

# 今日の予定：最新の結果たち

8. Rep-cube=Rep-tile + 展開図

9. ペタル型の紙で折るピラミッド型

10. ジッパー一辺展開可能性

11. まとめ

# Bumpy Pyramid Folding

Zachary Abel (MIT)

Erik Demaine (MIT)

Martin Demaine (MIT)

Hiro Ito (Univ. of Electro-Communications)

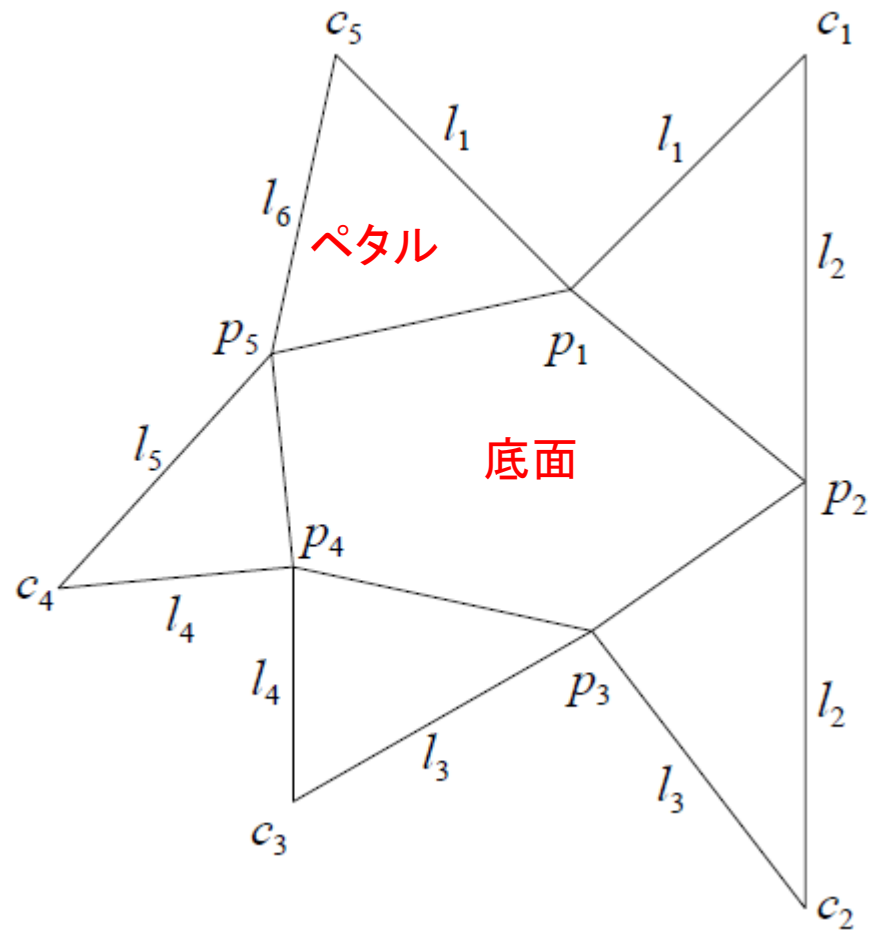
Jack Snoeyink (The University of North Carolina)

[Ryuhei Uehara \(JAIST\)](#)

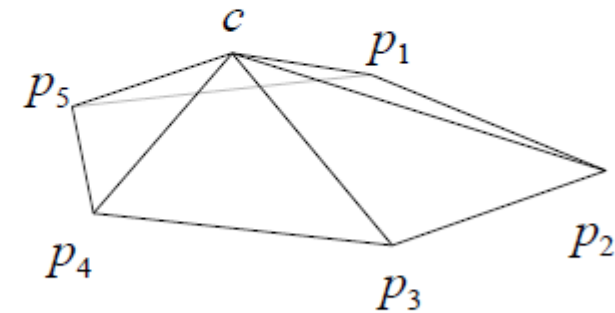
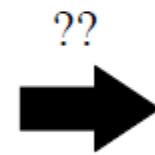
## 文献

Zachary Abel, Erik D. Demaine, Martin Demaine, Hiro Ito, Jack Snoeyink and Ryuhei Uehara: Bumpy Pyramid Folding, *The 26th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2014)*, 2014/08/11-2014/08/13, Halifax, Canada.

