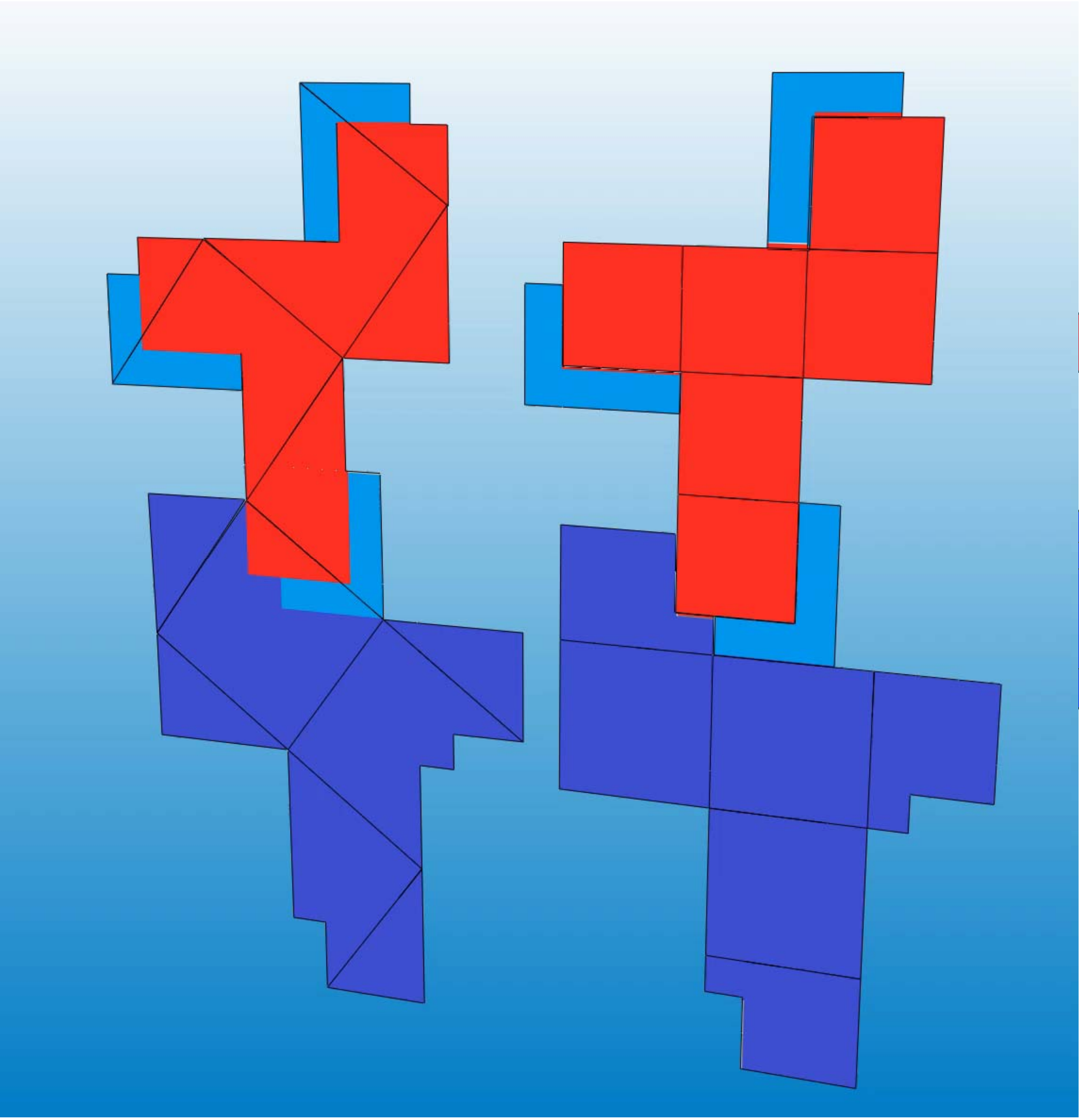
実例：

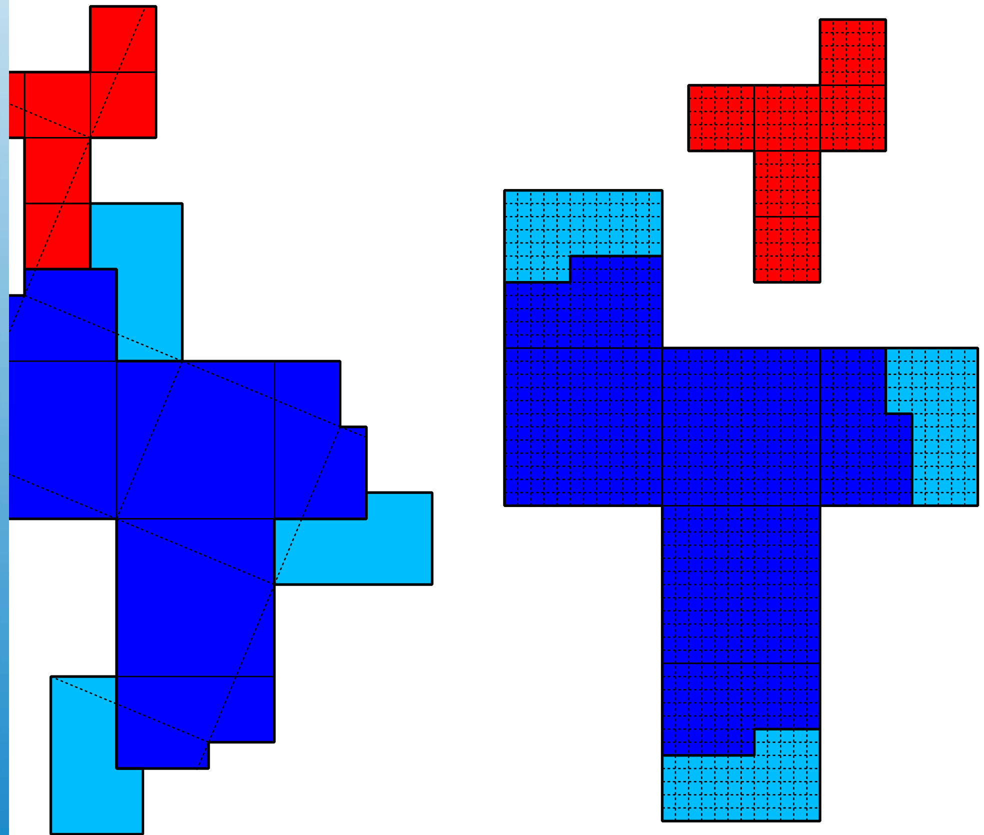


$3^2+4^2=5^2$の例



