折り紙とアルゴリズム

上原隆平(うえはらりゅうへい)
北陸先端科学技術大学院大学　情報科学研究科
Japan Advanced Institute of Science and Technology (JAIST)
uehara@jaist.ac.jp
http://www.jaist.ac.jp/~uehara

Google に “上原　折り紙” でもOK!


手取
川
金沢
能美市
白山山系

JAISTの特徴(上原私見)

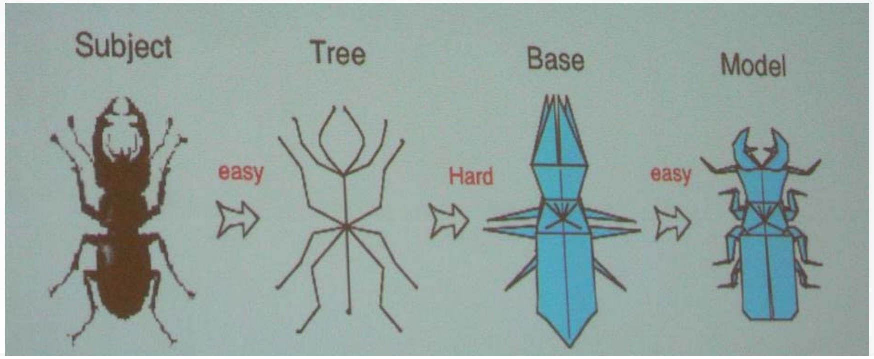
- 大学院大学なので、学部がない
  - 研究に強い大学院(教員が研究をする時間が比較的ある)
  - セメスター制:授業は2カ月単位で進む(週に2回×15回)
  - 学生と教員の「距離」が近い

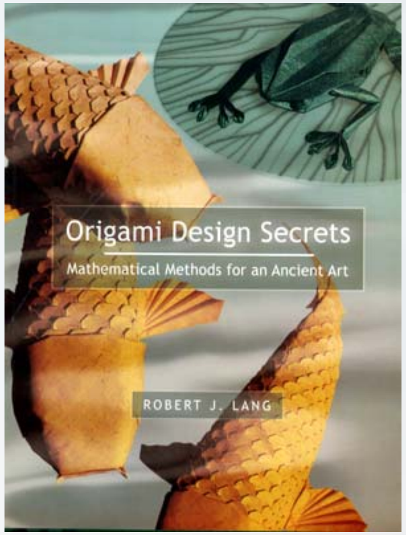
- 特に…
  - 飛び級で入ってくる学生を歓迎している
  - SDコースなら最短4年で博士号がとれる
    - 「飛び級」+「SDコース」は博士号への最短経路だと思う。

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/

折り紙とコンピュータサイエンス

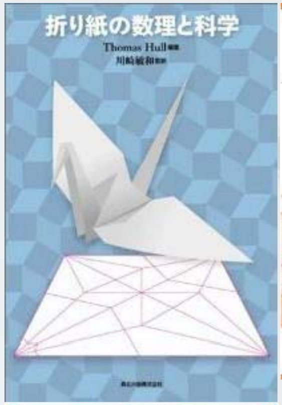
- 近年、むしろ海外で脚光をあびている
- 方法論の確立とソフトウェアの開発:
  - 1980年代:前川さんの「悪魔」
    - CAD的に「パーツ」を組み合わせるコンプレックス折り紙の発祥
  - 2000年代:Lang さんの TreeMaker
    - 与えられた「木構造」(距離つき)を正方形上に展開するソフト
    - さまざまな最適化問題を現実的な時間で計算

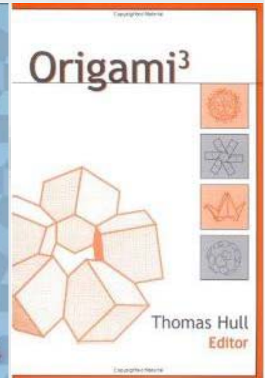


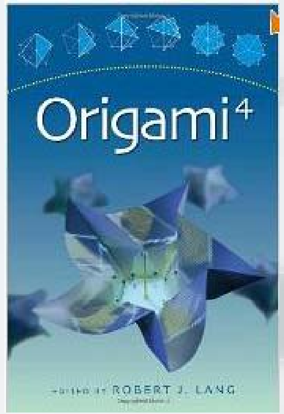


折り紙とコンピュータサイエンス

- 折り紙に特化した国際会議:
  - ◆ 1989年12月@ Italy
    The International meeting of Origami Science and Technology
  - ◆ 1994年@滋賀県大津
  - ◆ 2001年3月@アメリカ
    The International meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (3OSME)
  - ◆ 2006年9月8日～10日@アメリカ
    4OSME
  - ◆ 2010年7月13日~17日@ シンガポール
    5OSME
  - ◆ 2013~4年@関西