# Bumpy Pyramid Folding



計算幾何学  
(計算折り紙)の問題



# Background (1)

➤ ある日、パズル関係の知人から手紙が届く...

## 1. 折り紙の問題1:

入力: 周囲にペタルのついた三角形

出力: ここから三角錐が折れるか?

結論: 接着される辺同士の長さが合っていて、  
十分長ければ可能

## 2. 折り紙の問題2:

入力: 周囲にペタルのついた4角形

出力: ここから4角錐(ピラミッド)が折れるか?

観測: 一般に2通りの折り方があり、凸と凹になる...?

# (一般化)ピラミッド問題

入力: 周囲にペタルのついた凸 $n$ 角形

問題1: ここから $n$ 角錐(ピラミッド)が折れるか?

一般には「ならない」が、立体は折れることが多い

問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか?

問題2-2: 体積最大の立体が折れるか?

メタ問題2: 二つの問題の解は違うのか?

メタ<sup>2</sup>問題2: 二つの問題の解が同じになるのはどんなときか?

底面の三角形分割  
ごとに異なる凸凹  
な立体が折れる

# Background (2)

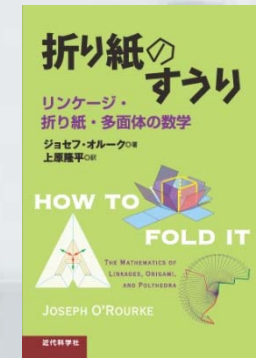
## ➤ 「折り」と「展開」の問題

- 1500年代に研究が始まったが、わかっていることは、あまりない
- 近年、計算幾何学の有望なテーマ

## ➤ 最大の未解決問題(予想):

どんな凸多面体も、辺に沿って切るだけで**展開図**に展開できる。ただし**展開図**とは、以下の条件を満たす多角形:

- 重なりを持たない(←これが難しい)
- 連結である



# Background (2)

## ➤ 最大の未解決問題(予想):

どんな凸多面体も, 辺に沿って切るだけで  
**展開図**に展開できる. ただし**展開図**とは,  
以下の条件を満たす多角形:

- 重なりを持たない
- 連結である

## ➤ ピラミッド問題は, 凸多面体の展開の最初の ステップの逆問題に見える...

# 既存の関連結果

## 1. Alexandrovの定理(1942)

幾何情報(距離情報と組合せ的な構造)が与えられたとき、「**凸**多面体の体積」は一意的に決まる。  
ほとんどの**凸**多面体は展開図と折り方が与えられるとユニークに決まる。

- 体積を求める多項式: Sabitov 1998.
- 構成的証明: Bobenko, Izvestiev 2008.
- 多項式時間アルゴリズム: Kane, et al. 2009.  
...実行時間は  $O(n^{456.5})$

今回の問題は特殊なケースの研究



# 今回の結果(1)

## 1. 折り紙の問題1:

入力: 周囲にペタルのついた三角形

出力: ここから三角錐が折れるか?

結論: 接着される辺同士の長さが合っていて,  
十分長ければ可能

...Sabitov の多項式で計算した体積が正であればよい。

$$V^2 = \frac{1}{144} [l_1^2 l_5^2 (l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) + l_2^2 l_6^2 (l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) + l_3^2 l_4^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - l_1^2 l_2^2 l_4^2 - l_2^2 l_3^2 l_5^2 - l_1^2 l_3^2 l_6^2 - l_4^2 l_5^2 l_6^2].$$

# 今回の結果(2)

## 1. 折り紙の問題2:

入力: 周囲にペタルのついた4角形

出力: ここから4角錐(ピラミッド)が折れるか?

