今日の予定

1. 展開図の基礎的な知識
2. 複数の箱が折れる共通の展開図
3. 正多面体の共通の展開図

4. <u>正多面体に近い立体と正４面体の共通の展開図(予備)</u>

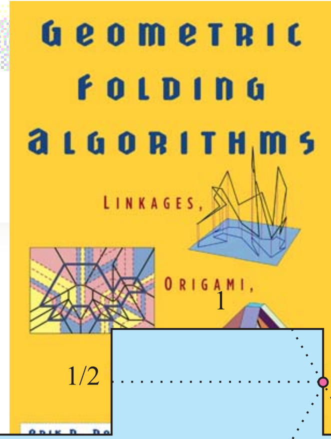
正四面体が折れる
ジョンソン・ザルガラー立体の
辺展開図について

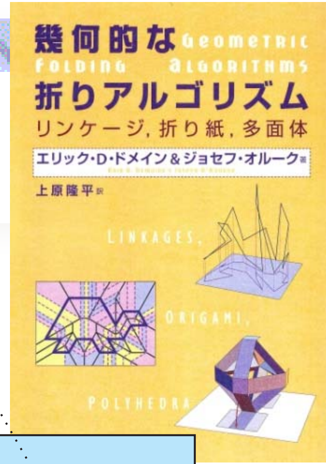
文献情報:

Yoshiaki Araki, Takashi Horiyama, and Ryuhei Uehara:
Common Unfolding of Regular Tetrahedron and Johnson-Zalgaller Solid, Journal of Graph Algorithms and Applications, Vol.20, no.1, pp.101-114, February, 2016.

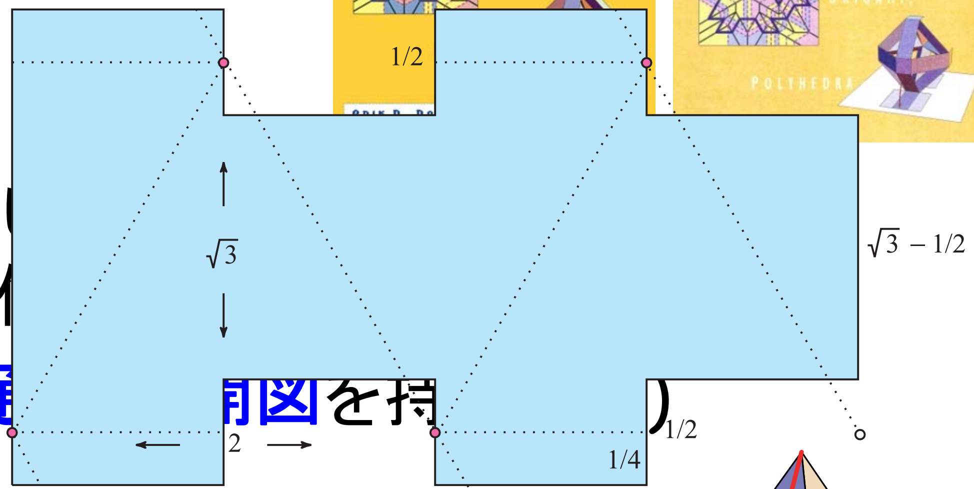
Open Problem 25.6

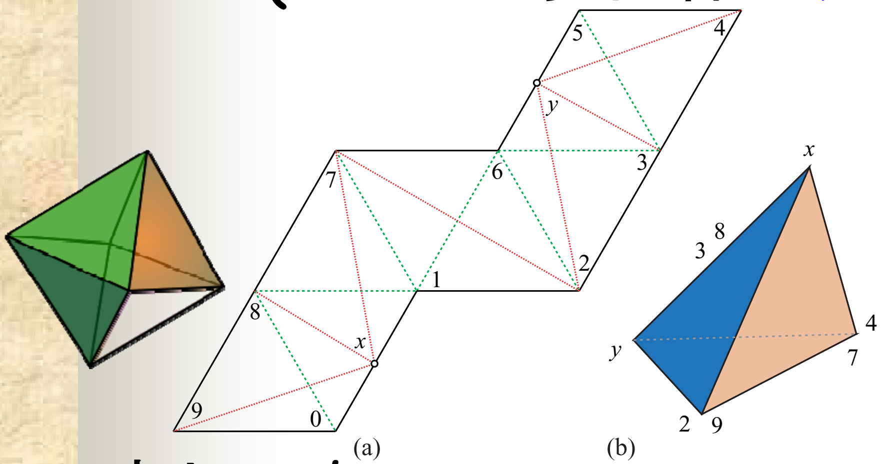
(by M. Demaine, F. Hurtado, E. Pegg)





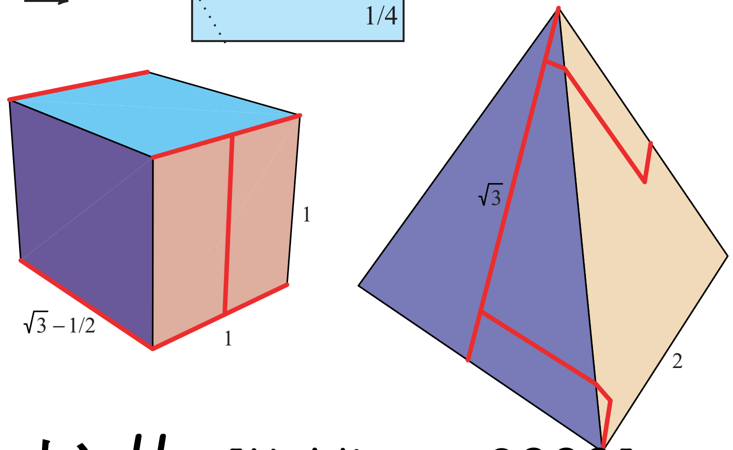
- ある正多面体を切り開い
  そこから異なる正多面体
  (2つの正多面体が共通 開図を持)