$5^2+12^2=13^2$の例



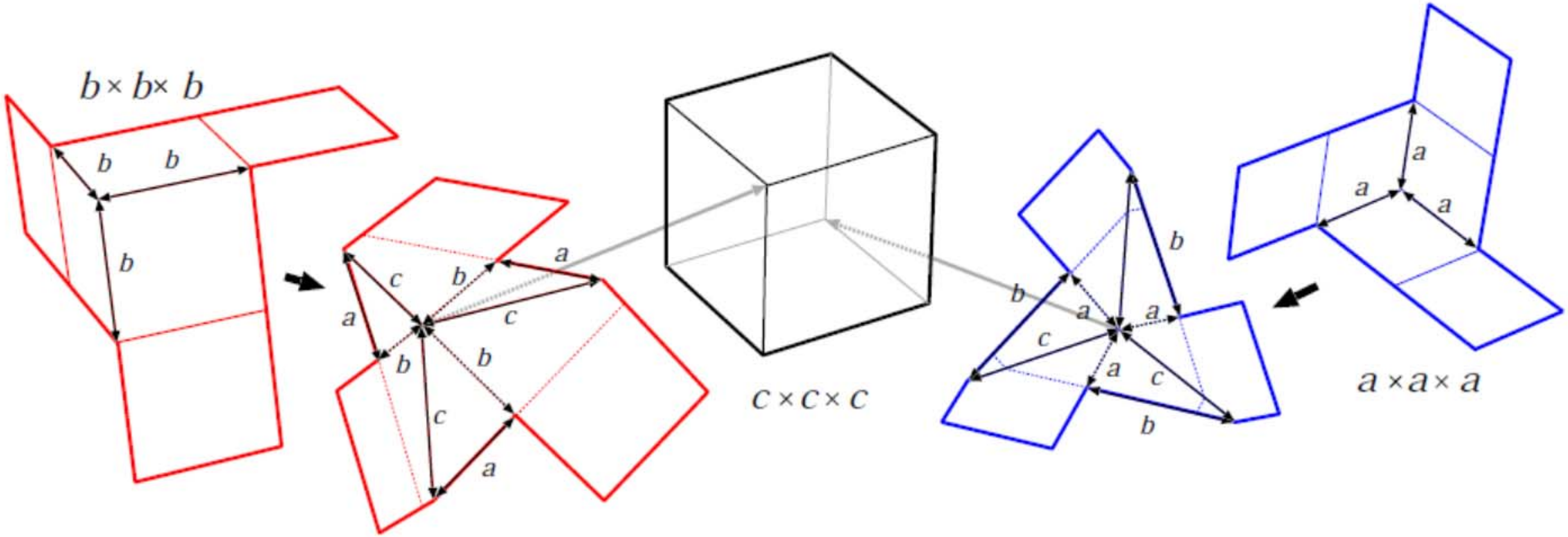


$5^2+12^2=13^2$の例

定理7 ピタゴラスの3角形

