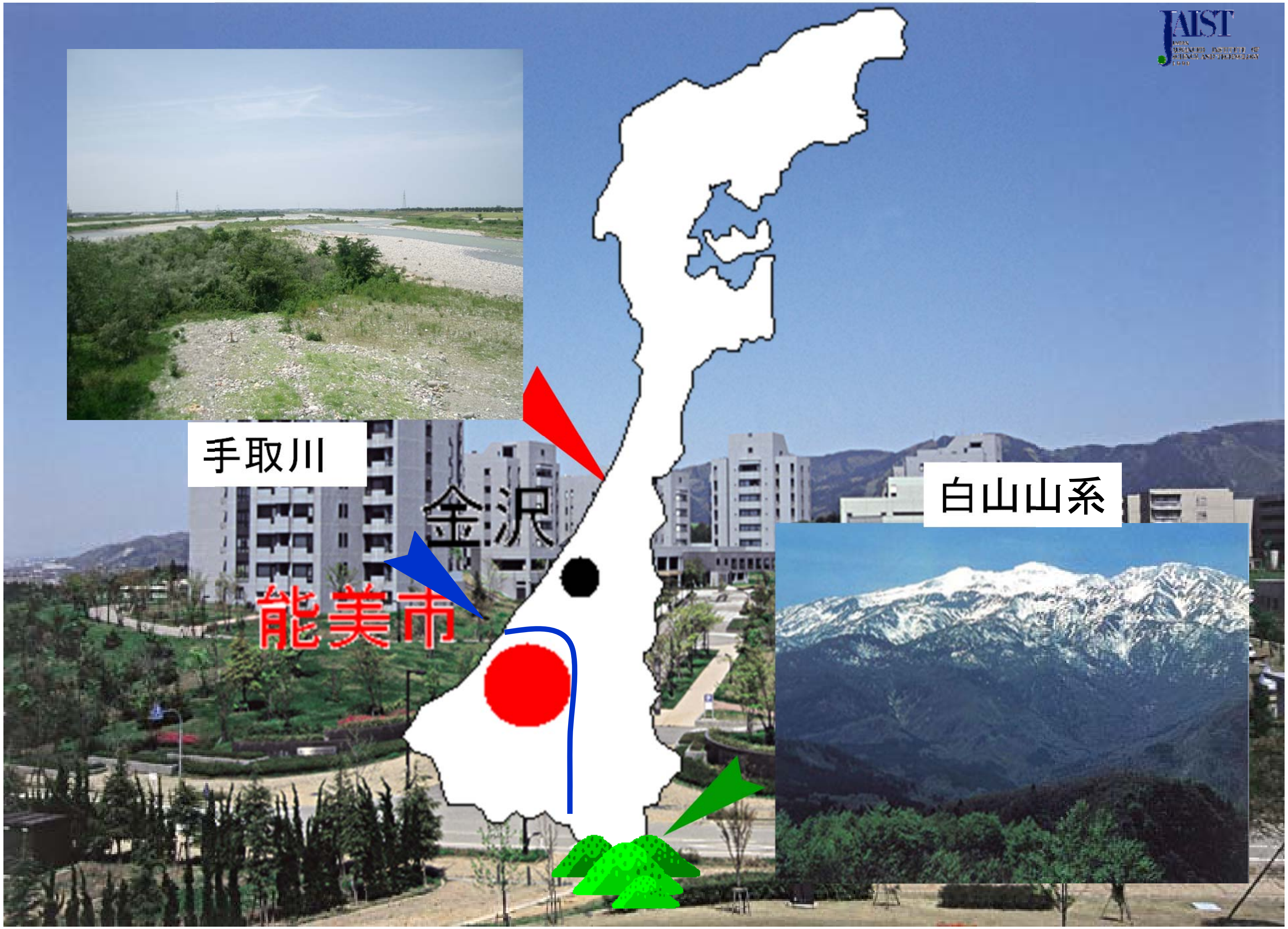
計算折り紙の最前線

上原　隆平

北陸先端科学技術大学院大学

情報科学系　教授

uehara@jaist.ac.jp


手取川
金沢
能美市
白山山系

JAISTの特徴（上原私見）

大学院大学なので、学部がない

- 研究に強い大学院（教員が研究をする時間が比較的ある）
  - スパコンが4台あって自由に使える
  - ネットワーク回線が**太い**
  - 図書館は365日24時間開いてる
- 4セメスター制：授業は2カ月単位で進む（週に2回×15回）
- 学生と教員の「距離」が近い（教職員は400人くらいで学生数は1000人くらい）

所属:

北陸先端科学技術大学院大学

情報科学系　教授

DBLP情報:

エルデシュ数＝2
(Pavol Hell氏と共著)

JAIST ギャラリーの...

