今日の予定：最新の結果たち

8. Rep-cube=Rep-tile + 展開図
9. ペタル型の紙で折るピラミッド型
10. ジッパー辺展開可能性
11. まとめ

単純な多面体のジッパー辺展開可能性について

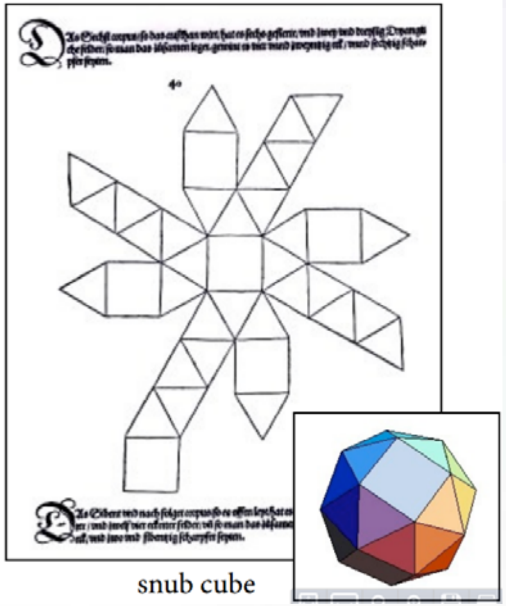
Erik D. Demaine (MIT)
Martin L. Demaine (MIT)
上原隆平（北陸先端科学技術大学院大学）

デューラー(1525)以来…

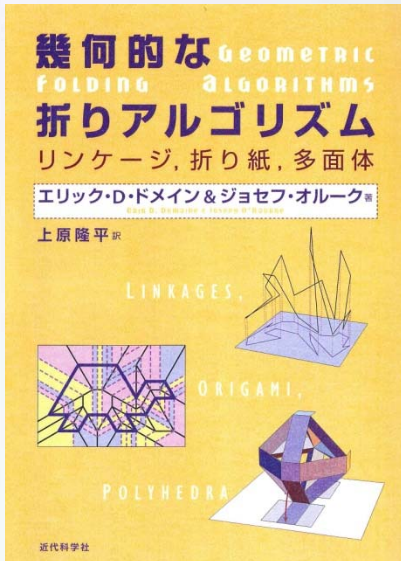
計算折り紙界最大の未解決問題:

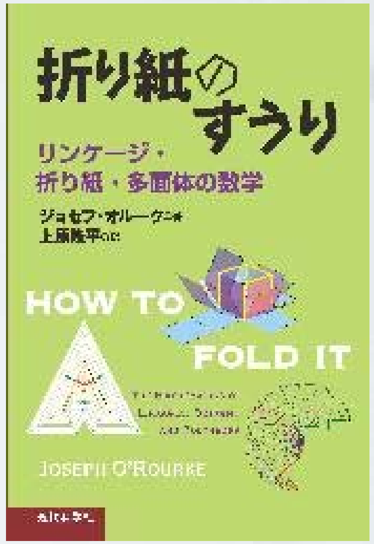
どんな凸多面体も，辺だけに沿って切って広げれば平坦な(重なりのない)多角形に展開できる？

Durer, 1498



snub cube





デューラー(1525)以来…

計算折り紙界最大の未解決問題:

この問題の難しさには二つの側面がある:

1. 「辺を切る」: (切る辺に導出される)グラフの全域木の構造に関する組合せ論的難しさ

   (注:辺展開は必ず全域木になる)

   - 面の中を切ってよければ, 重ならない展開図はいつでも作れる.

2. 「重ならない」: 多角形の幾何的な難しさ

   - 重なりを気にしなければ, どんな全域木で切っても, 平坦に展開はできる.