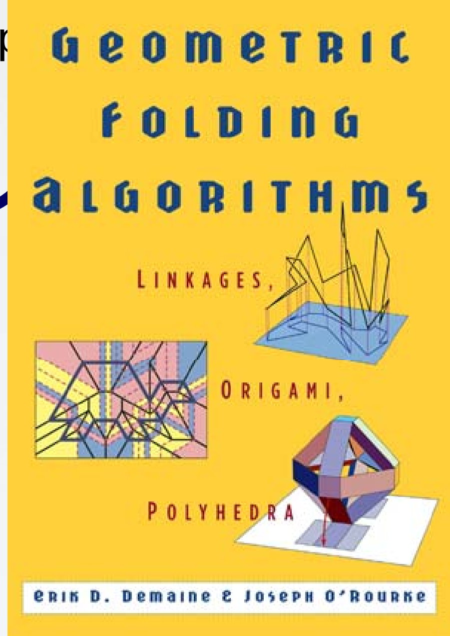


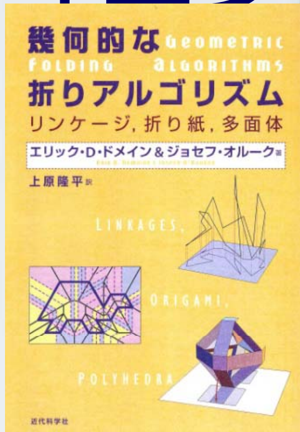




http://www.jaist.ac.jp　mi/

折り紙とコン　ナイエンス





- バイブル的な本の発刊:

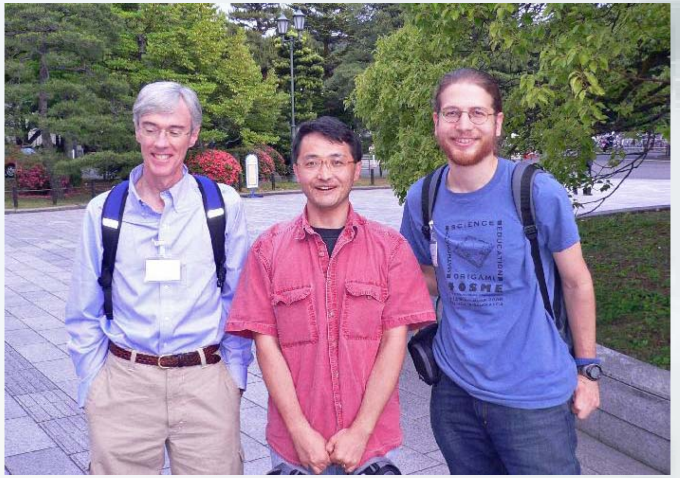
- 日本折り紙学会における国内会議:

折り紙の科学・数学・教育　研究集会＠東京(白山)

◆ 第1回:2006年12月17日
◆ 第2回:2007年5月26日
…
◆ 第8回:2010年6月13日

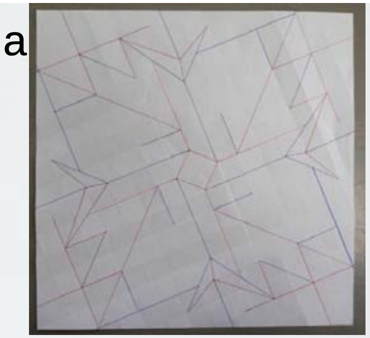
論文誌の発刊

◆ 2010年(年度?)末に第1号



http://www.jaist.ac.jp/~ueha

今日の話の背景



川崎ローズ

- 2008年6月22日、
  第4回「折り紙の科学・数学・教育研究会」にて、、、
  - 川崎敏和氏(数学者だけど川崎ローズの作者として有名)いわく:
  - 「数学者としては、解の存在さえわかれば、あとはどうでもいい」