アイデア:

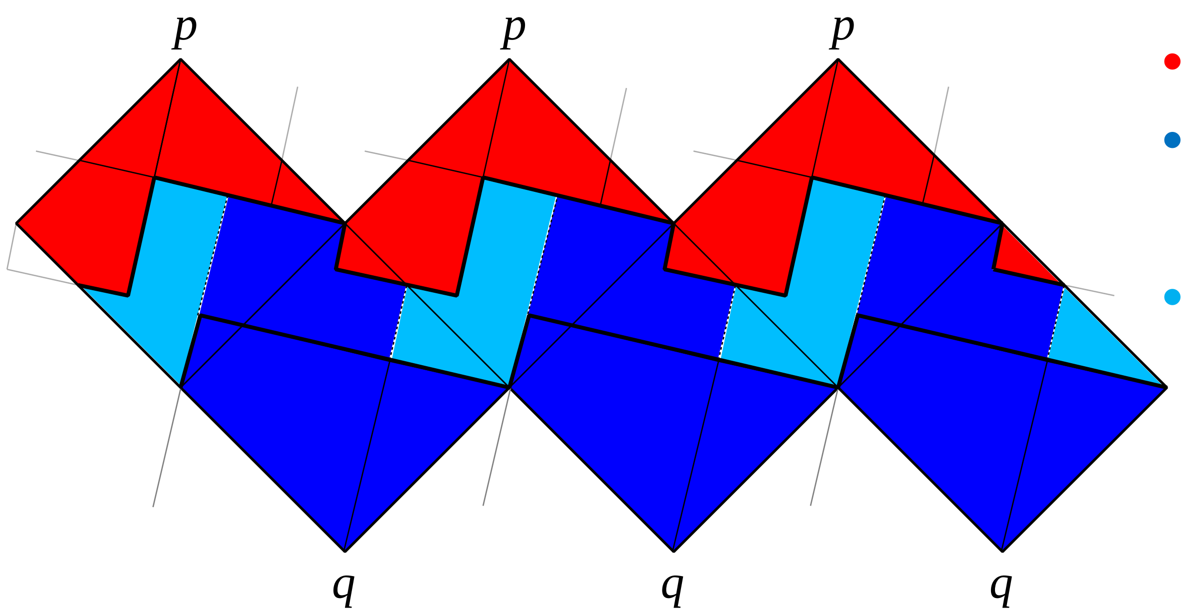
a×a×aの立方体とb×b×bの立方体を花状に開いて、c×c×cの立方体の相対する頂点に張り付けて、、、捩じる。



