本講義のトピック

その C：最新の成果たち

8. Rep-cube=Rep-tile + 展開図
9. <u>ペタル型の紙で折るピラミッド型</u>
10. ジッパー辺展開可能性

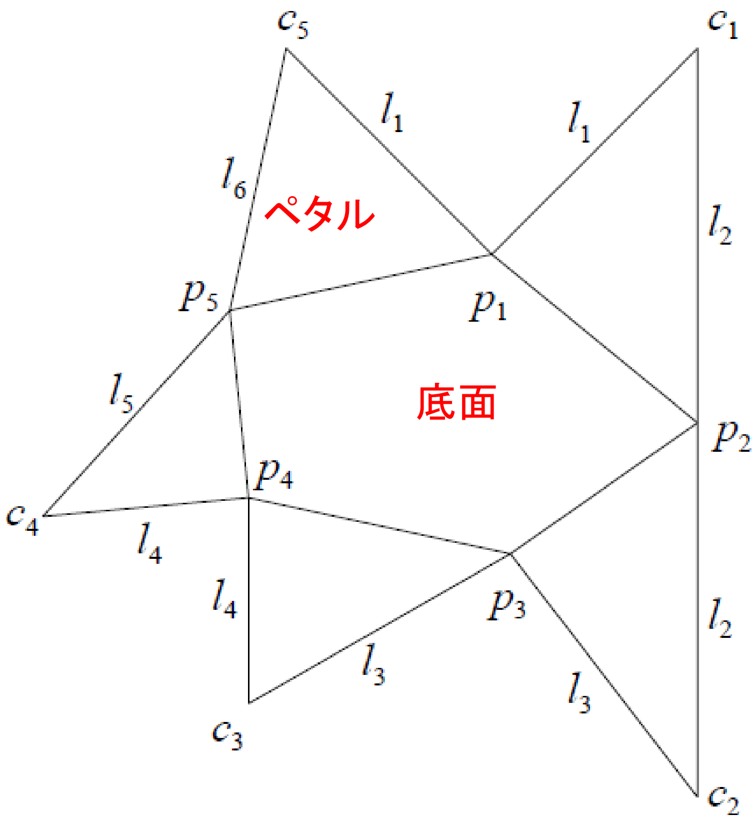
Bumpy Pyramid Folding

Zachary Abel (MIT)
Erik Demaine (MIT)
Martin Demaine (MIT)
Hiro Ito (Univ. of Electro-Communications)
Jack Snoeyink (The University of North Carolina)
Ryuhei Uehara (JAIST)

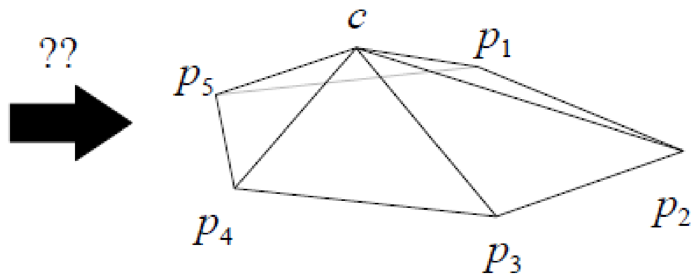
文献

Zachary Abel, Erik D. Demaine, Martin Demaine, Hiro Ito, Jack Snoeyink and Ryuhei Uehara：Bumpy Pyramid Folding, *The 26th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2014),* 2014/08/11-2014/08/13, Halifax, Canada.

Bumpy Pyramid Folding



計算幾何学
（計算折り紙）の問題



Background (1)

- ある日，パズル関係の知人から手紙が届く…
  1. 折り紙の問題１：
     入力：周囲にペタルのついた三角形
     出力：ここから三角錐が折れるか？
     結論：接着される辺同士の長さが合っていて，
     十分長ければ可能
  2. 折り紙の問題２：
     入力：周囲にペタルのついた４角形
     出力：ここから４角錐（ピラミッド）が折れるか？
     観測：一般に2通りの折り方があり、凸と凹になる…？