おしい！

Regular Octahedron
⇔ Tetramonohedron (面が合同)



おしい !! [K. Hirata 2000]

Regular Tetrahedron
⇔ Box 1 x 1 x 1.232

共通の展開図

あたりまえ？

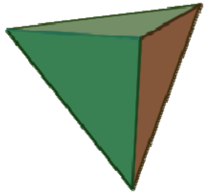
立方体の辺展開: 11種類

正8面体の辺展開: 11種類

- Theorem [Horiyama, Uehara 2010]

  以下を同時に満たす多角形 P は、存在しない

  (1) P は、正四面体の一般展開

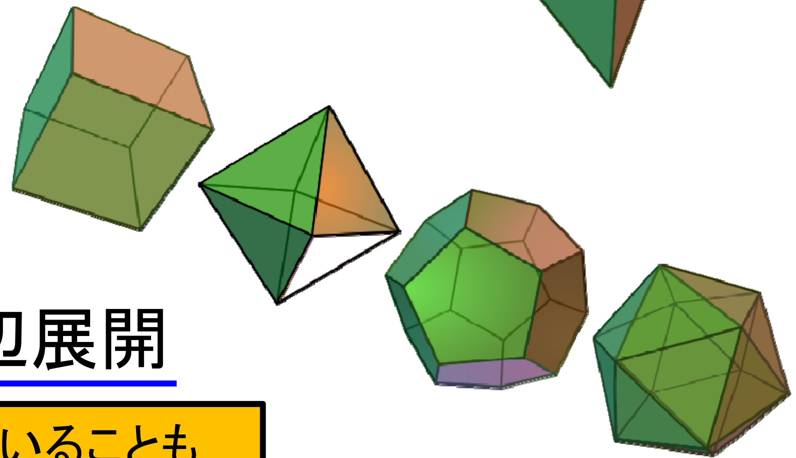
  

  (2) P は、立方体,

  正八面体,

  正十二面体,

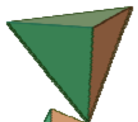
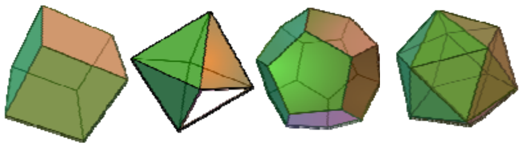
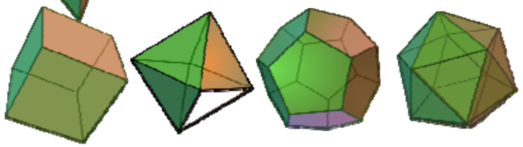
  or 正二十面体 の辺展開