デューラー(1525)以来…

計算折り紙界最大の未解決問題:

「辺のカット」に制限を与えて, 「重ならない」展開を考える

「辺のカット」は木でなく(ハミルトン)パスでなければならない(＝ハミルトン展開)

ハミルトン展開の先行研究と応用:

[Shephard 1975][Demaine², Lubiw, Shallit² 2010]

デューラー(1525)以来…

計算折り紙界最大の未解決問題:

「辺のカット」に<u>制限を与えて</u>, 「重ならない」展開を考える

「辺のカット」は木でなく(ハミルトン)パスでなければならない(＝ハミルトン展開)

ハミルトン展開の先行研究と応用:

[Shephard 1975][Demaine^2, Lubiw, Shallit^2 2010]

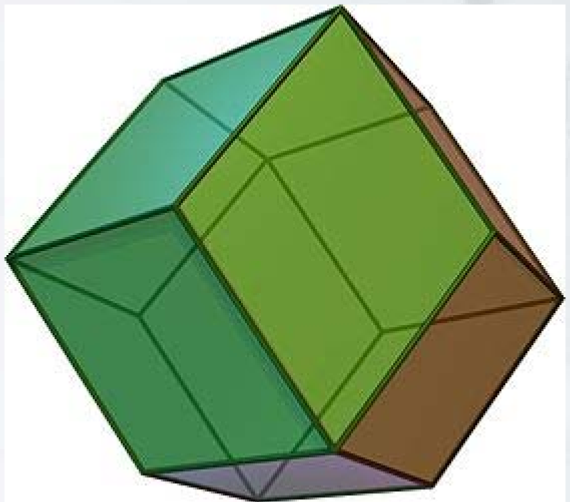
ハミルトン展開

既知の結果 [DDLSS 2010]:

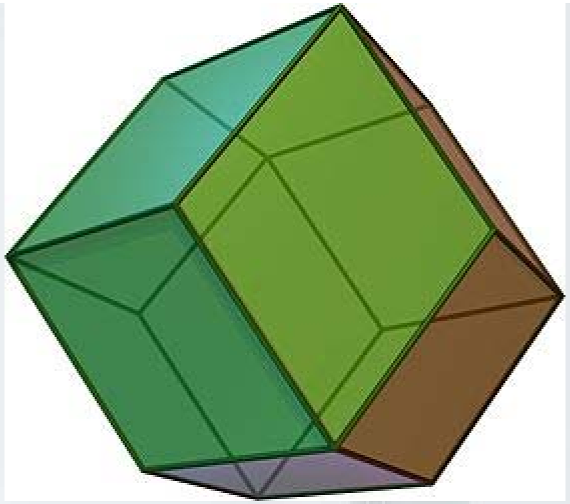
ほとんどの凸正多面体はハミルトン展開可能.

しかし例えば菱型12面体はハミルトン展開可能ではない.

なぜなら, これは
ハミルトン路を
もたないからである.



ハミルトン展開



菱型12面体は**ハミルトン路を持たないので**ハミルトン展開可能ではない.

そもそも**ハミルトン展開**を導入/考察しているのは, 重なりに注目するためではなかったのか!?

わき上がる疑問:

以下を満たす自然な多面体はないのか？
1. ハミルトン路をたくさんもつ
2. 重なりのためにハミルトン展開できない

ハミルトン展開

主な結果:

1. 以下を満たす無限個の<u>ドーム</u>がある
   1. たくさん（指数関数的）ハミルトン路を持つ
   2. どう展開しても必ず重なってしまってハミルトン展開できない!
2. どんな<u>**入れ子角錐台**</u>でもハミルトン展開可能.
3. 一般の角錐台がハミルトン展開可能かどうかは，多項式時間で判定できる.

ハミルトン展開: 展開できないドーム

ドーム: 以下より構成される凸多面体

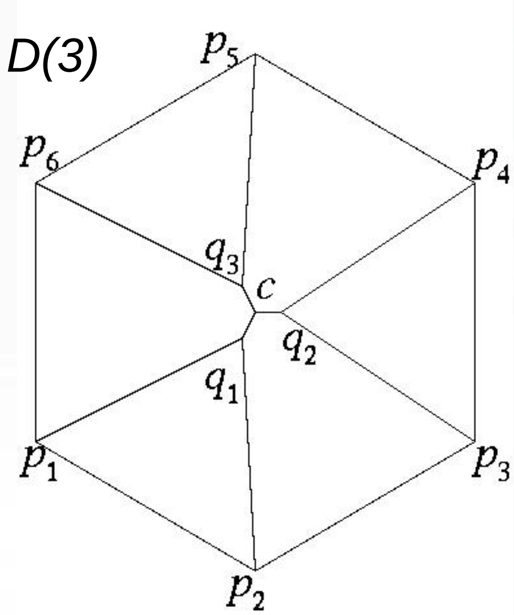
- 一つの*底面* (凸*n*角形)
- *n* 枚の側面 (凸多角形)