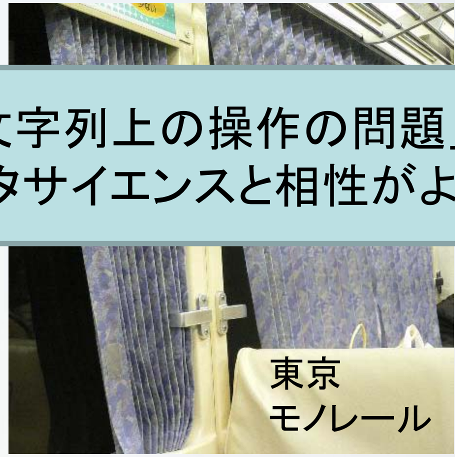
- 計算機科学者である上原は…
  - 解の求め方とその計算コストが大切!!
    - 良いアルゴリズム
    - 計算量的な困難さ

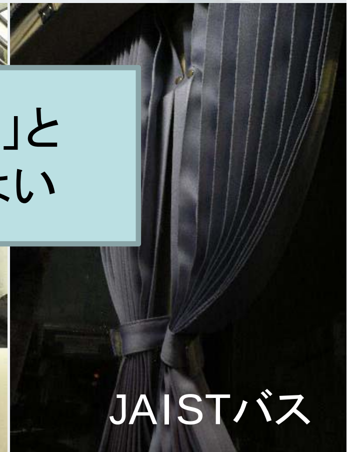
計算コストだけが問われる
よい問題はないか？？？

じゃばら折り = 1次元折り紙

- 山折りと谷折りが等間隔に交互に続く
- 折り紙の基本ツール
- 応用も…?
- 山/谷を一般化したときの複雑さとは?

「(M/Vによる)2進数文字列上の操作の問題」と考えると、コンピュータサイエンスと相性がよい





折り紙の複雑さ/効率(?)

- 計算機科学の視点で考えよう…
- 例えばチューリング機械モデルにおける2種類の資源とは
  1. 時間:基本演算の適用回数
  2. 領域:計算に必要なメモリ量

折り紙の複雑さ/効率(?)