正12面体の辺展開: 43380種類

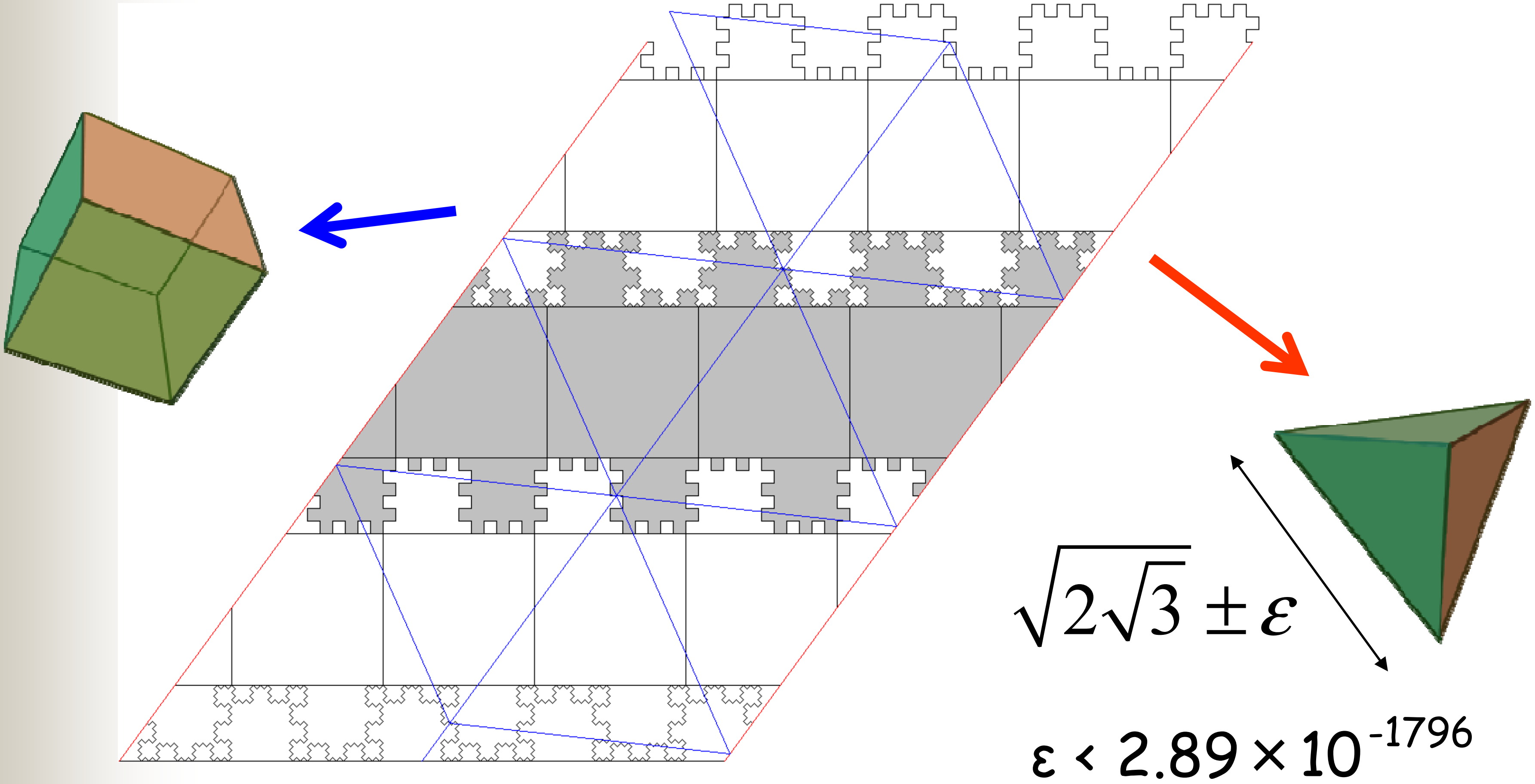
正20面体の辺展開: 43380種類

本当に展開図になっていることも
[Hiroyama, Shoji 2011]が初出！

- Open
  -  一般展開 v.s.  一般展開
  -  の一般展開 同士

共通の展開図

- 正四面体 v.s. 立方体 [Shirakawa, Horiyama, Uehara 2011]

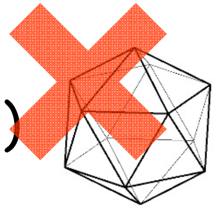


Our Results

- 正四面体 (一般展開)
  v.s.　整面凸多面体 (辺展開)

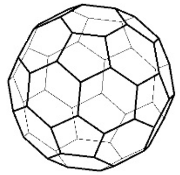
・各面が正多角形
・凸多面体

  - 正多面体 (面が 1 種類、uniform)

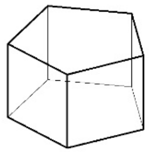


[Horiyama, Uehara 2010]

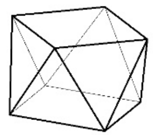
  - 半正多面体 (面が2種類以上、uniform)



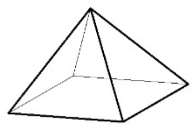
  - 正 n 角柱 (上下が正 n 角形、側面が正方形)

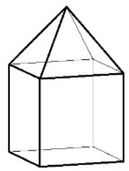


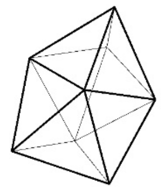
  - 正 n 反角柱 (上下が正 n 角形、側面が正三角形)



  - ジョンソン・ザルガラー多面体





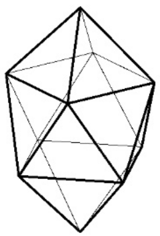


Our Results

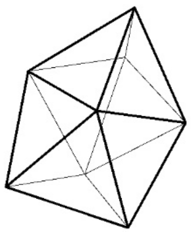
- 正四面体 (一般展開)
  v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

・各面が正多角形
・凸多面体

- ジョンソン・ザルガラー多面体：全 92種類
  - J17 (Gyroelongated square dipyramid)



  - J84 (Snub disphenoid)



共通の展開図あり

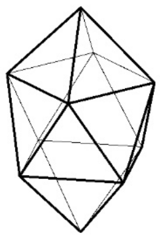
- 半正多面体、正n角柱、正n反角柱、
  その他JZ多面体 90種類：　　共通の展開図なし

Our Results

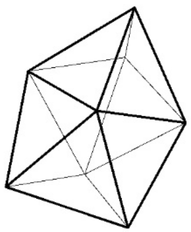
- 正四面体 (一般展開)
  v.s.　整面凸多面体 (辺展開)

・各面が正多角形
・凸多面体

- ジョンソン・ザルガラー多面体：全 92種類



  - J17 (Gyroelongated square dipyramid)　辺展開 13,014 個
    - 78個：1通りの折り方
    - 8個：2通りの折り方
    - 1個：3通りの折り方

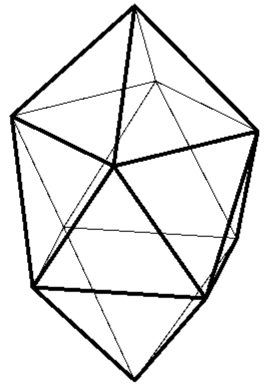


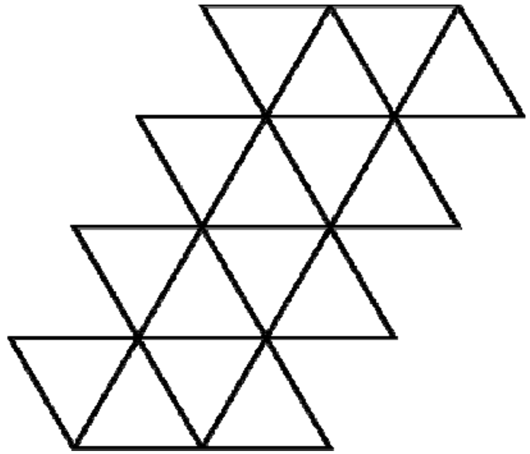
  - J84 (Snub disphenoid)　辺展開 1,109 個
    - 32個：1通りの折り方
    - 5個：2通りの折り方