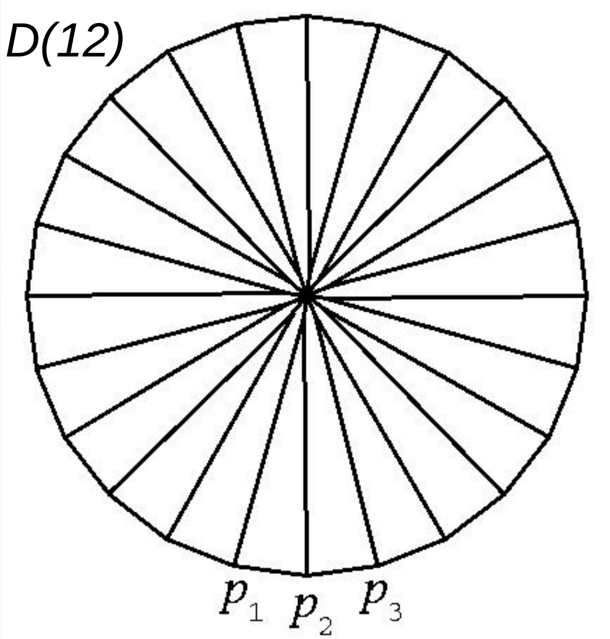
- 5角形の底と5枚の側面を持つドームの例:


定理2: ハミルトン展開できないドーム

定理2: ハミルトン展開できないドームは無限個存在する.

[証明] 以下で定義されるドーム*D(i)*は*i*≧12に対してどれも展開できない.



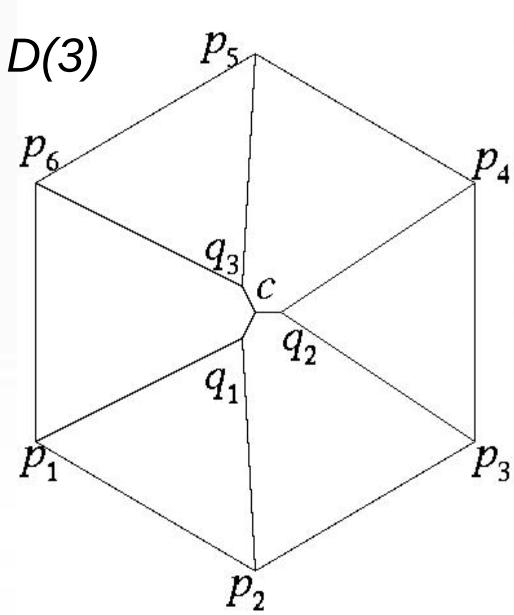


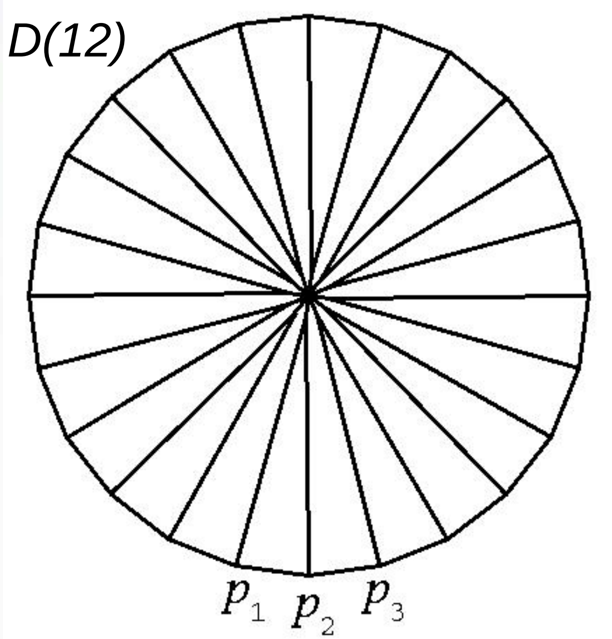
定理2: ハミルトン展開できないドーム

[観察1] ハミルトン路*P*はたくさん存在する

[観察2] どんな *P* でも中央の c は1度しか通らない

[観察3] ほとんどの q_i (例外は高々2個) はフラップの先端になる.