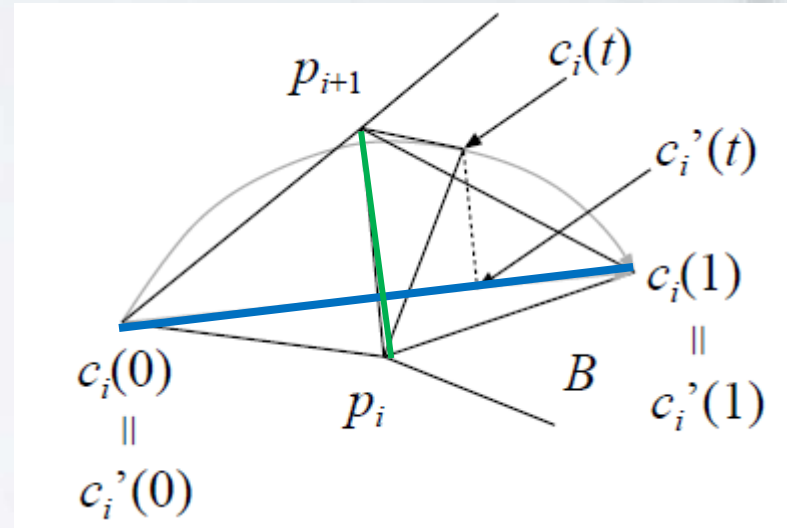
- 底面の4角形を対角線で切ると二つの4面体を接着した立体ができる

1. 2通りの切り方で体積が同じ: ピラミッドができる
2. 体積が異なるなら、一方は凸で一方は凹
3. (凸な方だけできることもある)

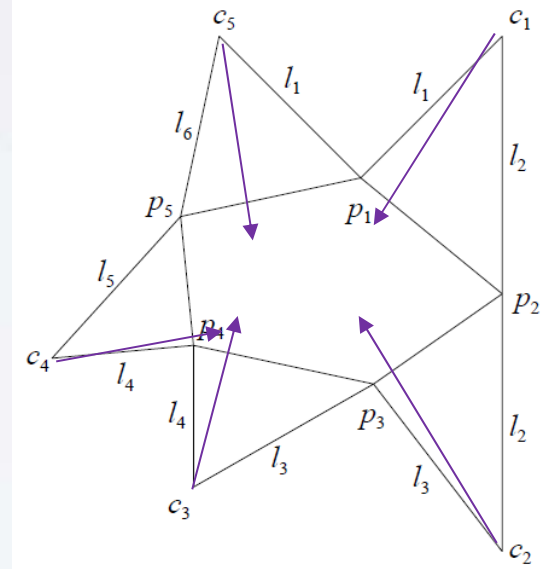
Sabitovの結果だけでは、ここから先は難しい...

# 重要なObservation

頂点を折り返すとき、  
頂点の写像の軌跡は  
底面の辺に対する垂線となる



ピラミッドを折るときの頂点の  
動きを上から見ると、  
「軌跡」が計算できる



# (一般化)ピラミッド問題:解(1)

入力: 周囲にペタルのついた $n$ 角形

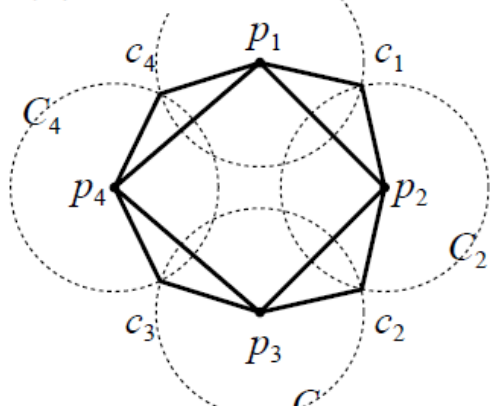
問題1: ここから $n$ 角錐(ピラミッド)が折れるか?

[解答] 各頂点からの垂線が1点で交わればよい!