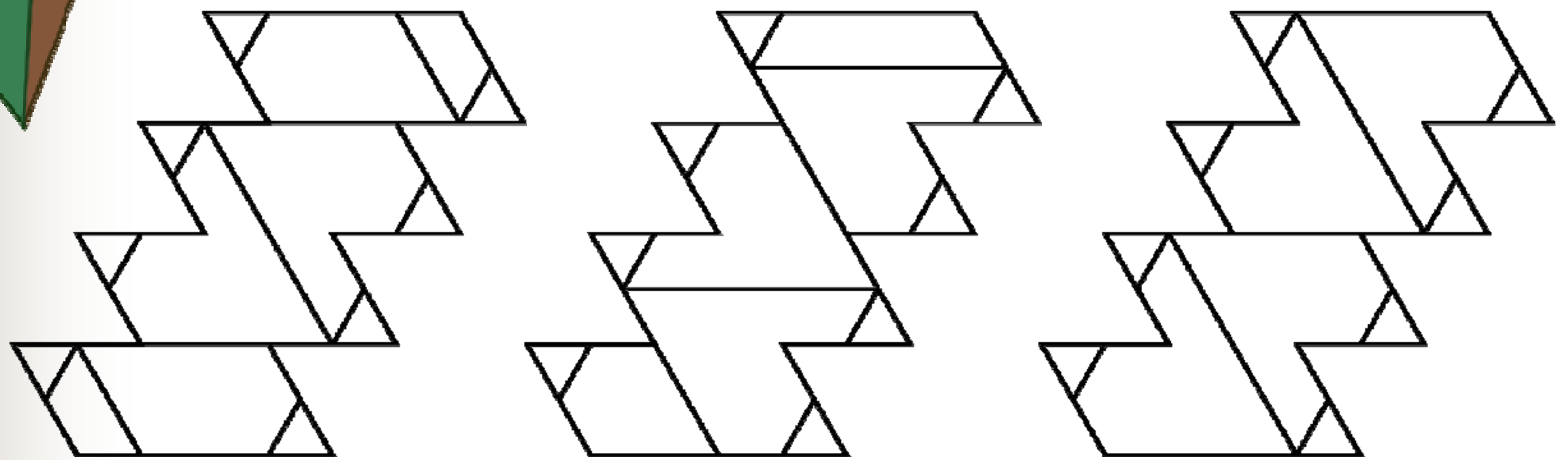
- 半正多面体、正n角柱、正n反角柱、
  その他JZ多面体 90種類：　共通の展開図なし

Our Results

- J17 (Gyroelongated square dipyramid)