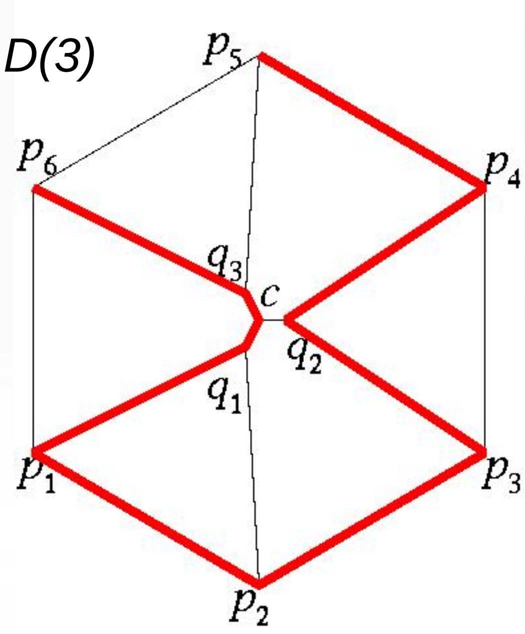


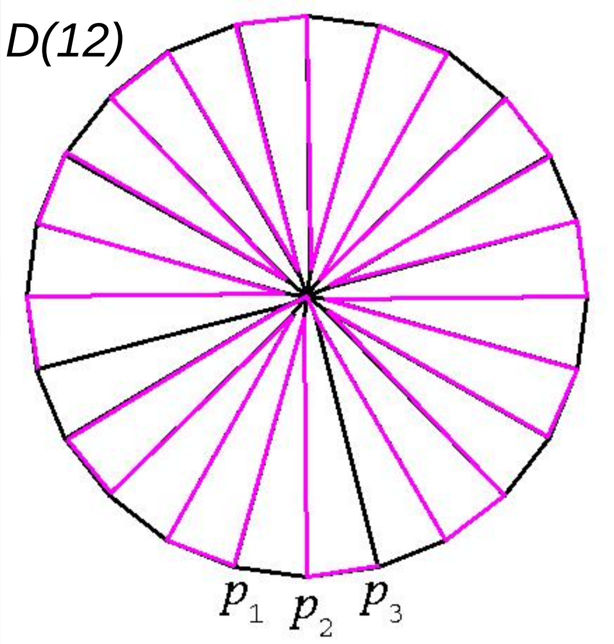
定理2: ハミルトン展開できないドーム

[観察1] ハミルトン路*P*はたくさん存在する

[観察2] どんな *P* でも中央の c は1度しか通らない

[観察3] ほとんどの q_i (例外は高々2個) はフラップの先端になる.