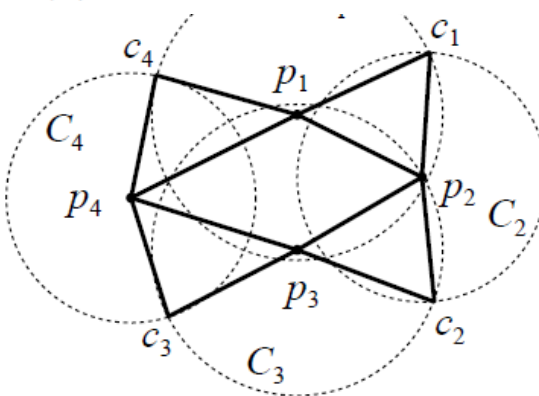
(+ 頂点が十分な高さを持つことも必要)

線形時間で簡単に判定できる。

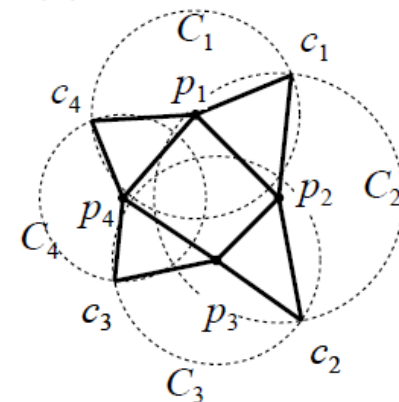
例: (1) できない



(2) 凸だけできる



(3) 凸と凹が両方できる



# (一般化)ピラミッド問題:解(2)

入力: 周囲にペタルのついた $n$ 角形

問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか?

問題2-2: 体積最大の立体が折れるか?

[解] 多項式時間アルゴリズムがある。DPで $O(n^3)$

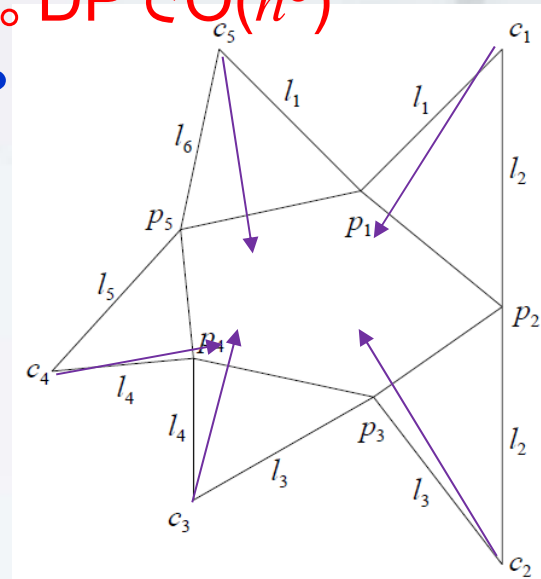
メタ問題2: 二つの問題の解は違うのか?

[解] 一般に違う(凹>凸がある)

メタ<sup>2</sup>問題2: 二つの問題の解が

同じになるのはどんなときか?

[未解決] わかりません...



# (一般化)ピラミッド問題:解(3)

入力: 周囲にペタルのついた $n$ 角形

問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか?

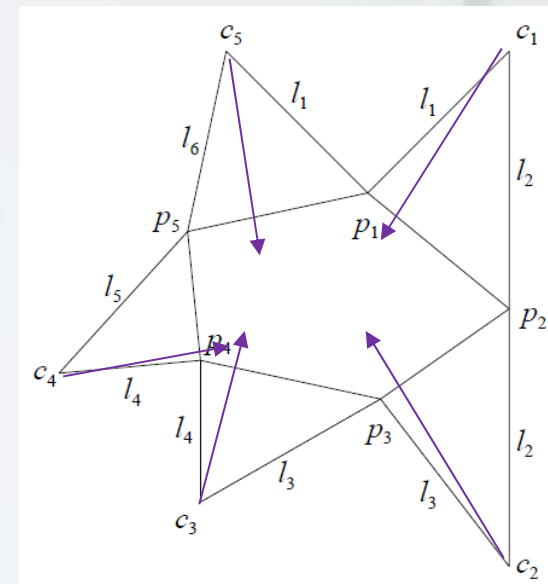
[定理] (ペタルが十分な長さがあるならば)

1. いつでも折れる
2. 折る手順(=ペタルの接着順序)を線形時間で計算できる。

[証明の核となるアイデア]

折る手順は Power Diagram

(一般化Voronoi図)で計算できる!