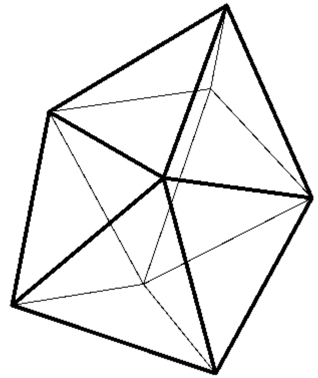


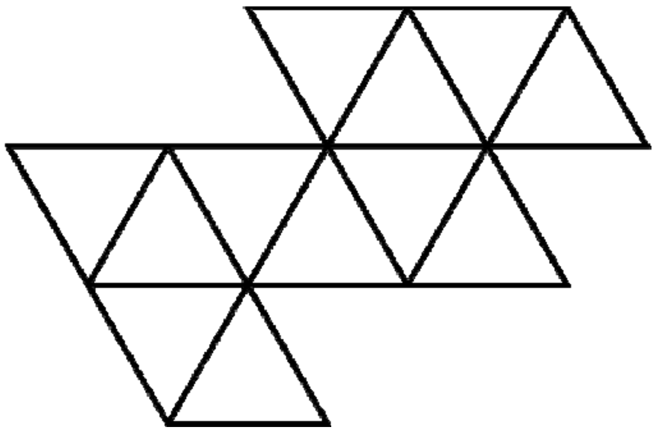


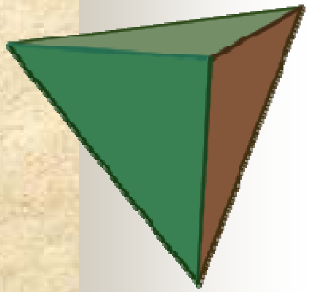


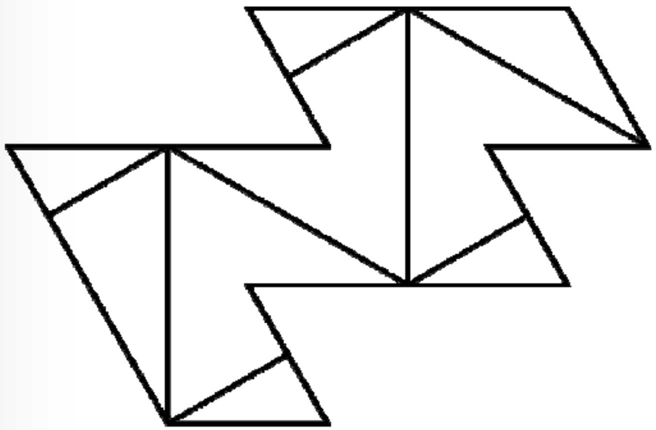
Our Results

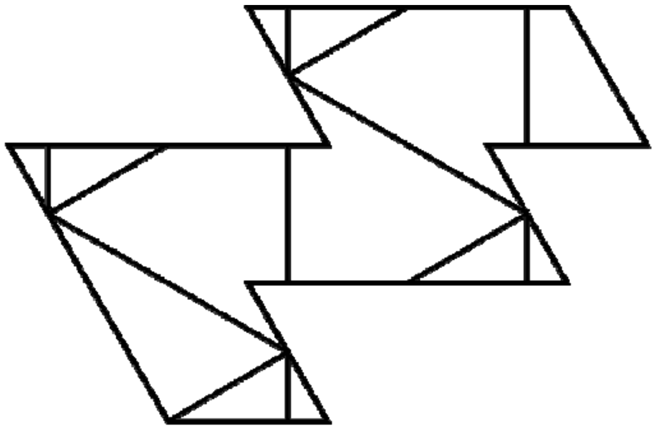
- J84 (Snub disphenoid)











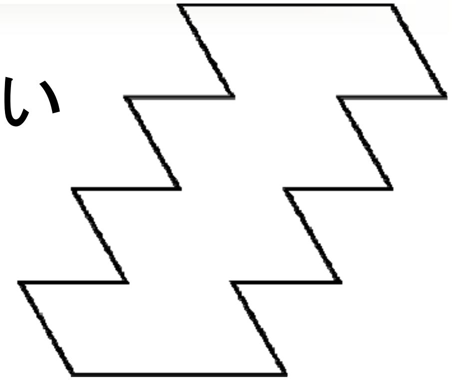
ざっくりした分類

- 整面凸多面体の辺展開図群
  1. タイリングが存在しないなら，4単面体は折れない．
     - [Akiyama 他 2011]による分類結果があった
  2. 面積や長さの「つじつま」があっていなければ正4面体は折れない．
  3. どちらもパスした立体の辺展開は，試してみなければわからない！

以下，3と2を紹介します．

創造力が試される折り紙 (?)

Q: 多角形 P を折って、凸多面体を作りなさい

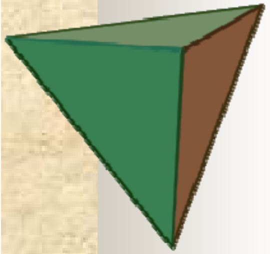


- 凸多面体が折れるような辺々接着は、
  動的計画法で求められる[Lubiw, O'Rourke 1996]
- でも、どこを折るか、折り目を求めるアルゴリズムは
  Unknown
- 頂点は, 外周上の1/2単位のところにくる(証明略)

Key: Tiling Theorem

[Akiyama 2007]
[Akiyama, Nara, 2007]

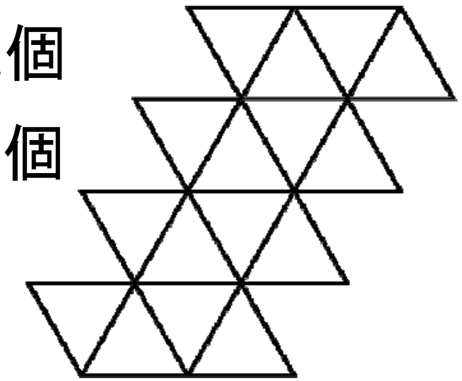
- Theorem： P は**四面体の一般展開**　iff
  (1) P が **p2 tiling** 可能 (180° 回転のタイリング)
  (2) **回転中心 4つ** が三角格子を形成
  (3) **回転中心 4つ** が格子点
  (4) **回転中心 4つ** が別々の同値類に属す