今日，ここにいる理由

専門分野:理論計算機科学

- アルゴリズム
  - 特にグラフアルゴリズム
- 計算量
  - 特にパズル/ゲームの計算量
- 計算幾何学
  - 特に計算折り紙

refine by author

Ryuhei Uehara (158)
Erik D. Demaine (39)
Takeaki Uno (27)
Yota Otachi (27)
Yushi Uno (26)
Martin L. Demaine (22)
Toshiki Saitoh (19)
Takehiro Ito (17)
Yoshio Okamoto (16)
Takashi Horiyama (13)
127 more options

refine by venue

CCCG (18)
ISAAC (14)
WALCOM (12)
Theor. Comput. Sci. (12)
CoRR (11)
IEICE Transactions (9)
TAMC (7)
Bulletin of the EATCS (6)
FUN (4)
Discrete Applied Mathematics (4)
37 more options

計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- 折り紙(ORIGAMI)
  - 1500年代，おそらく紙の普及とともに自然発生的に…?アジアで…
  - 現在，ORIGAMI はすでに英語化していて，書店にも ORIGAMI コーナーがある.
  - 折り紙っぽいものも…

「折ってない」「紙じゃない」Origami も増えてきた… おそらくNSFのビッグファンドのせいだと思ってますが…?

計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- 折り紙の急激な発展
  - 1980年代~1990年代，折り紙が急速に複雑化した.

前川の「悪魔」
1980年頃発表
（正方形1枚から
折れる！）

川崎ローズ
1985年頃発表
（正方形1枚
から折れる！）

Robert Lang のハト時計
1987年頃発表
（1×10の長さの長方形の紙
1枚から折れる！）

計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- コンピュータの利用と折り紙への応用
  - 1990年代以降，コンピュータを用いた折り紙デザインが発展

2016年、
シン･ゴジラと
Death Note の
両方に登場!!

2017年、
「正解するカド」に
ちょっと登場!!

Robert Lang のハト時計
1987年頃発表
（1×10の長さの長方形の紙
1枚から折れる！）

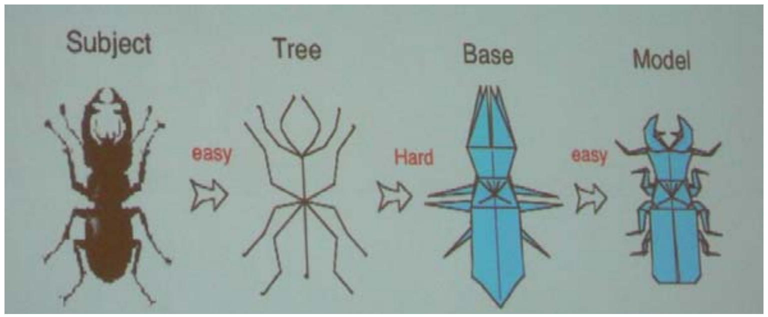
舘知宏のOrigamizer
2007年発表
（長方形の紙1枚から
10時間くらいで折れる）