（一般化）ピラミッド問題

入力：周囲にペタルのついた凸n角形

問題1：ここからn角錐（ピラミッド）が折れるか？

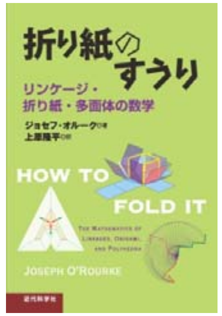
一般には「ならない」が、立体は折れることが多い

問題2：ピラミッドにならない場合，

- 問題2-1：凸多面体が折れるか？
- 問題2-2：体積最大の立体が折れるか？
- メタ問題2：二つの問題の解は違うのか？
- メタ^{2}問題2：二つの問題の解が同じになるのはどんなときか？

底面の三角形分割ごとに異なる凸凹な立体が折れる

Background (2)



- 「折り」と「展開」の問題
  - 1500年代に研究が始まったが，
    わかっていることは，あまりない
  - 近年，計算幾何学の有望なテーマ
- 最大の未解決問題（予想）：

どんな凸多面体も，辺に沿って切るだけで展開図に展開できる．ただし展開図とは，以下の条件を満たす多角形：
- 重なりを持たない（←これが難しい）
- 連結である

Background (2)

- 最大の未解決問題（予想）:

> どんな凸多面体も，辺に沿って切るだけで
> 展開図に展開できる．ただし展開図とは，
> 以下の条件を満たす多角形:
> - 重なりを持たない
> - 連結である

- ピラミッド問題は，凸多面体の展開の最初のステップの逆問題に見える…

既存の関連結果

1. Alexandrovの定理(1942)

幾何情報(距離情報と組合せ的な構造)が与えられたとき、「凸多面体の体積」は一意的に決まる。
⇒ほとんどの凸多面体は展開図と折り方が与えられるとユニークに決まる。

- 体積を求める多項式:Sabitov 1998.
- 構成的証明:Bobenko, Izmestiev 2008.
- 多項式時間アルゴリズム:Kane, et al. 2009.

  …実行時間は O($n^{456.5}$)

⇒今回の問題は特殊なケースの研究

今回の結果(1)

1. 折り紙の問題1：
   入力：周囲にペタルのついた三角形
   出力：ここから三角錐が折れるか？
   結論：接着される辺同士の長さが合っていて，
   十分長ければ可能

...Sabitov の多項式で計算した体積が正であればよい。

$$V^2 = \frac{1}{144}[l_1^2 l_5^2(l_2^2+l_3^2+l_4^2+l_6^2-l_1^2-l_5^2)+l_2^2 l_6^2(l_1^2+l_3^2+l_4^2+l_5^2-l_2^2-l_6^2)$$
$$+l_3^2 l_4^2(l_1^2+l_2^2+l_5^2+l_6^2-l_3^2-l_4^2)-l_1^2 l_2^2 l_4^2-l_2^2 l_3^2 l_5^2-l_1^2 l_3^2 l_6^2-l_4^2 l_5^2 l_6^2].$$

今回の結果(2)

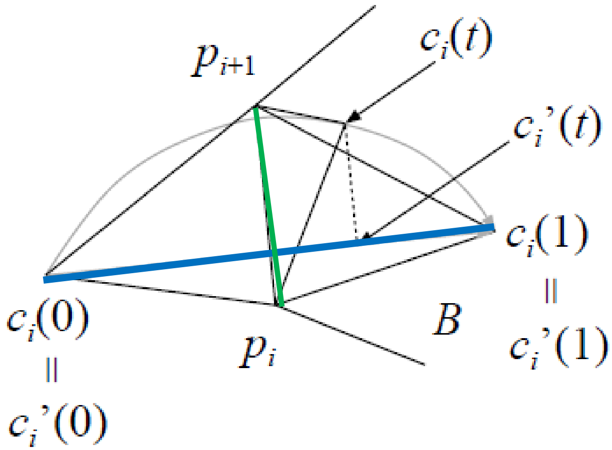
1. 折り紙の問題２：
   入力：周囲にペタルのついた４角形
   出力：ここから４角錐（ピラミッド）が折れるか？

- 底面の4角形を対角線で切ると二つの4面体を接着した立体ができる
  1. 2通りの切り方で体積が同じ: ピラミッドができる
  2. 体積が異なるなら、一方は凸で一方は凹
  3. (凸な方だけできることもある)