定理2: ハミルトン展開できないドーム

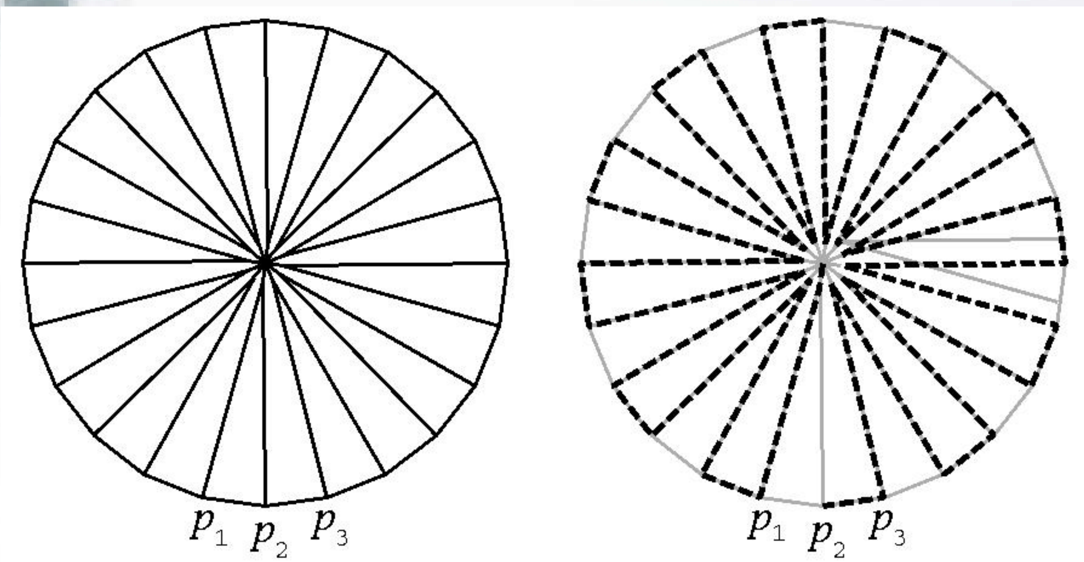
[観察1] ハミルトン路Pはたくさん存在す

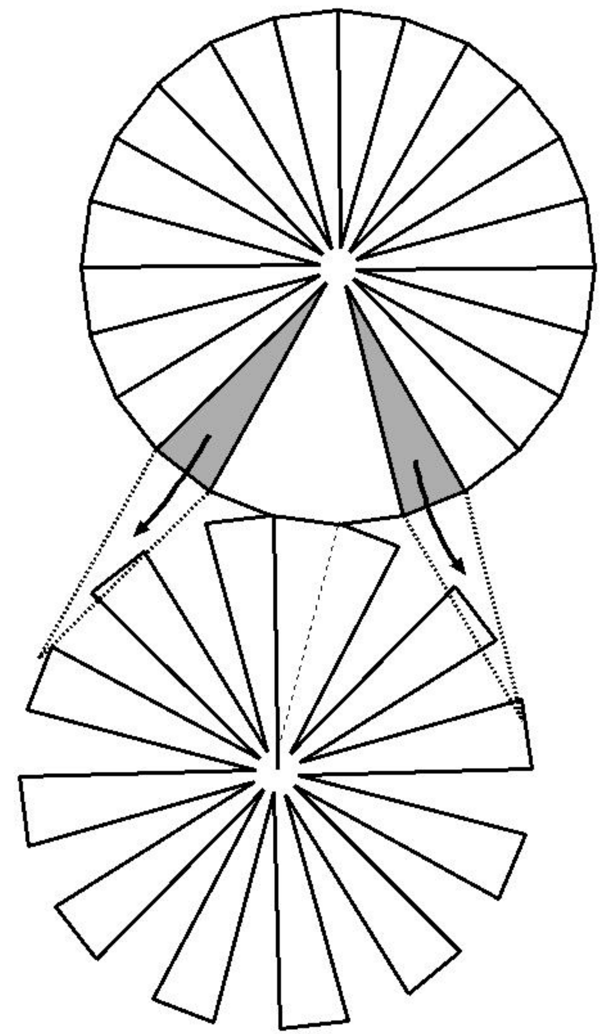
[観察2] どんな P でも中央の c は1度し

[観察3] ほとんどの q_i (例外は高々2個)

になる

どんな i≧12でも，必ず重なりが発生する！





ハミルトン展開

主な結果:

1. 以下を満たす無限個の<u>ドーム</u>がある
   1. たくさん（指数関数的）ハミルトン路を持つ
   2. どう展開しても必ず重なってしまってハミルトン展開できない!
2. どんな<u>**入れ子角錐台**</u>でもハミルトン展開可能.
3. 一般の角錐台がハミルトン展開可能かどうかは，多項式時間で判定できる.

ハミルトン展開

Main results:

2. Hamiltonian unfoldability of *any nested prismoid*

   Th. 4: Any nested prismoid has a Hamiltonian unfolding.

3. Poly-time algorithm for Hamiltonian unfoldability of *any (general) prismoid*

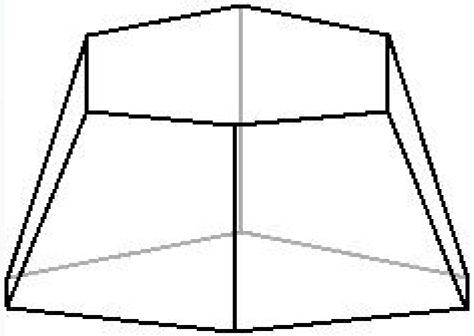
   Th. 5: The number of HPs in a prismoid with n vertices is $O(n^3)$.