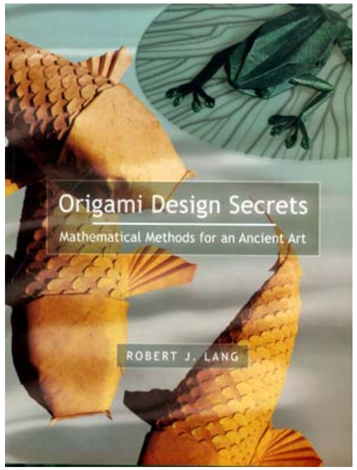
三谷純の回転対称な折り紙
2010年頃発表
（長方形の紙1枚から折れる）

折り紙とコンピュータサイエンス

- 近年、むしろ海外で脚光をあびている
- 方法論の確立とソフトウェアの開発：
  - 1980年代：前川さんの「悪魔」
    - CAD的に「パーツ」を組み合わせる
      コンプレックス折り紙の発祥
  - 2000年代：Lang さんの TreeMaker
    - 与えられた「木構造」（距離つき）
      を正方形上に展開するソフト
    - さまざまな最適化問題を
      現実的な時間で計算

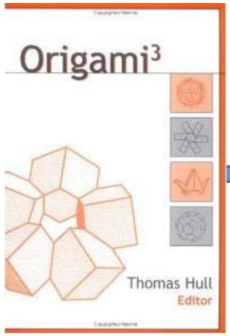
NP完全問題も
解いている

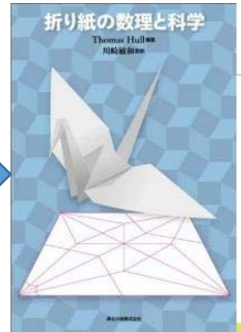


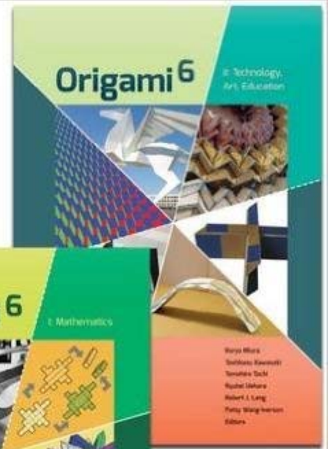


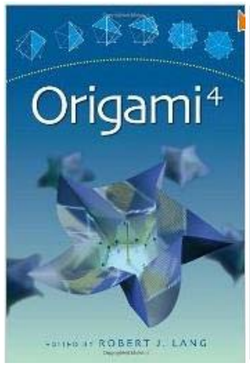
折り紙の科学に特化した国際会議

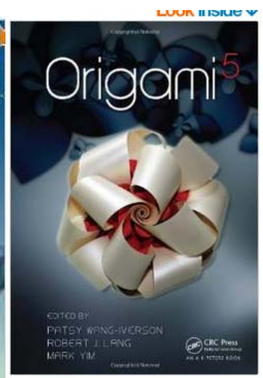
1. 1989年12月@ Italy
   The International meeting of Origami Science and Technology
2. 1994年@滋賀県大津
3. 2001年3月@アメリカ
   The International meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (3OSME)
4. 2006年9月8日-10日@アメリカ
   4OSME
5. 2010年7月13日-17日@ シンガポール
   5OSME
6. 2014年8月10日-13日@東大
   6OSME
7. 2018年9月5日-7日: 7OSME@Oxford, UK!

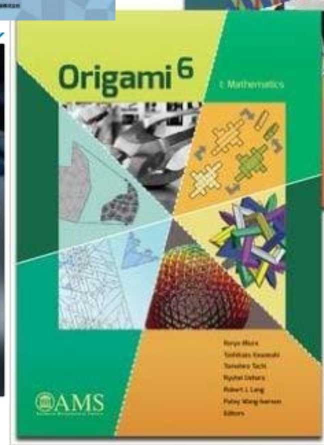












計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- “Computational Origami”の提案

  1990年代~

  計算幾何学の分野で「計算幾何」や「最適化問題」として「折り」の問題をとらえ始める

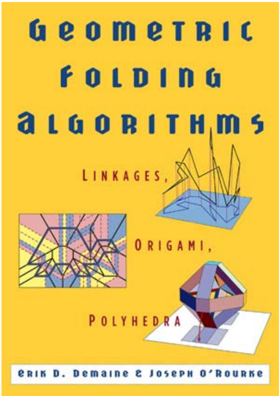
  この分野の超著名な研究者 : Erik D. Demaine

  - 1981年生まれ
  - 20歳でカナダで博士号を取得し，
    そのままMITの教員になり，現在に至る
  - 彼の博士論文のテーマが計算折り紙であった.