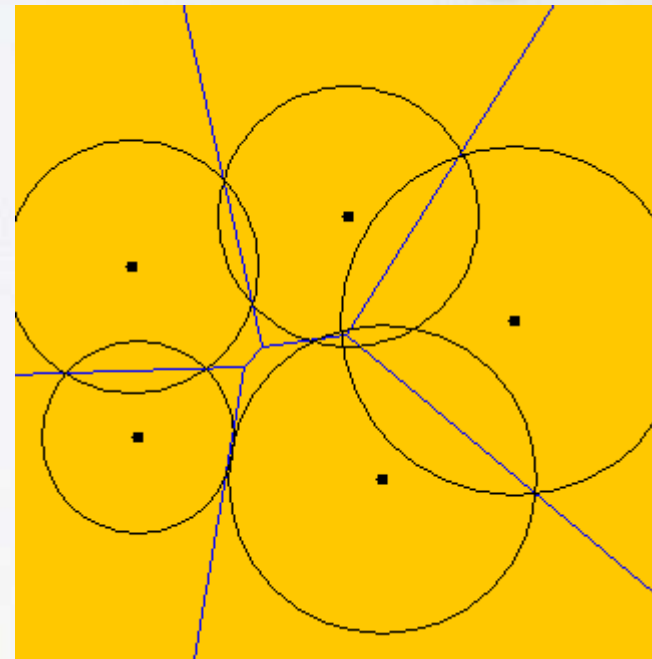
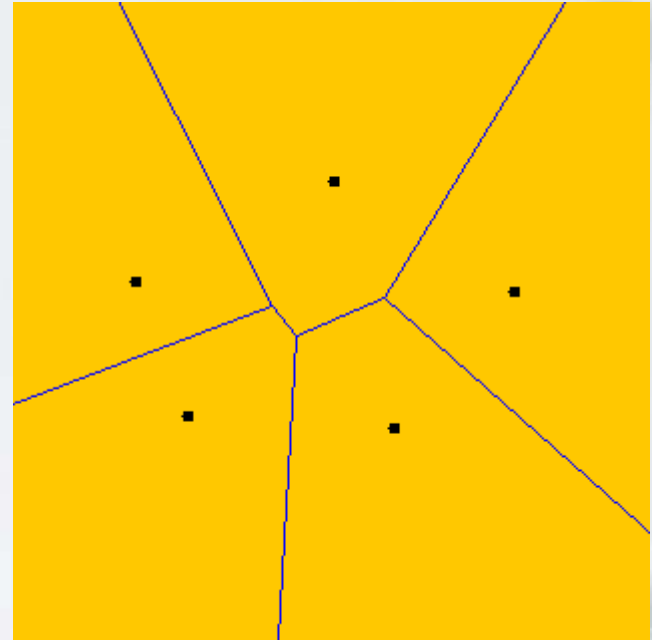


# Power Diagram

- Voronoi図では  
各点対間に垂直  
2等分線を引く
- Power Diagram  
では各頂点に  
「重み」がある

細かいけど重要な注意: 点が凸に並んでいると、これらは「木」になり、閉路をもたない。

<http://pages.cpsc.ucalgary.ca/~laneb/Power/>



# (一般化)ピラミッド問題:解(3)

入力: 周囲にペタルのついた $n$ 角形

問題2: ピラミッドにならない場合,

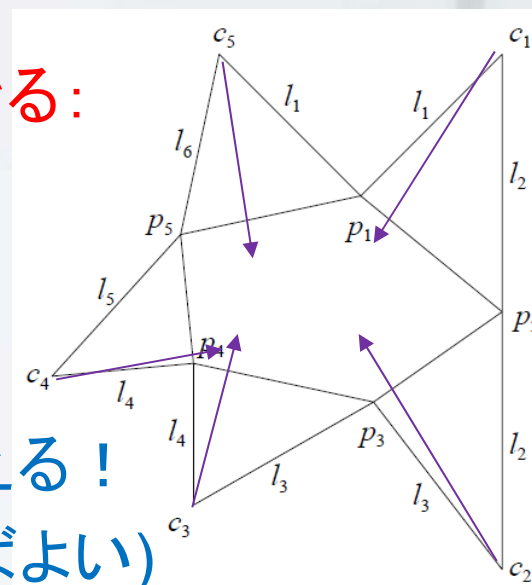
問題2-1: 凸多面体が折れるか?