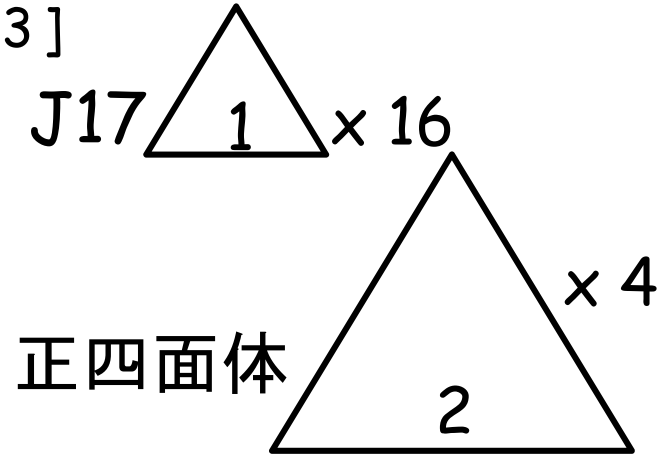


・正三角格子
→ 正四面体
・一般の三角格子
→ tetramonohedron

J17, J84 の展開図

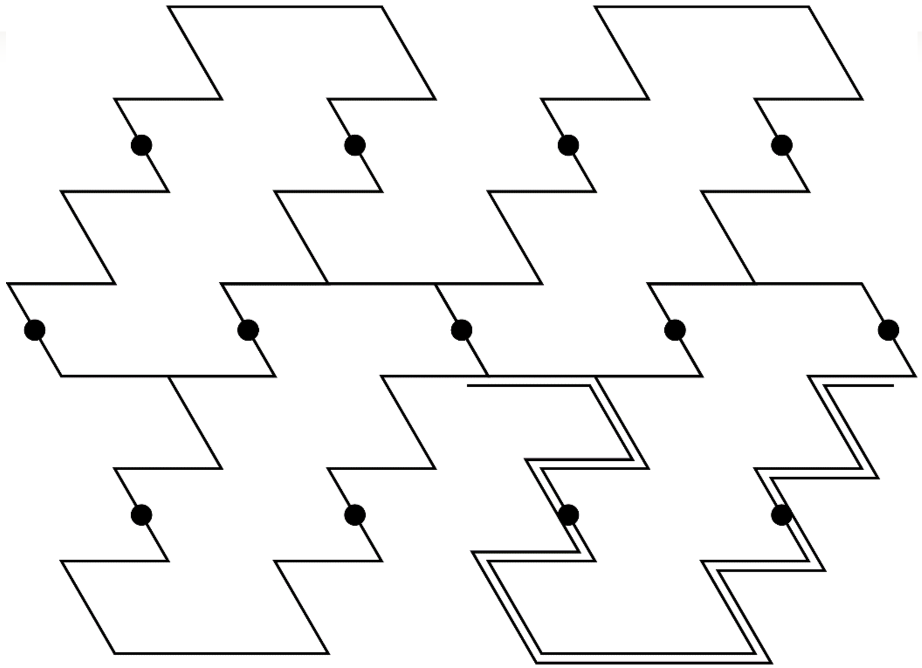
- 展開図の列挙アルゴリズム [Horiyama, Shoji 2011]
- 展開図の個数 [Horiyama, Shoji 2013]
  - J17　13,041個
  - J84　1,109個





- 各頂点の内角を、巡回リストで持つ
  - 辺々接着を考えて、各辺の中点も頂点として追加
  - 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180
- 回転中心 r_1, r_2 を guess / Check $r_1 r_2 = 2$