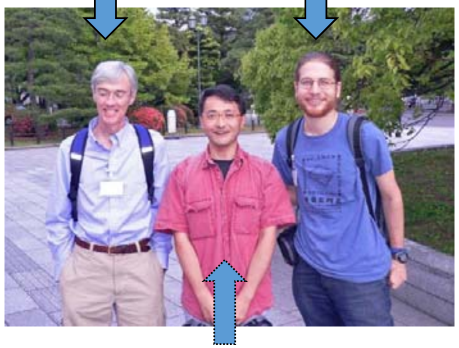
計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- 文献紹介

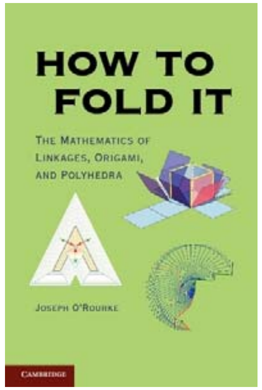
Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra
by J. O’Rourke and E. D. Demaine, 2007.



Authors



I, translated it to Japanese (2009).



2011

2012

本講義のトピック

その１：展開図とそこから折れる凸立体の研究

- 展開図と立体のとても悩ましい関係：最大の未解決問題
- 与えられた「展開図」を折って作れる（凸）「立体」をどうやって計算するか？
  - 数学的な特徴づけ/アルゴリズム/計算パワー

計算幾何

その２：「折り」のアルゴリズムと計算量の関係

- 折り紙の基本操作
- 折り紙のアルゴリズムと計算量
  - １次元の紙における効率のよい折り方（アルゴリズムと計算量）
    - 高速に折るアルゴリズム（折る回数を減らせるか？）
    - 「良い折り畳み状態」を評価する指標のモデル
  - １次元の紙における計算不能性（計算の理論）
    - 計算モデル

アルゴリズム
計算量理論
(計算理論)

未解決問題が多くて、若手の活躍がめざましい分野

今日の予定

1. 展開図の基礎的な知識
2. 複数の箱が折れる共通の展開図
3. 正多面体の共通の展開図

（辺）展開図とは？

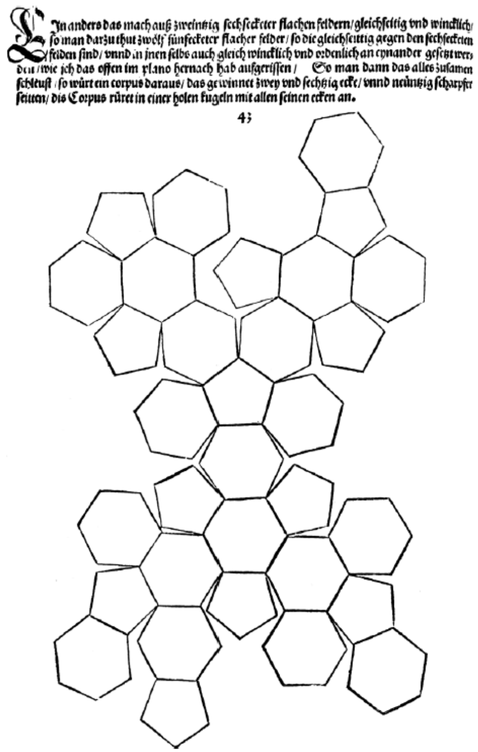
- （一般）展開図：多面体の表面を切って平面上に広げた多角形
  - 連結であること
  - 重なりを持たない単純多角形であること（便宜上、直線の集まりとする）

- （辺）展開図：多面体の辺に沿って切り広げた多角形
  - 展開の境界部分は多面体の辺からなる

★今日は「展開図」といえば一般の展開図という意味なので注意

展開図の簡単な歴史

- アルブレフト･デューラーの『画家マニュアル』(1525)



- 数多くの立体を辺展開図で記述していた
- どうも以下の成立を予想していた…?