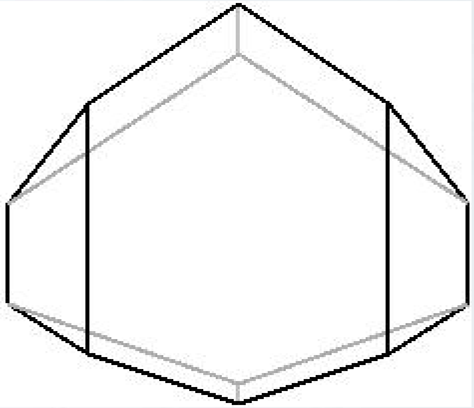
Just count it!

Prismoid

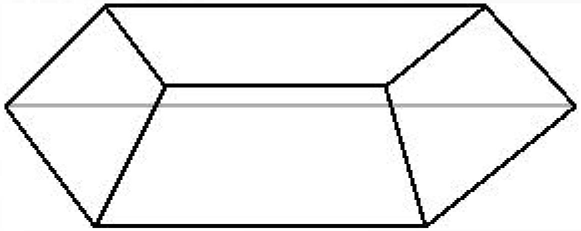
Prismoid: convex hull of two parallel convex polygons with matching angles

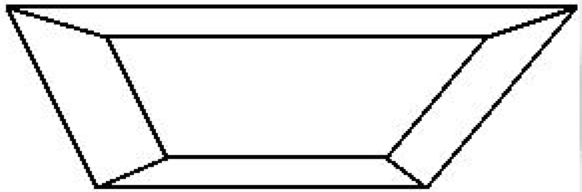
- It has "top" and "bottom," whose angles match.





Nested prismoid: orthogonal projection of the top is included in the bottom.

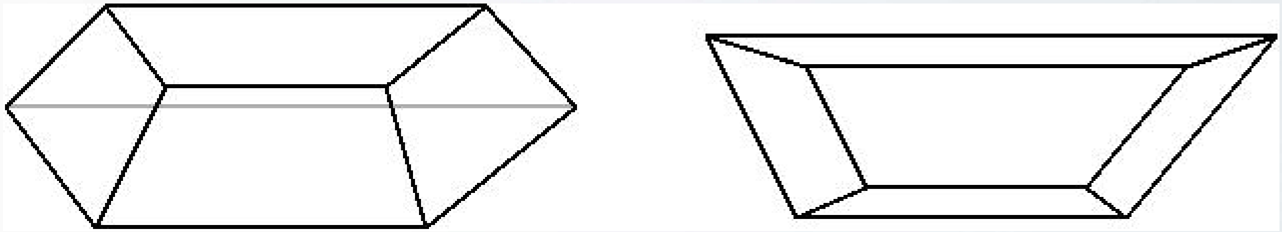




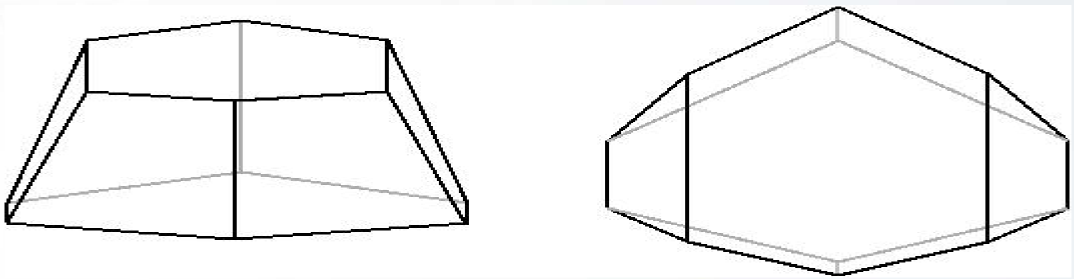
ハミルトン展開

Main results:

Th. 4: Any nested prismoid has a Hamiltonian unfolding.



Th. 5: The number of HPs in a prismoid with n vertices is $O(n^3)$.