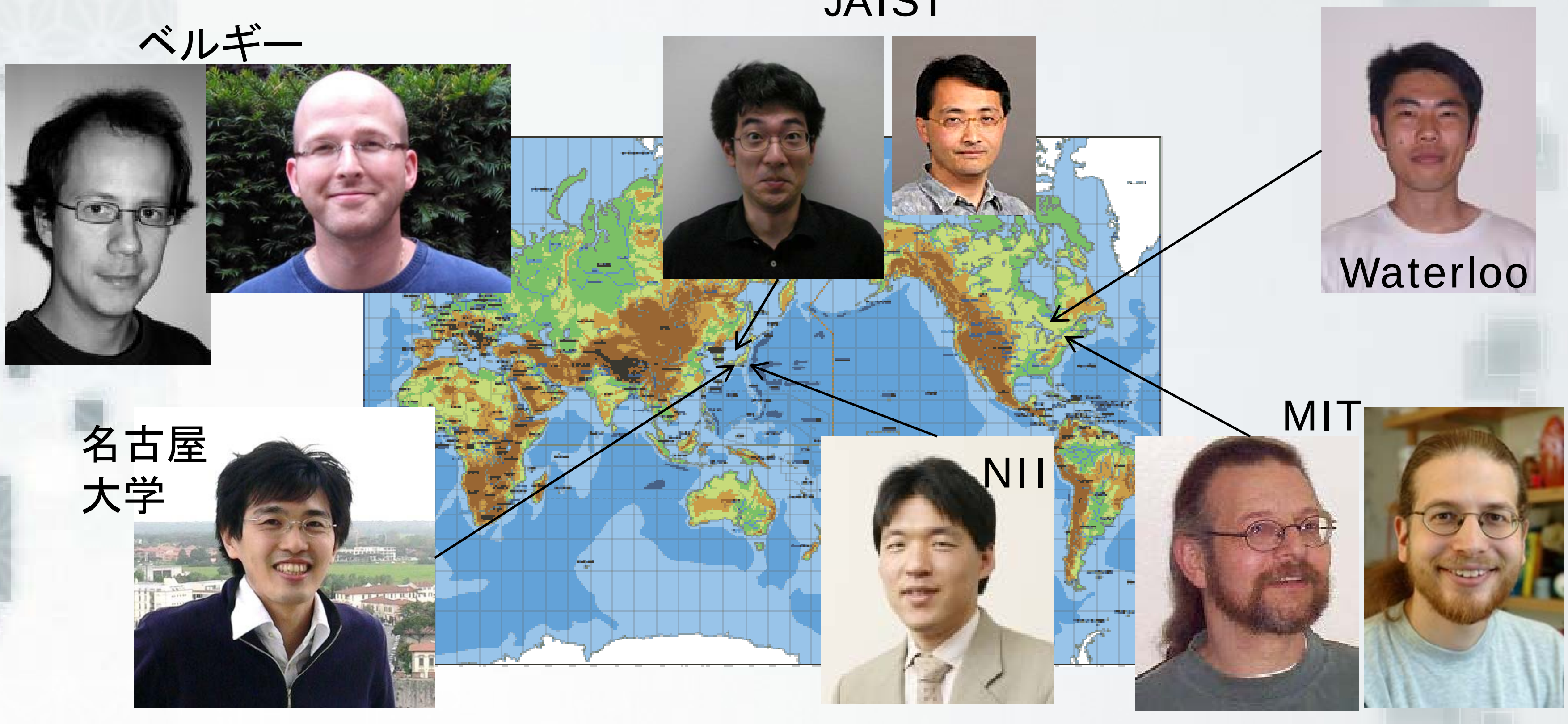
- 計算機科学の視点で考えよう…
- 折り紙モデルにおける2種類の資源とは？

1. 時間…折り(基本演算)の回数
   - J. Cardinal, E. D. Demaine, M. L. Demaine, S. Imahori, T. Ito, M. Kiyomi, S. Langerman, R. Uehara, and T. Uno: Algorithmic Folding Complexity, *Graphs and Combinatorics*, accepted, 2010.
2. 領域…???
   - R. Uehara: Stretch Minimization Problem of a Strip Paper, *5th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*, 2010/7/13-17.
   - R. Uehara: On Stretch Minimization Problem on Unit Strip Paper, *22nd Canadian Conference on Computational Geometry*, pp. 223-226, 2010/8/9-11.

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/

1. 時間…折り(基本演算)の回数

- J. Cardinal, E. D. Demaine, M. L. Demaine, S. Imahori, T. Ito, M. Kiyomi, S. Langerman, R. Uehara, and T. Uno: Algorithmic Folding Complexity, *Graphs and Combinatorics*, accepted, 2010.



じゃばら折り

「中央で半分に折る」ことが
もっとも多くの折り目を
つけることができる

➤じゃばら折り(1次元折り紙)

- 単純な方法: n 回折ればよい
- n 個の折り目をつけるには $\log n$ 回は折らないといけない

- もっと効率よく折り目をつけることはできるのか…?
- 一般のM/Vパターンに対してはどうか？

- CCCG 2008 の “Open Problem Session” にて上原が提案(Ron Graham が絶賛してくれた!!)
- 何度かの発表と結果の改善を経て多くの共著者を得て論文に至る

じゃばら折りの複雑さ

モデル:紙の厚みは0

[最大の疑問] n 個の折り目からなるじゃばら折りは n 回折らなければ作れないのか？

1. 答えは“No”!
   - *任意のM/Vパターン*は高々 $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil \log n \rceil$ 回折れば作れる！
   - では $o(n)$ 回ではどうか?
   - Yes!! …わずか $O(\log^2 n)$ 回の折りで作る方法がある

2. 下界; $\log n$
   - じゃばら折りは $\Omega(\log^2 n/\log\log n)$ 回未満の折りでは作れない!!

一般化じゃばら折りの複雑さ

[次の疑問] 与えられた長さ n の任意の M/V パターンを折る問題の複雑さはどうか？

- ***An任意のM/Vパターン*高々 $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil \log n \rceil$ 回折れば作れる!!**

1. 上界:
   どんなM/Vパターンも $(4+\varepsilon)\frac{n}{\log n}+o\left(\frac{n}{\log n}\right)$ 回の折りで作れる
2. 下界:
   ほぼすべてのM/Vパターンは $\frac{n}{3+\log n}$ 回以上折らないと作れない

[おまけ] じゃばら折りは例外的に簡単なパターンであった！

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/

2種類のパリティがあるところが{難しい|面白い}
- “表/裏”は層のパリティで決まる
- 同じパリティでないと重ねて折れない

•定義

入力: 長さ $n+1$ の紙と $\{M, V\}^n$ の文字列 s
出力: s にしたがって等間隔に折り目のついた紙

基本操作

1. 整数点で{一部/全部}の紙を{山/谷}折りにして平坦にする (=単純折りモデル)
2. {すべて/任意/直前}の折り目で開く (=単純折りの逆操作)