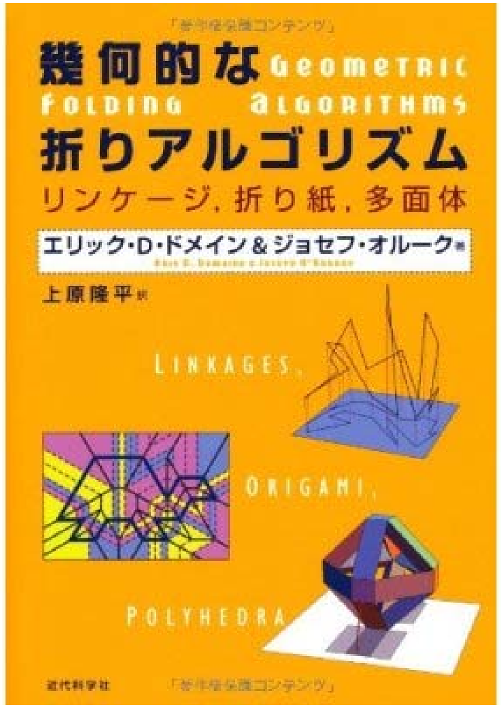
未解決予想:
任意の凸多面体は辺展開図を持つ

展開図の簡単な歴史

未解決予想:
任意の凸多面体は辺展開図を持つ

(今日はやらない)未解決予想の周辺の結果:

- 反例らしいものすら見つかっていない(当然？)
- 凹多面体なら反例がある
  (どんな辺展開も重なってしまう)
- 辺展開でなく一般展開なら可能
  (一般の点から各頂点に最短路を描いて切るという方法)
- ランダムな凸多面体をランダムに展開すると
  実験的にはほぼ確率1で重なってしまう



もし興味があれば…

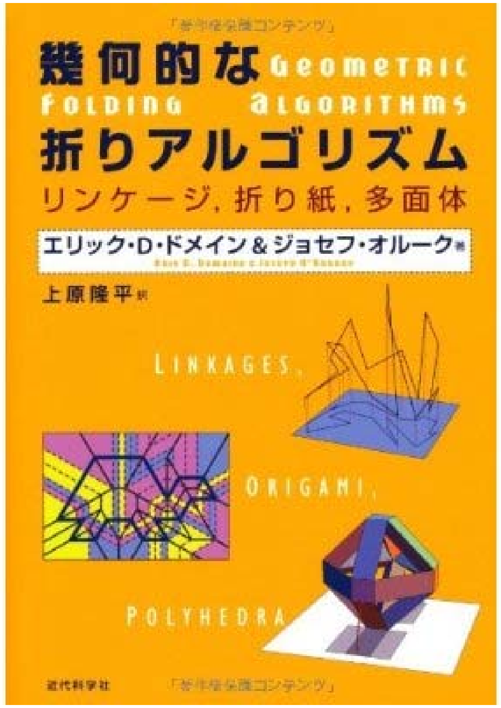
まとめ: <u>展開図に関してわかっていることは、ほとんどない</u>

展開図の簡単な歴史

未解決予想:
任意の凸多面体は辺展開図を持つ

まとめ:展開図に関してわかっていることは、
ほとんどない

本研究の興味の対象:
- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる(凸)多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- (凸)多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム



もし興味があれば…

展開図の簡単な歴史

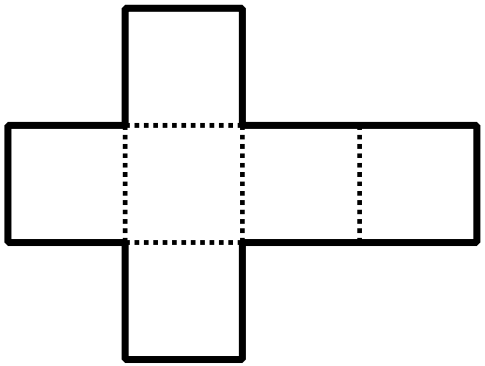
ポイント：展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

本研究の興味の対象：

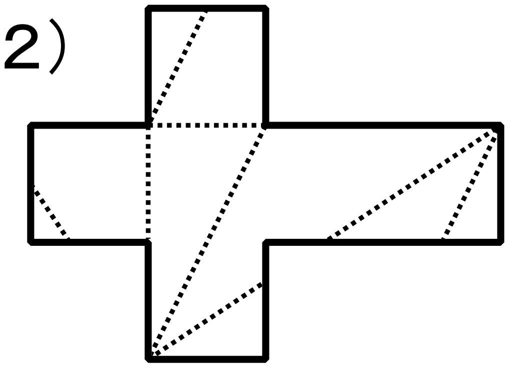
- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる（凸）多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- （凸）多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム