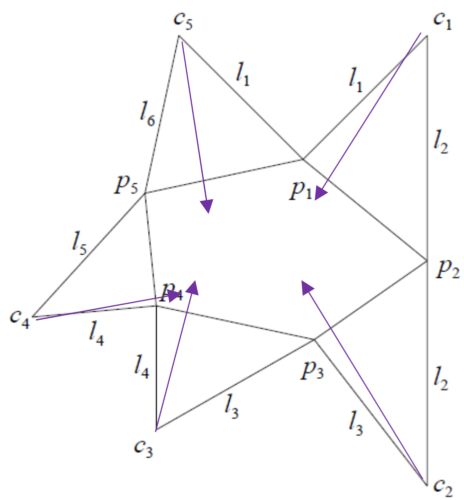
Sabitovの結果だけでは、ここから先は難しい…

重要なObservation

頂点を折り返すとき、
頂点の写像の軌跡は
底面の辺に対する垂線となる



⇒ピラミッドを折るときの頂点の
動きを上から見ると、
「軌跡」が計算できる



(一般化)ピラミッド問題:解(1)

入力:周囲にペタルのついたn角形

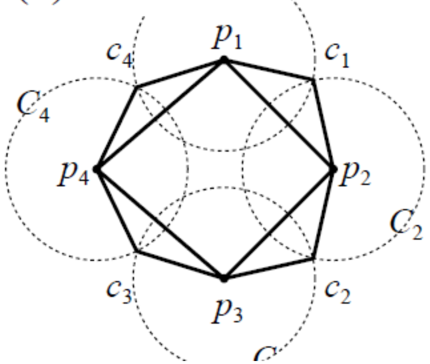
問題1:ここからn角錐(ピラミッド)が折れるか？

[解答] 各頂点からの垂線が1点で交わればよい！

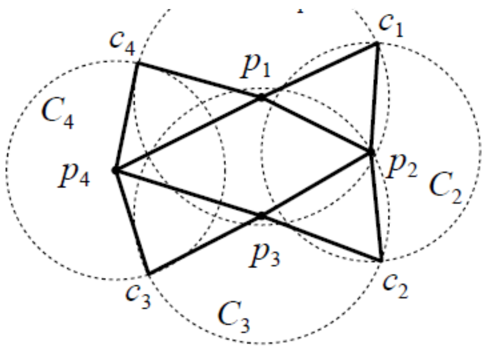
（＋頂点が十分な高さを持つことも必要）

線形時間で簡単に判定できる。

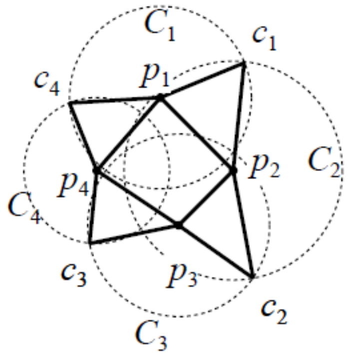
例: (1) できない



(2) 凸だけできる



(3) 凸と凹が両方できる



(一般化)ピラミッド問題:解(2)

入力：周囲にペタルのついたn角形

問題2：ピラミッドにならない場合，

問題2-1：凸多面体が折れるか？

問題2-2：体積最大の立体が折れるか？

[解] 多項式時間アルゴリズムがある。DPで$O(n^3)$

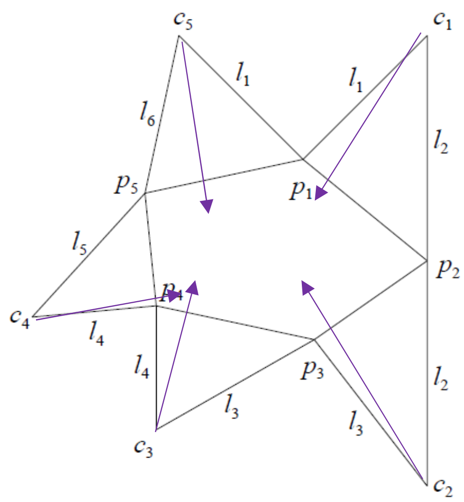
メタ問題2：二つの問題の解は違うのか？

[解] 一般に違う（凹＞凸がある）

メタ^{2}問題2：二つの問題の解が

同じになるのはどんなときか？

[未解決] わかりません…



(一般化)ピラミッド問題:解(3)