規則(仮定)

1. それぞれの折り目は最後に折られた方向を記録している
2. 紙は折り目を除いて剛体

目標: 折り操作の回数の最小化

注意: 紙を開く操作のコストは気にしない

• 単位長折りの上界(1)

- どんなパターンも $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil \log n \rceil$ 回で折れる

1. 指定にしたがって紙を中心で半分に折る
2. 折られた紙の中心を見て、MとVの多数決をとる
   (裏返った紙に注意)
3. 多数決に従って中心で半分に折る
4. 2と3を繰り返す
5. 全部広げる
6. 間違った折り目を逐一直す

ステップ1~4の折りは $\log n$ 回でステップ6は高々 $n/2$ 回の折り

じゃばら折りの上界(1)

[観測]
もし $f(n)$ 回の折りで「n 個の山折り」が作れるなら、
n 個のじゃばら折りは $2f(n/2)$ 回の折りで作れる

以下の方法でよい:

- 偶数点だけに着目して $f(n/2)$ 回折って全部山折りにする;
- 紙を裏返す;
- 奇数点だけに着目して $f(n/2)$ 回折って全部山折りにする.

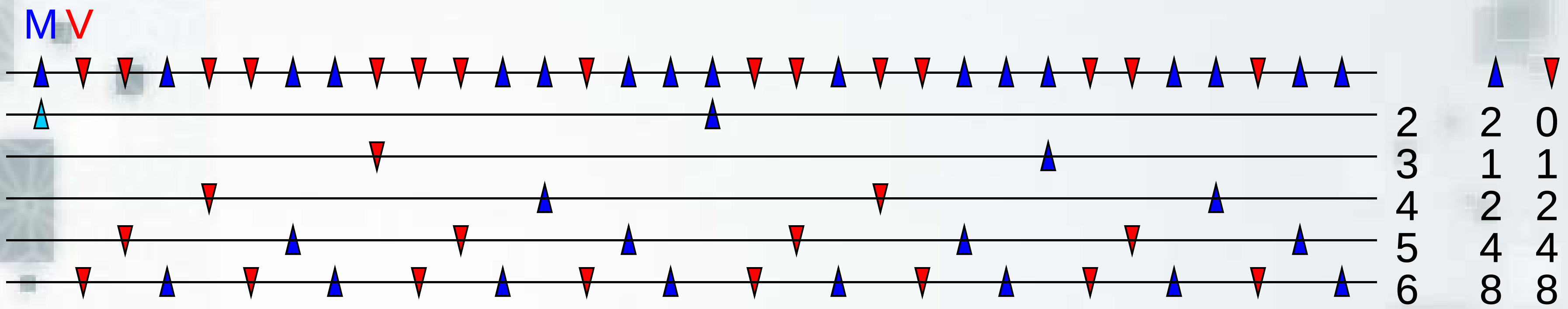
よって以下では「山折り問題」を考える

参考:「山折り問題」のO($n^{0.69}$)アルゴリズム

[定理] 山折り問題を解くO($n^{0.69}$) アルゴリズム

[証明] $n=2^k$ として以下のアルゴリズムを使う

1．左端を山折りにして、長さを 2^k-1 にする
2．中央で山折りにする
3．長さ1になるまで2を繰り返す
4．全部開いて…

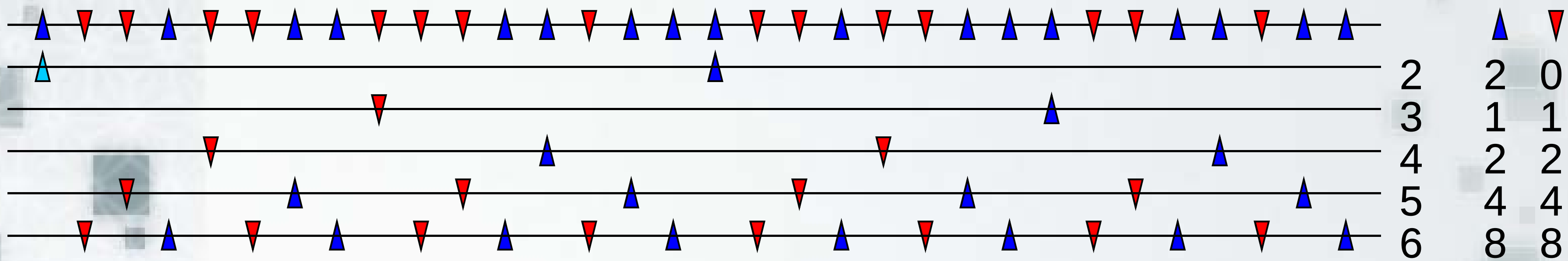


k+1回折って 2^{k-1}+1 個の山と 2^{k-1}-1 個の谷ができる

参考:「山折り問題」のO($n^{0.69}$)アルゴリズム

[定理] 山折り問題を解く O($n^{0.69}$) アルゴリズム

[証明]