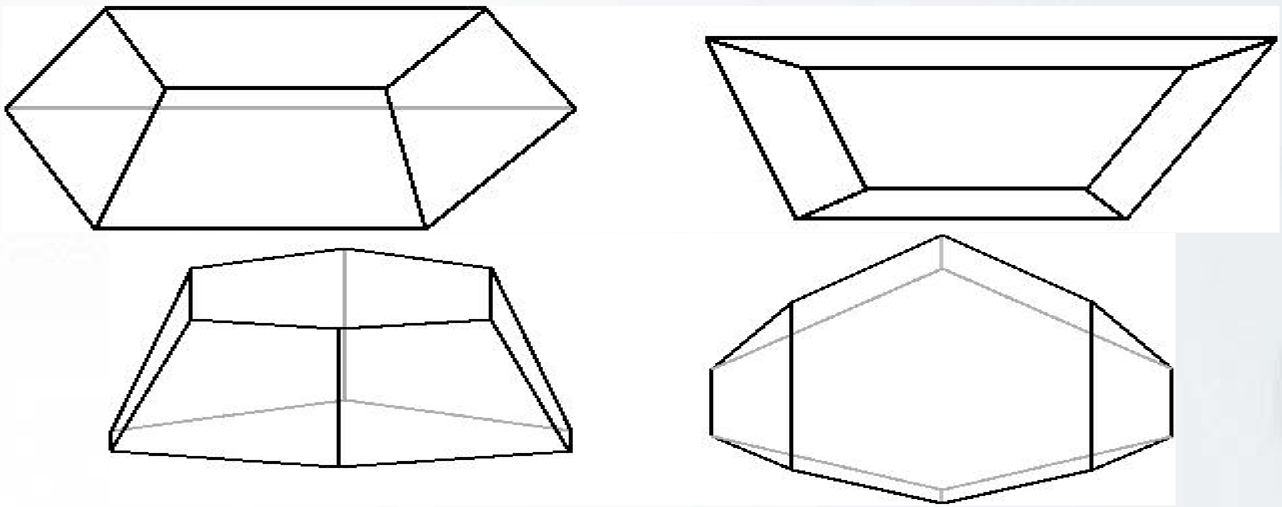


Related results

Band of any prismoid (=without top/bottom) can be unfolded by cutting an edge (not *any* edge).

Nested [Aloupis, et al. 2004/2008]

General [Aloupis 2005](Ph.D Thesis)

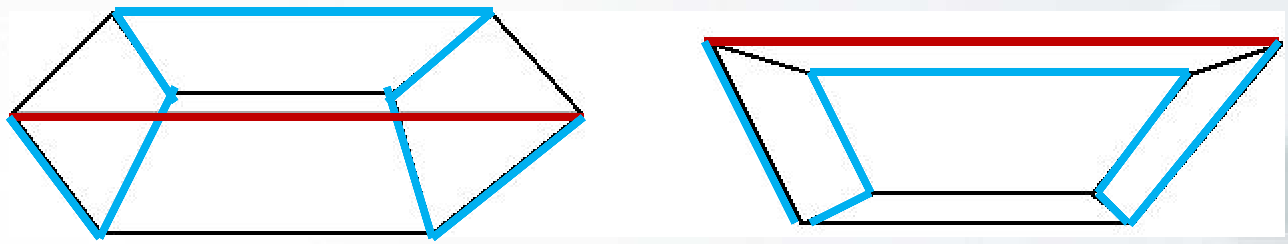


ハミルトン展開

Th. 4: Any *nested* prismoid has a Hamiltonian unfolding.

Basic idea:

1. cut the edge to unfold the band
2. cut its neighbor edge and around top
3. choose suitable edge to attach the band to base
4. cut the remaining edges