演習問題：何が折れるでしょう？

（1）



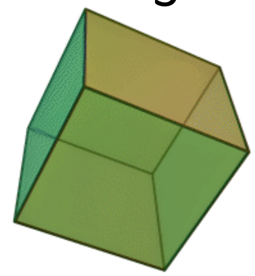
（2）



ちなみにこの「ラテンクロス」からは85通りで23種類の異なる凸多面体が折れることが知られている.

1. 展開図の基礎知識(1)

S

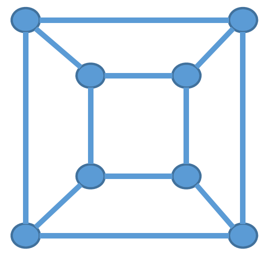


凸多面体Sの頂点と辺から構成されるグラフをGとする

[全域木定理(その1)]
Sの辺展開におけるカットラインは、G上の全域木である

系:正多面体では、すべての辺展開においてカットの長さは同じ

G

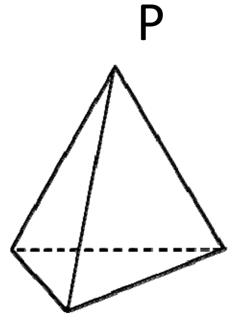


[証明]

- すべての点を訪れること:
  カットされない頂点があると、平坦に開けない
- 閉路をもたないこと:
  閉路があると、展開図がばらばらになってしまうため、連結にならない

[全域木定理(その2)]
Sの一般展開におけるカットラインは、S上ですべての頂点を張る木である

1. 展開図の基礎知識(2)

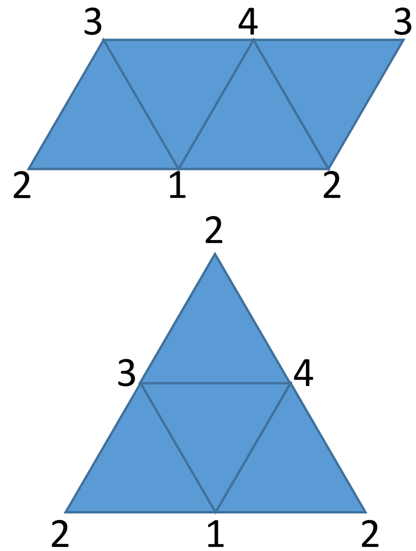


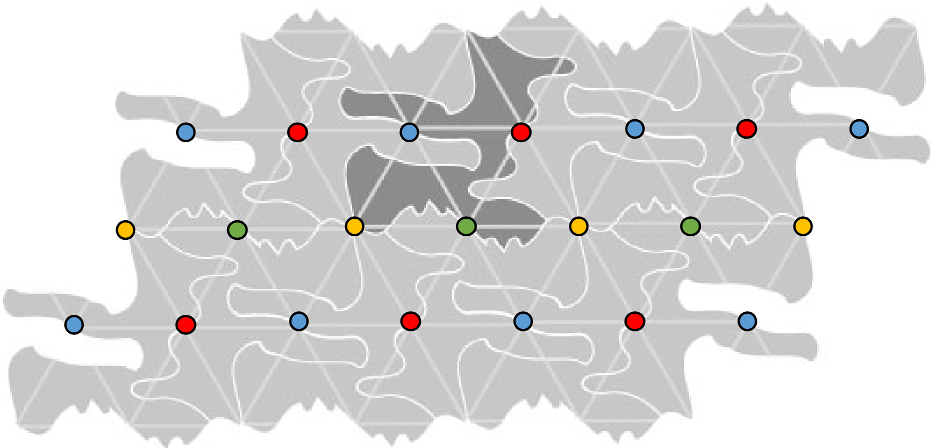
正4面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