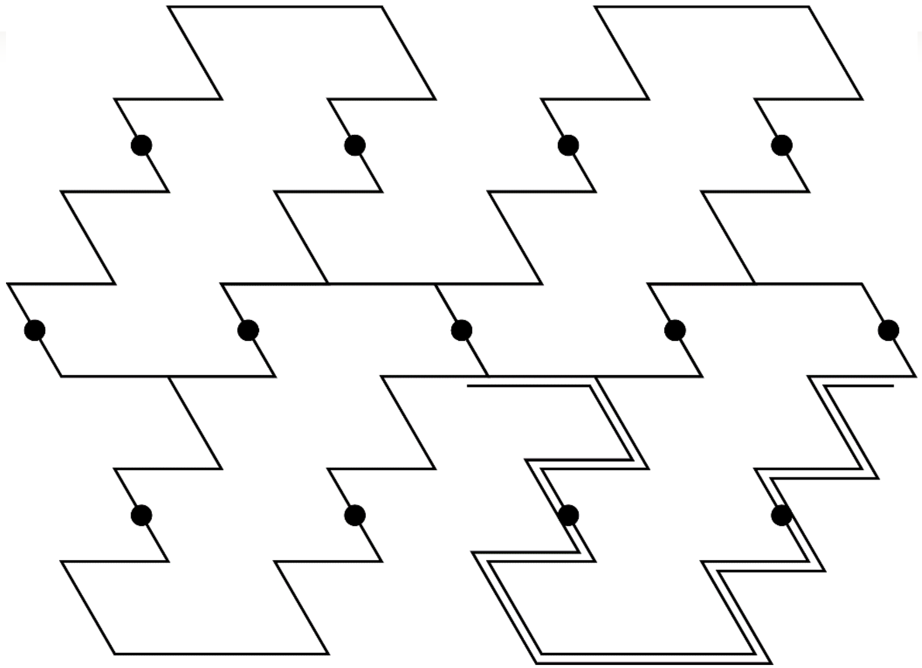
J17, J84 の展開図



- 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180

- 回転中心 r_1, r_2 を guess → r_1, r_2 で 180° 回転

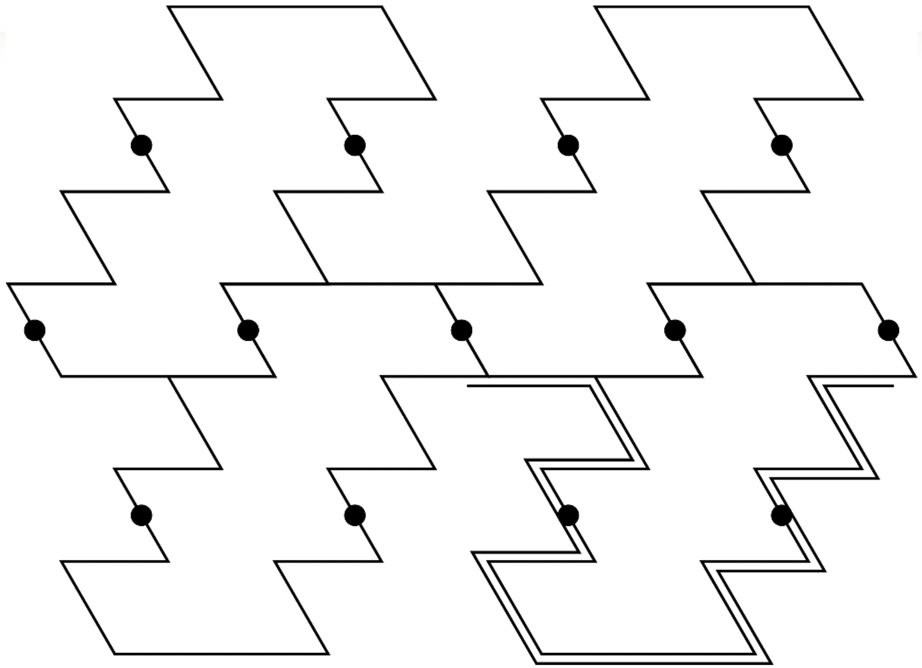
J17, J84 の展開図



- 180, 180, 240, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180

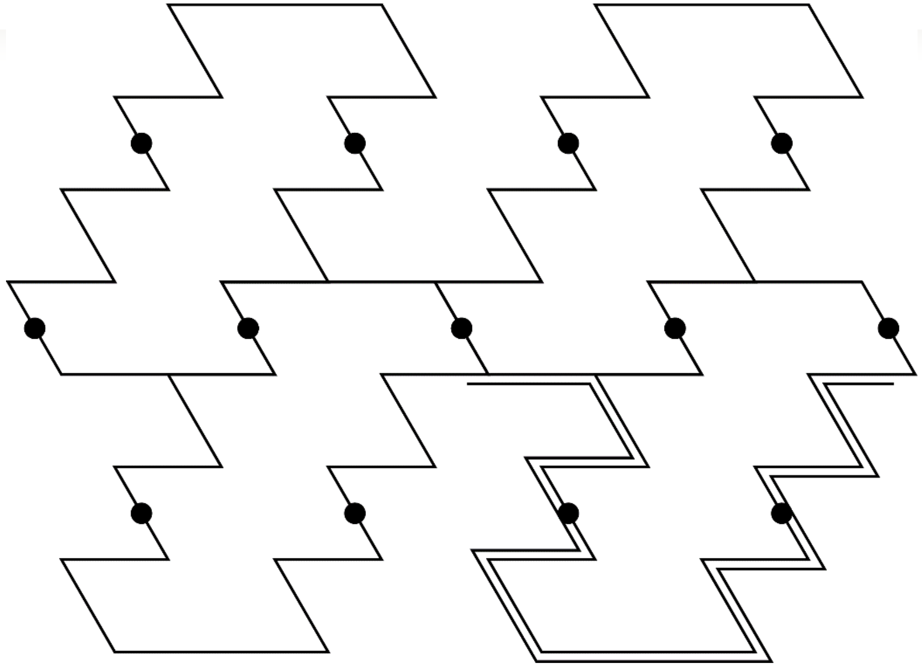
- 回転中心 r_1, r_2 を guess → r_1, r_2 で 180° 回転

J17, J84 の展開図



- 回転中心 r_3 を guess → r_3 で 180° 回転, r_4 に到達
  - 180, 180, 240, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180

J17, J84 の展開図



- 回転中心 r_3 を guess → r_3 で 180° 回転, r_4 に到達
- r_1, r_2, r_3, r_4 が正三角格子に載っているか確認
  - 180, 180, 240, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180

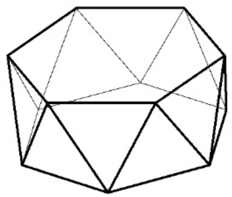
J17, J84 以外

- JZ多面体の展開図の個数 [Horiyama, Shoji 2013]
  - J01 8
  - J02 16
  - J03 308
  - J04 3,030
  - J05 29,767
  - J06 7,825,005
  - …
  - J71 2,079,942,317,394,110,986,896,181,956,672
  - J72 20,668,673,558,050,742,614,946,330,896
  - J73 10,597,511,106,353,370,064,654,696,448
  - …

207穣 9942秭 3173垓 9411京 986兆 8961億 8195万 6672

J17, J84 以外

- 展開図がタイリングになる整面凸多面体 [Akiyamaら 2011]
  - JZ多面体： J1, J8, J10, J12, J13, J14,
    (18種類) J15, J16, J17, J49, J50, J51,
    J84, J86, J87, J88, J89, J90
  - 正６反角柱 (上下が正六角形、側面に正三角形12枚)

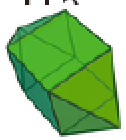
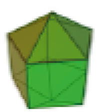
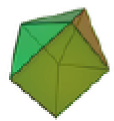
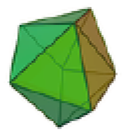
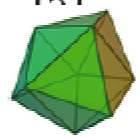


細かい補足:[Akiyama ら]はタイリングを考えたが, 今の枠組みでは p2 タイリングを考える必要がある.

- 「展開図の長さや面積」と正４面体のそれの「つじつま」があっている必要がある.

J17, J84 以外

- タイリングをもつ各 Jx について,
  1. 面積Sxを求める
  2. その面積を持つ正4面体の辺の長さ Lx を求める
  3. Jxを構成する正多角形(ここでは正3角形と正方形のみでよい)を敷き詰めた「部分展開図」を考える
  4. 部分展開図上の「格子点」+「1/2点」上の2点が Lx になりうるかどうかをチェックする

	J15	J16	J17	J49	J50	J51
Name	J15	J16	J17	J49	J50	J51
Image						
# of □s	4	5	0	2	1	0
# of △s	8	10	16	6	10	14
L_{J_i}	$\sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3}+2}$ $= 2.075\cdots$	$\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{3}+\frac{5}{2}}$ $= 2.320\cdots$	2	$\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{3}{2}}$ $= 1.629\cdots$	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{5}{2}}$ $= 1.754\cdots$	$\sqrt{3.5}$ $= 1.870\cdots$

J17, J

図10のベクトルの和が Lx になることが必要.