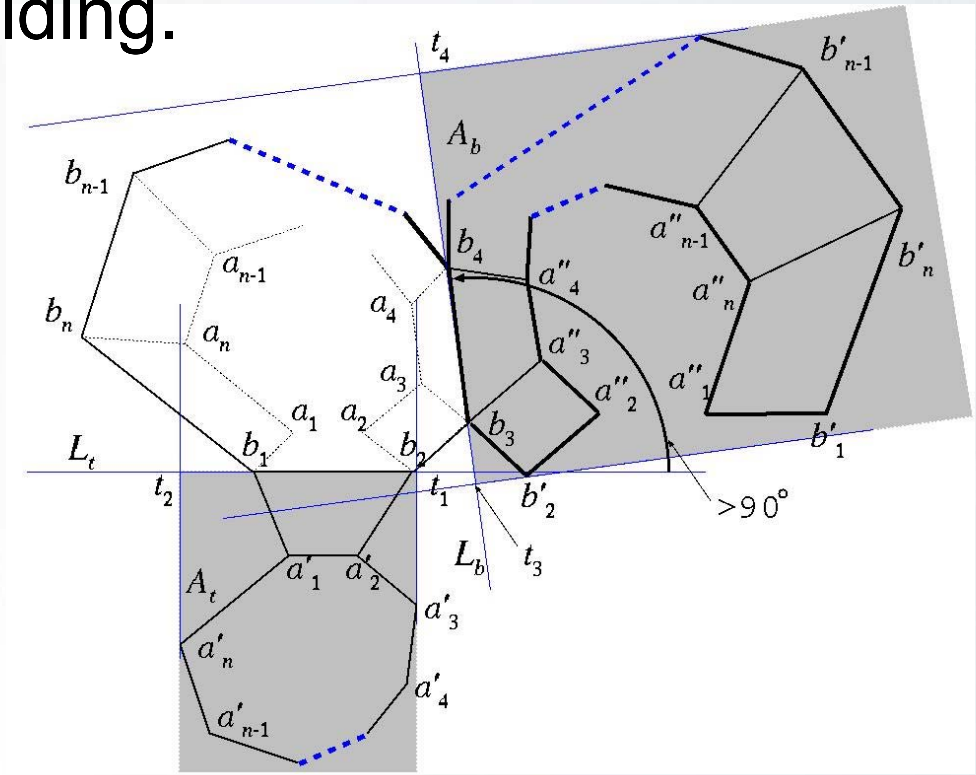
ハミルトン展開

Main results:

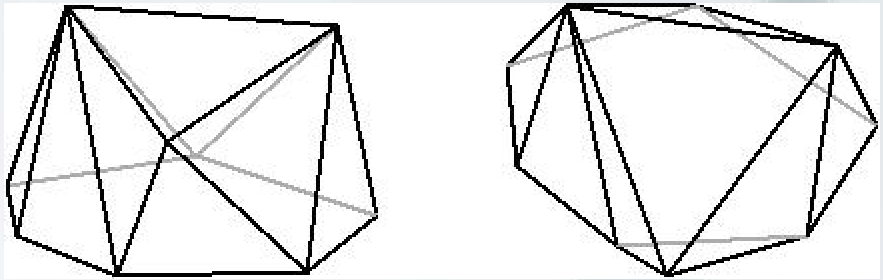
Th. 4: Any *nested* prismoid has a Hamiltonian unfolding.

Q: Does it work for general prismoid?

A: I don't know, so far.



まとめ



予想:

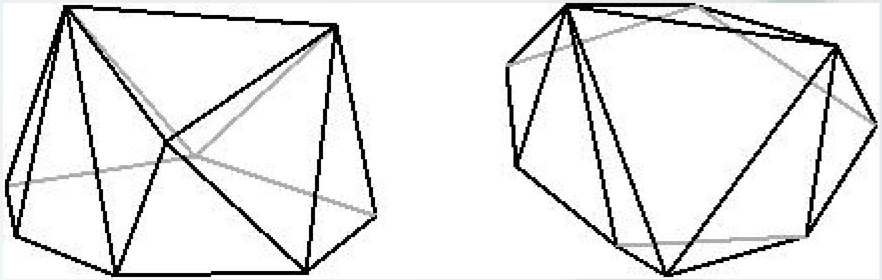
任意の角錐台はハミルトン展開可能？

(側面だけなら展開できる[Aloupis 2005].)

未解決問題(凸多面体の辺展開における最前線):

- 擬角柱: 2枚の平行な凸多角形の凸包
  - 指数的にハミルトン路を持つものがある
  - 今のところ, ハミルトン展開できないものも見つかっていない
  - 「いつでも辺展開できる」ことも証明されていない

演習問題



現状をまとめて考えてみよう:

- 展開方法:ハミルトン展開/通常展開
- 立体:周囲のバンドだけ, 入れ子角錐台,
  角錐台, 擬角柱
- 展開可能性
  - 多項式通り/指数通り
  - いつでもできる/わからない