2^{k-1}-1 個の谷は独立で等間隔な k-1 個の層に分けられる!!

$$\therefore\quad f(2^k) = 1 + k + f(2^{k-2}) + f(2^{k-3}) + \cdots + f(4) + f(2) + f(1)$$

$$f(2^{k-1}) = k + f(2^{k-3}) + \cdots + f(4) + f(2) + f(1)$$

$$f(2^k) - f(2^{k-1}) = f(2^{k-2}) + 1$$

$$(f(2^k) + 1) = (f(2^{k-1}) + 1) + (f(2^{k-2}) + 1)$$

k に関するフィボナッチ数列！

参考:「山折り問題」のO($n^{0.69}$)アルゴリズム

➢[定理] 山折り問題を解くO($n^{0.69}$) アルゴリズ

[証明]

k に関するフィボナッチ数列！

$$(f(2^k)+1)=(f(2^{k-1})+1)+(f(2^{k-2})+1)$$

[フィボナッチ数列]
$F_0=0,\ F_1=1,\ F_i=F_{i-1}+F_{i-2}\ (i>1)$
0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,…

$$F_i=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right)$$

初期条件:

$$f(2^0)=1,\ f(2^1)=2,\ f(2^2)=4$$

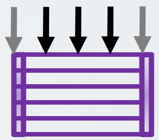
よって $\quad f(2^k)+1=F_{k+3}$

$$\therefore\ f(n)=f(2^k)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+3}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+3}\right)-1\sim\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+3}$$

$$=O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\log n}\right)=O\left(n^{\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)=O(n^{0.694242})$$

□

山折り問題を $\log^2 n$ 回の折りで解くアルゴリズム



ステップ1;

1. 「半分に折る」を繰り返して以下をえる ($\log n$-2 回の折り): [vvv]
2. 3回山折りして以下を得る: [MMM]
3. 開く; vMMMvvvvvMMMvvvvvMMMvvvvvMMMvvvvv…

ステップ2; [MvvvvvM]

1. すべての “vvvvv”が重なるように半分折りを繰り返す($\log n$-3 回折る)
2. 5回山折りして以下を得る: [MMMMMMM]
3. 開く; vMvMMMMMMMvMvvvvvMvMMMMMMMvMvvvvvMvM

ステップ3; “vvvvv” が一つ残るまでステップ 2 を繰り返して以下を得る:

vMvMMMvMMMvMMMMMMMvMMMvMMMvMvvvvvMvM

ステップ4; すべてのとびとびの v を一つずつ折る.

• ステップ2~3の繰り返し回数; $\log n$
• ステップ4での v の個数; $\log n$

折りの回数のトータル~ $(\log n)^2$

• 単位長折り問題の下界

[定理] $o(2^n)$個の例外を除くほぼすべてのパターンは

$\Omega(n/\log n)$ 回折らないと作れない

{表/裏}×{前/後}

[証明] 単純な数え上げ法による:

- n 個の折り目のパターンの数 $> 2^n/4 = 2^{n-2}$
- k 回折ったことで作れるパターンの数 <

$$\underbrace{(2\times n)}_{\text{山/谷, 位置}} \times \underbrace{(n+1)}_{\text{可能な展開}} \times (2\times n) \times (n+1) \times \ldots \times (n+1) \times (2\times n)$$

$$<(2n(n+1))^k$$

よって以下が成立する場合、高々 k 回の折りではすべてのパターンは作れない: $\sum_{i=0}^{k}(2n(n+1))^i \le (2n(n+1)+1)^k < 2^{n-2}$

ここで $n \ge 2, k = O\left(\dfrac{n}{\log n}\right)$ とおくと $(2n(n+1)+1)^k = o(2^n)$ をえる。 □