入力：周囲にペタルのついたn角形

問題2：ピラミッドにならない場合，

問題2-1：凸多面体が折れるか？

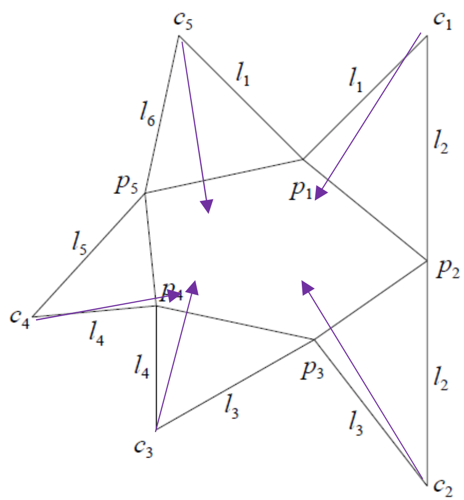
[定理] (ペタルが十分な長さがあるならば)

1. いつでも折れる
2. 折る手順（＝ペタルの接着順序）を線形時間で計算できる。

[証明の核となるアイデア]

折る手順は Power Diagram

(一般化Voronoi図)で計算できる！



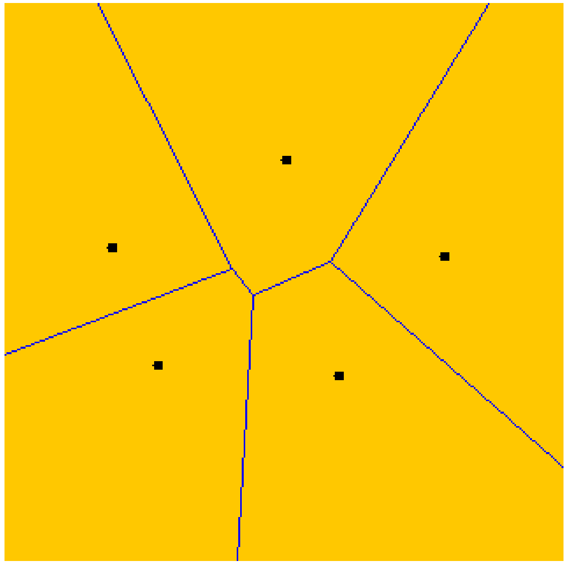
Power Diagram

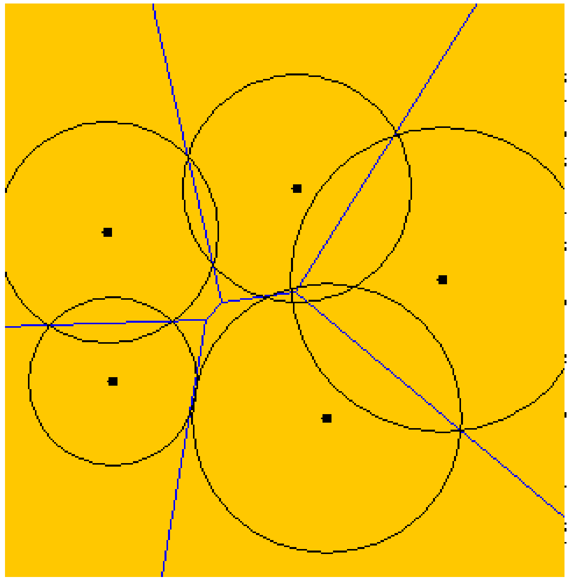
- Voronoi図では
  各点対間に垂直2等分線を引く

- Power Diagram では
  各頂点に「重み」がある

細かいけど重要な注意：点が凸に並んでいると、これらは「木」になり、閉路をもたない。

http://pages.cpsc.ucalgary.ca/~laneb/Power/





(一般化)ピラミッド問題:解(3)

入力：周囲にペタルのついたn角形

問題2：ピラミッドにならない場合，

問題2-1：凸多面体が折れるか？

[定理] 線形時間で折る手順を計算できる。

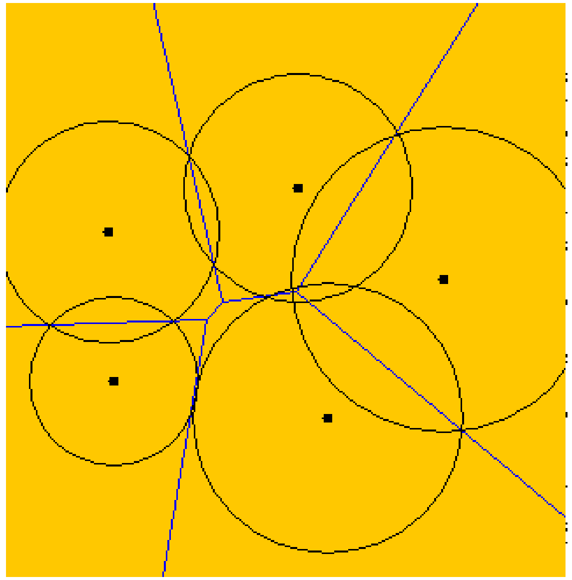
[証明の核となるアイデア]