√2や√3の単純な線形和になるので，例えば $\sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3}+5}$ などは作れない．よってそうした立体の展開図にはなりえない．

- タイリングを
  3. Jxを
     でよい)を 」展開図」を考える
  4. 部分展 子点」+「1/2点」上の2点が Lx に
     なりうる かをチェックする

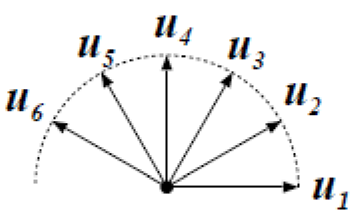


Figure 10: Six unit vectors.

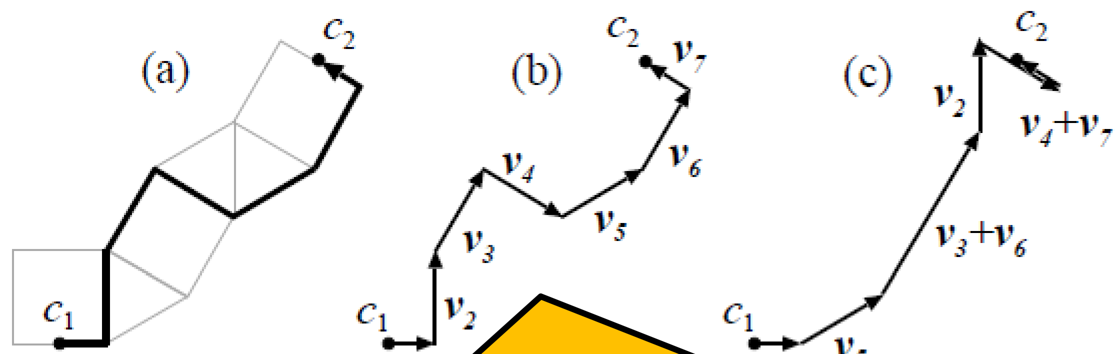


Figure 11: Linkage
linkage, (b) correspo

この時点で生き残った候補：
J12, J13, J14, J51, J89

J12, J13, J14, J51, J89

- タイリングの枚数に上限(10枚;証明略)があるので，長さ10の可能な組合せを全部試して，上記のどの辺の長さも作れないことを示せばよい．
  1. 国際会議発表時：下図(a)のパターンを全探索．
     10時間程度で計算終了．どの長さも現れなかった．
  2. 論文：ベクトルを(c)のように正規化すればよい！
     ⇒1秒未満！！

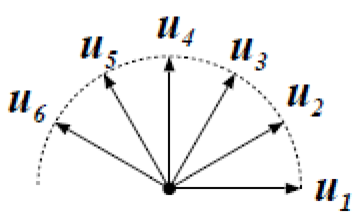


Figure 10: Six unit vectors.

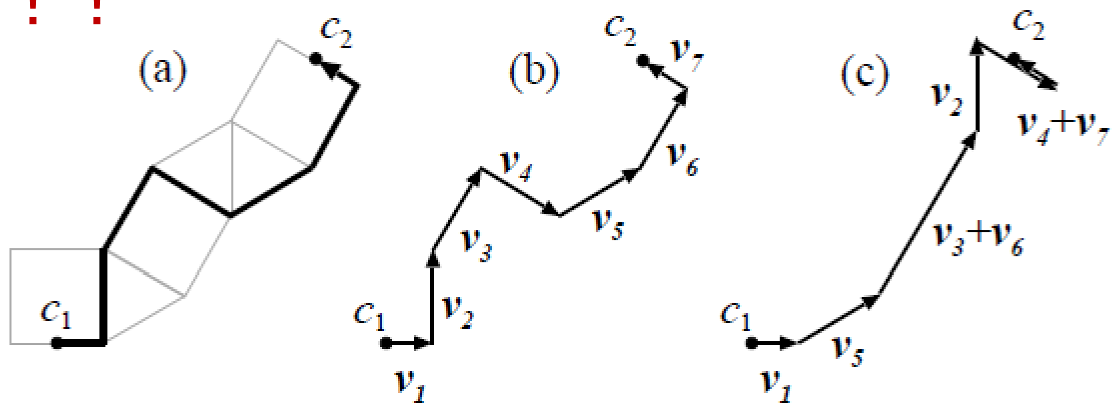
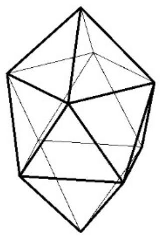


Figure 11: Linkage as the set of unit vectors: (a) given tiling and linkage, (b) corresponding vectors, and (c) reorganized vectors.

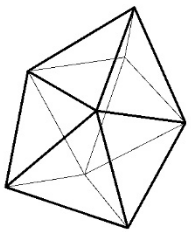
Our Results

- 正四面体 (一般展開)
  v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

- ジョンソン・ザルガラー多面体：全 92種類



  - J17 (Gyroelongated square dipyramid) 辺展開 13,014個
    - 78個： 1通りの折り方
    - 8個： 2通りの折り方
    - 1個： 3通りの折り方



  - J84 (Snub disphenoid) 辺展開 1,109個
    - 32個： 1通りの折り方
    - 5個： 2通りの折り方
- 半正多面体、正n角柱、正n反角柱、
  その他JZ多面体 90種類： 共通の展開図なし