任意のパターンを $cn/\log n$ 回の折りで作るアルゴリズム（概要）

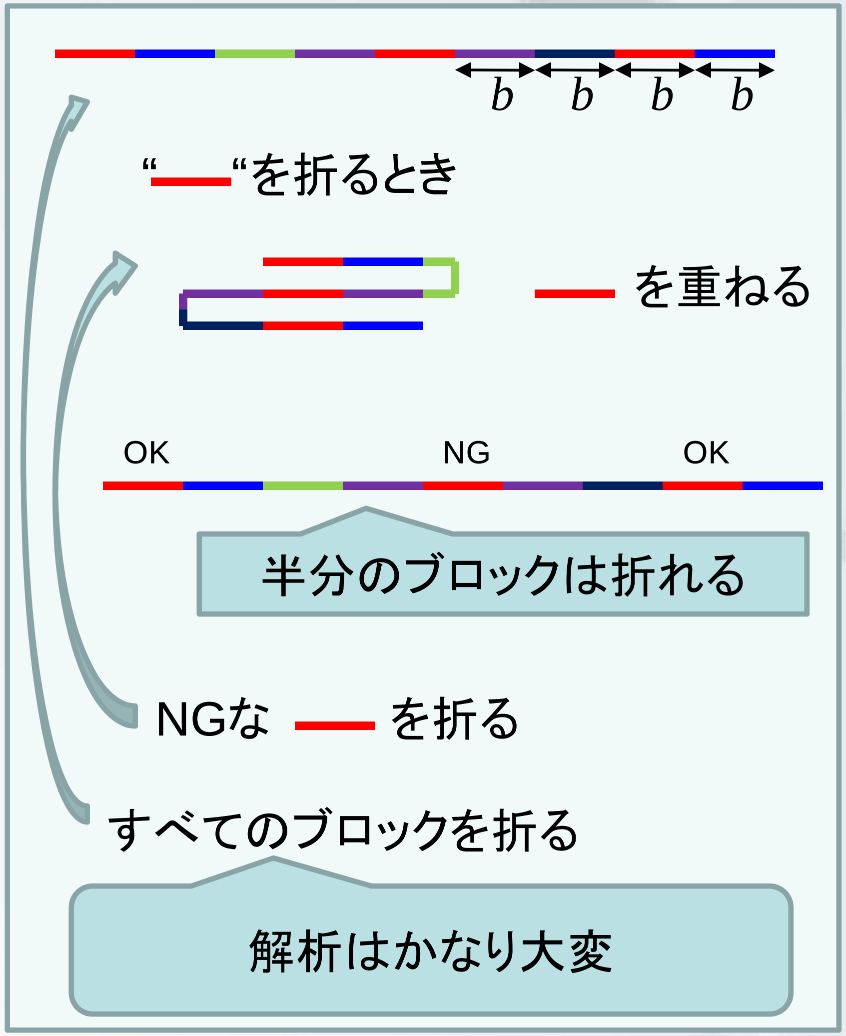
nに応じて適切に b を選ぶ.

準備：

- パターンを大きさbのブロックに分割；
  1. 各ブロックは $O(n/\log n)$ 回で折れる
  2. 2^b はそれほど大きくない

アルゴリズム：

- 可能なそれぞれのブロックパターンに対して
  1. 同じパターンをもつブロックが重なるように半分折りする
  2. 裏返っているブロックを直す
  3. 重ねるために折った所を直す



・ここまでの未解決問題

- じゃばら折り
  - 上界 $O(\log^2 n)$ と下界 $\Omega(\log^2 n / \underline{\log\log n})$ を近づける
- 「ほぼすべてのパターンは難しい」と言うけれど…
  - $(cn/\log n)$ 回の折りが本当に必要な<u>具体的な M/V パターン</u>の構成方法はわかっていない
- 紙を開くコストは無視しているけど…
  - 「折る回数」+「開く回数」を最小化するとよいかも
  - (たかだか折った回数しか開けないけど…)

OHPシートで作った川崎ローズ
（デザイン：川崎敏和、折った人：上原）

曲線折りの例
（デザイン、折った人：Martin Demaine）

上原のところにある折り紙作品

あのお父さん
（デザイン：上原、折った人：上原）

たぶん世界最小前川デビル
（デザイン：前川淳、折った人：上原）

折り紙の複雑さ/効率(?)