定理7 ピタゴラスの3角形

アイデア:

a×a×aの立方体とb×b×bの立方体を花状に開いて、c×c×cの立方体の相対する頂点に張り付けて、、、捩じる。



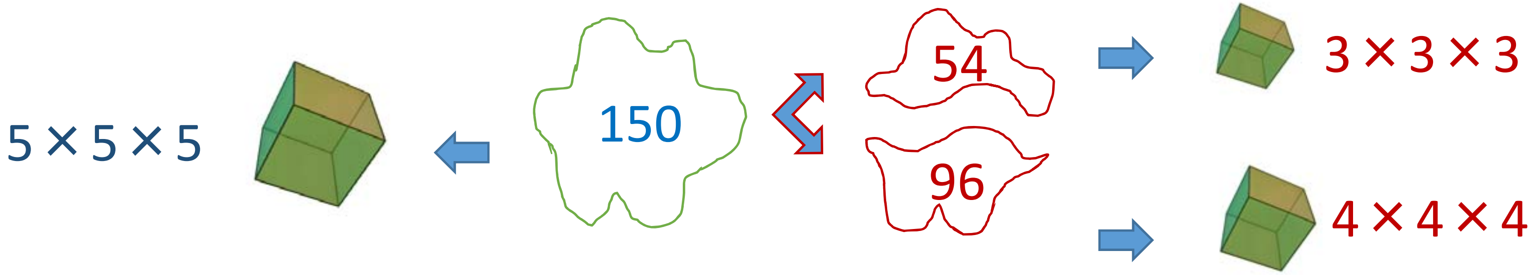
- a×a×aの方はそのまま貼る
- b×b×bの方を貼って重なった部分を除く
- 残ったベルト部分をあてはめると、なぜかうまくいく

未解決問題（1）

- 正則なレプキューブがある自然数とない自然数の分類
  1. 「ない」もの: 3, 6, ... (個々に議論することはできるが…?)
  2. 「ある」もの: すでに現物を見つけたもの（試行錯誤で増やせるけど…）
  3. 「あってもよい」もの：1,2に該当しないもの
- 特殊な正則レプキューブのさらなる研究
  - すべて同じ展開図（uniform)や，回転対称なもの
    - 11種類のそれぞれについて uniform なものが存在するか？
  - ひとつのレプキューブで分割パターンが複数通りあるもの
    - k=4に実例あり(7185は別々に数えている：ちょっと定義が曖昧)
  - 11種類の展開図がすべて含まれるもの；現在はk=25だが…
  - 前川淳さんの提案してくれた問題（パズル）：
    - 11種類の展開図のうち，2枚は裏返しても同じ（十字とT字）
    - それ以外の9種類を「表」「裏」と2枚ずつ用意すると，全部で20枚.
    - 面積は120なので，1辺の長さを2√5とすれば，できてもよい

未解決問題（2）

- 正則でないものは無限にあるが…
  - 違う面積のものを組み合わせる構成的な方法でより一般化できるもの？
  - 上原の予想：ある整数K以上なら，どんなk>Kでも次数kのRep-cubeがあるのでは？
  - 特殊な例：ピタゴラスの3角形はどうか？
    5ピースは減らせるか？特に2ピースにできないか？
    もしできないなら，その証明を…



発展課題

- もっともっと理論的な結果や性質は?
- 応用があるといいけれど … レクリエーション数学だけか?