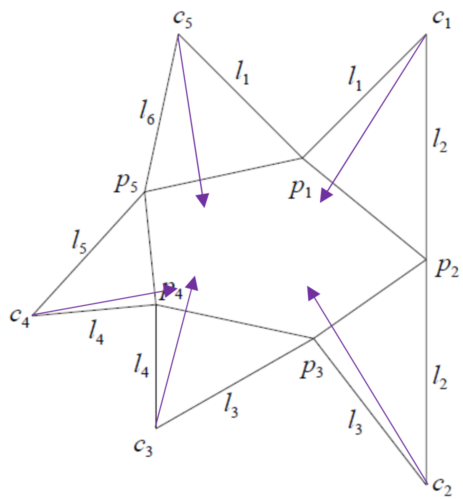
折る手順は Power Diagram で計算できる：

1. 底面の点 p_i が「点」
2. 付随する長さ l_i が「重み」
3. Power Diagram の線が頂点 c_i と

接着後にできる新たな頂点の軌跡を与える！

(Power Diagram の「木」に沿って貼ればよい)





まとめと課題

<u>（一般化）ピラミッド問題</u>

入力：周囲にペタルのついたn角形

問題1：ここからn角錐（ピラミッド）が折れるか？ OK!

問題2：ピラミッドにならない場合，

- 問題2-1：凸多面体が折れるか？ Good!
- 問題2-2：体積最大の立体が折れるか？ So so (改善の余地？)
- メタ問題2：二つの問題の解は違うのか？
- メタ^{2}問題2：二つの問題の解が同じになるのはどんなときか？

$O(n^3)$??

底面が凸n角形であることを使ってない

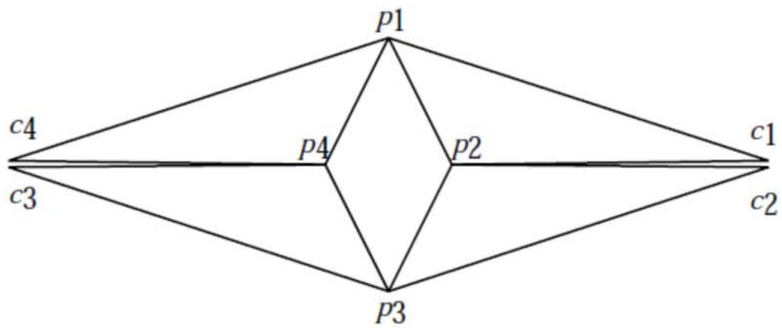
未解決問題

頂点が底面からはみ出さなければ凸が最大になりそうな気がするけれど…

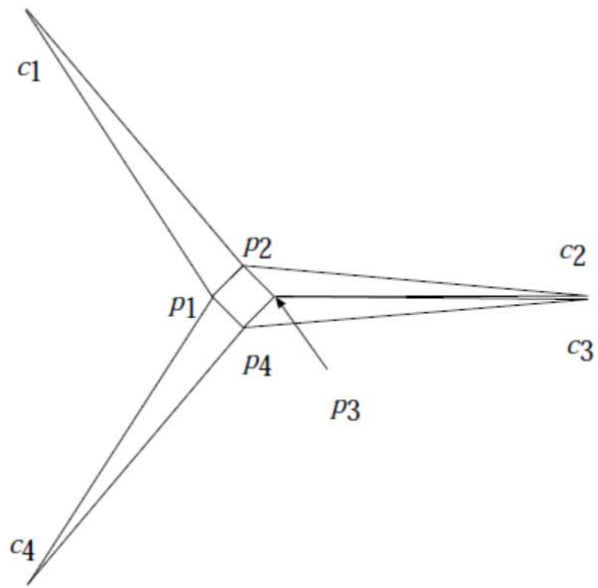
演習課題

<u>（一般化）ピラミッド問題</u>

- 二つの問題の解が同じになるのはどんなときか？
- 二つの問題が違う答えになる例をもっと見つける



(1)



(2)