[正4面体の展開図定理(秋山 2007)]
正4面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。

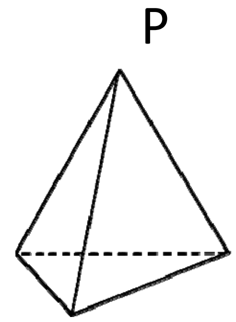
(1) **P** は **p2 タイリング。**つまり180°回転で敷詰め可能
(2) **回転中心**の **4** 頂点が正三角格子をなす
(3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

参考：正4面体の辺展開図は二種





1. 展開図の基礎知識(2)



正4面体の（一般）展開図に関する特徴づけ

[正4面体の展開図定理(秋山 2007)]
正4面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。
(1) **P** は **p2 タイリング。**つまり180°回転で敷詰め可能
(2) **回転中心**の **4** 頂点が正三角格子をなす
(3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

Tile-Makers and Semi-Tile Makers, Jin Akiyama, *The Mathematical Association of America*, Monthly 114, pp. 602-609, 2007.

[直感的な説明]
平面上で正４面体を４回、
上手に転がすと、元に戻る。
各面にインクをつけて転がすと
平面全体にスタンプを押せる。

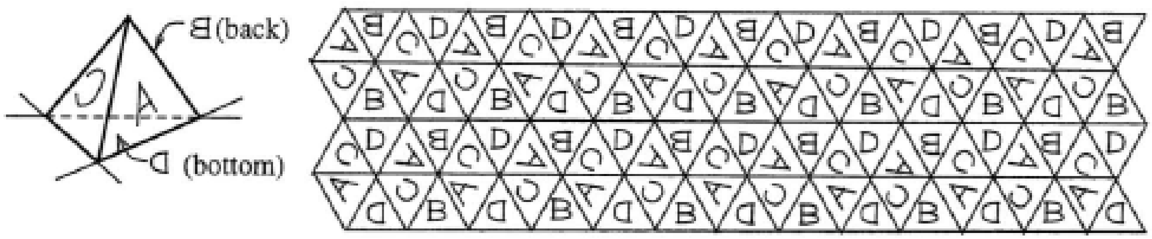
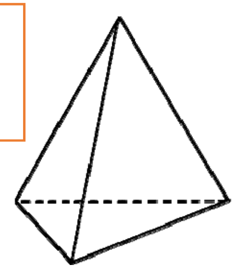


Figure 2.1. Carved regular tetrahedron R and the tiling by stamping with *R*.

1. 展開図の基礎知識(3)

4単面体(Tetramonohedron)：
4つの面が合同な4面体

P



4単面体の（一般）展開図に関する特徴づけ

[4単面体の展開図定理(秋山、奈良 2007)]
4単面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。

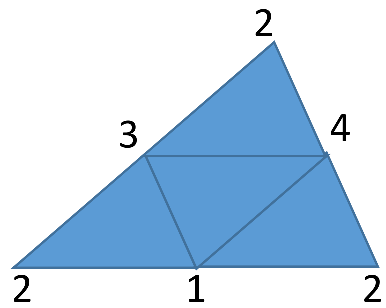
(1) **P** は **p2 タイリング。**つまり180°回転で敷詰め可能

(2) **回転中心**の **4** 頂点が その単面による三角格子をなす

(3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

[直感的な説明]
正三角形格子を全体にゆがませればよい。

演習：どんな鋭角3角形からも4単面体が折れることを示せ



1. 展開図の基礎知識：演習問題

1. 立方体の辺展開図を一つ選び、どのくらい多くの凸立体が折れるか、試してみよう。何かわかることはあるか？
2. どんな鋭角3角形からでも4単面体が折れることを示せ。どんな3角形でもタイリングできるが、それとの関係はどうか？鈍角3角形ではどうなるか？どんな4角形でも（凸でなくても！）タイリングできるが、これから立体は折れるか？折れないとすればなぜか？
3. 正多面体の一般展開図の最短カットの長さは？
   - 正4面体にはわりと美しい最適解があります
     - 最適解とその証明ができればなおよし
   - 正8面体と正6面体
     - 最適解を見つけるのは、なんとかなると思う
     - 最適性を示すのは、手間がかかります
   - 正20面体と正12面体
     - 最適解を見つけるのもちょっと大変かも