[定理] 線形時間で折る手順を計算できる。

[証明の核となるアイデア]

折る手順は Power Diagram で計算できる:

1. 底面の点  $p_i$  が「点」
2. 付随する長さ  $l_i$  が「重み」
3. Power Diagram の線が頂点  $c_i$  と  
接着後にできる新たな頂点の軌跡を与える!  
(Power Diagram の「木」に沿って貼ればよい)





# まとめと課題

## (一般化)ピラミッド問題

入力: 周囲にペタルのついた $n$ 角形

問題1: ここから $n$ 角錐(ピラミッド)が折れるか? **OK!**

問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか? **Good!**  $O(n^3)$ ??

問題2-2: 体積最大の立体が折れるか? **So so (改善の余地?)**

メタ問題2: 二つの問題の解は違うのか?

メタ<sup>2</sup>問題2: 二つの問題の解が同じになるのはどんなときか? **未解決問題**

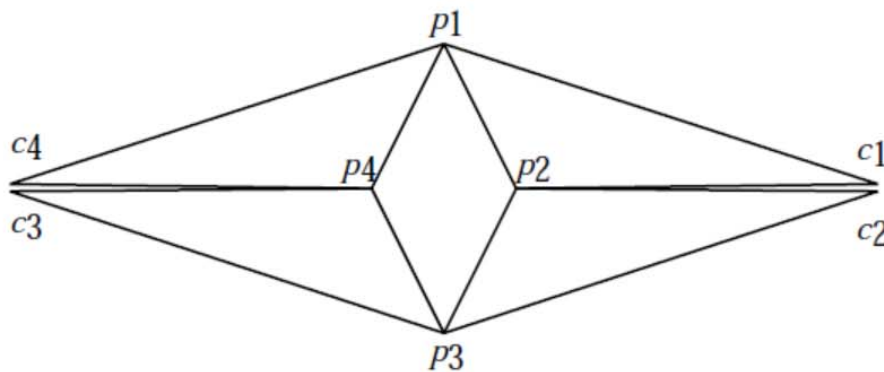
底面が凸 $n$ 角形  
であることを使っ  
てない

頂点が底面からはみ出さな  
ければ凸が最大になりそうな  
気がするけれど...

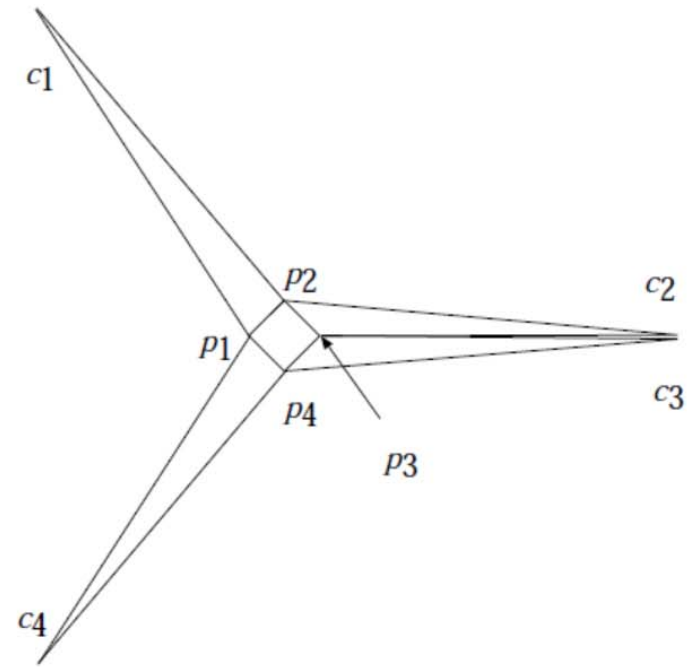
# 演習課題

## (一般化)ピラミッド問題

- 二つの問題の解が同じになるのはどんなときか？
- 二つの問題が違う答えになる例をもっと見つける



(1)



(2)