2次元への一般化（？）

基本アイデア

もはやポリオミノではありませんが。。。

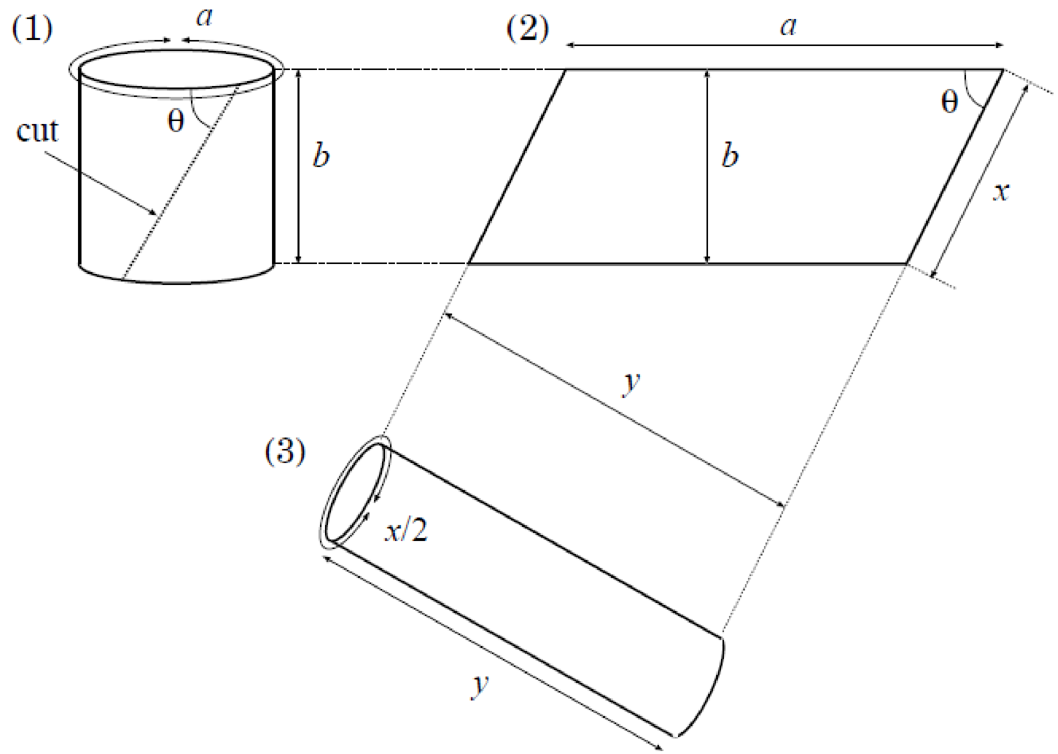
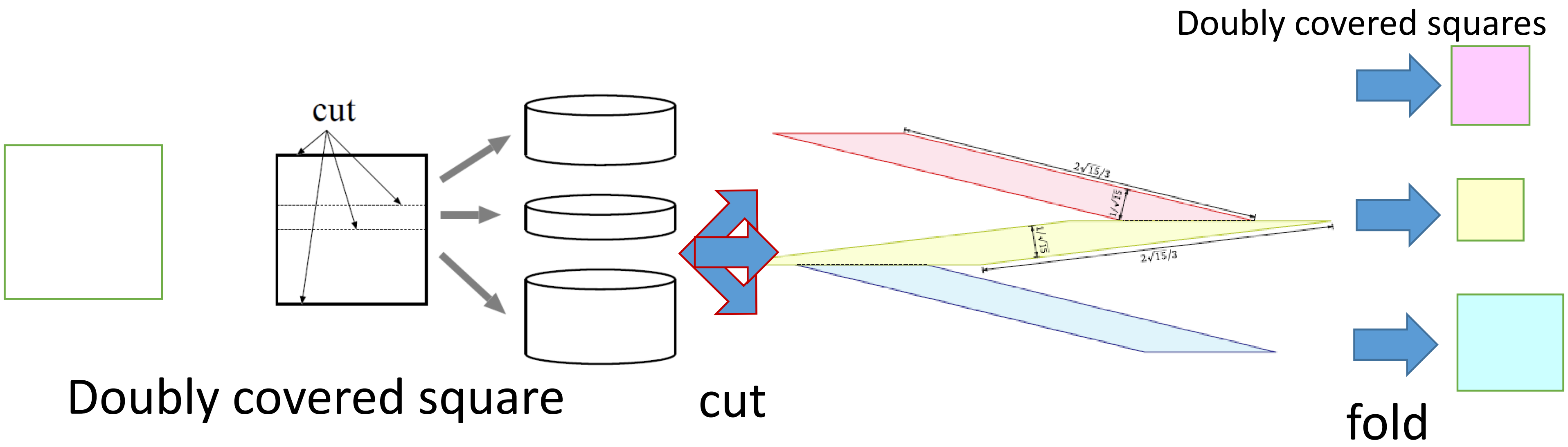


Fig. 6 (1) A cylinder of circumference a and height b, (2) a common development of two cylinders, (3) the other cylinder of circumference $x/2$ and height y.

2次元への一般化：2重被覆正方形

Thm 4 *For any positive real numbers* $A, a_1, a_2, \ldots, a_k$ *such that* $\Sigma_i\, a_i = A$, *there is a net of a doubly-covered square with area* A *that can be cut into* k *polygons with areas* $a_1, a_2, \ldots, a_k$, *each of which can be folded into a doubly-covered square.*



3次元立体への回帰:正4面体

Thm 5 *For any positive real numbers* A, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *such that* $\Sigma_i\, a_i = A$, *there is a net of a regular tetrahedron with area* A *that can be cut into* k *polygons with areas* $a_1, a_2, \ldots, a_k$, *each of which can be folded into a regular tetrahedron*.