- 計算機科学の視点で考えよう…
- 折り紙モデルにおける2種類の資源とは？

1. 時間…折り(基本演算)の回数
   - J. Cardinal, E. D. Demaine, M. L. Demaine, S. Imahori, T. Ito, M. Kiyomi, S. Langerman, R. Uehara, and T. Uno: Algorithmic Folding Complexity, *Graphs and Combinatorics*, accepted, 2010.
2. 領域…???
   - R. Uehara: Stretch Minimization Problem of a Strip Paper, *5th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*, 2010/7/13-17.
   - R. Uehara: On Stretch Minimization Problem on Unit Strip Paper, *22nd Canadian Conference on Computational Geometry*, pp. 223-226, 2010/8/9-11.

一般化じゃばら折り問題

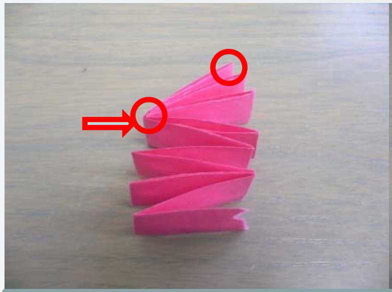
- 入力：等間隔の山折りと谷折りの列
- 出力：入力を実現する平坦な折りたたみ状態

[定理] どんな入力に対しても、平坦な折りたたみ状態が存在する。

[証明(?)] 端から一つずつ折っていけばよい。

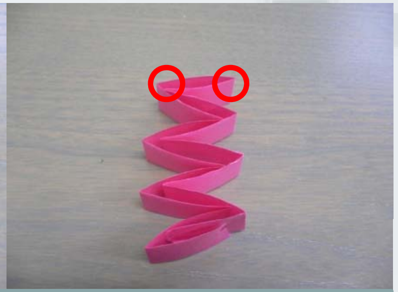
[疑問] 「良い平坦折り状態」とは？？

例：山谷山谷山谷山山谷山谷山谷山



左側の一つの折り目に右側を全部入れる

× 良くない！！



どの折り目も2枚以下の紙しか挟まっていない

○ 良い！！

• 平坦折りの「良さ」

ある折り目の伸び（ストレッチ）
＝その折り目に挟まった
他の紙の枚数

➤ **[疑問] 「良い平坦折り状態」とは？？**

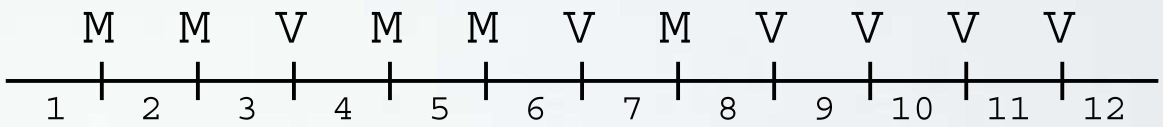
- 「折り目に挟まった紙」が少ないほど「良い」！
  - 厚みがあっても精度が確保されやすい
  - バランスがよさそう
  - 「時間」と「伸び」はトレードオフがある
    （計算機モデルにおける「時間」「領域」に似ている）
- 良さの指標
  1. 折り目の伸びの<u>最大値</u>
  2. 折り目の伸びの<u>平均値</u>
  3. 折り目の伸びの総和

指標[2]と[3]は本質的に同じ:
平均値＝(総和/折り目の数)

指標による結果の違い

答えが自明ではない例

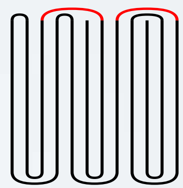
入力: 山山谷山山谷山谷谷谷谷



折りたたみ方: 正当な平坦折りの個数:100通り

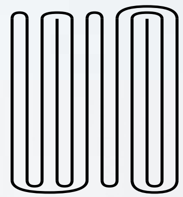
解答: 指標によって結果が違う(しかも両方唯一解):

- 最大値が最小値3の唯一解
  [5|4|3|6|7|1|2|8|10|12|11|9]



総和=13

- 総和が最小値11の唯一解
  [5|4|3|1|2|6|7|8|10|12|11|9]



最大値=4

最小伸び折りたたみ問題(仮)

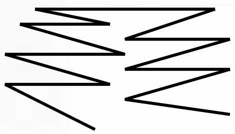
__入力__: 長さ $n+1$ の紙と[山/谷]の長さ n の文字列 s

__出力__: s に従って平坦に折られた紙

目的: 伸びの少ない「良い」平坦折り状態

- わかっていること;
  1. 2種類の最適化問題の解答は違う場合がある
  2. パターンがじゃばら折りである⇔伸びが0である⇔折り方が一意的
  3. 指数関数的な組合せをもつ入力例がある

[証明]　余白がせますぎて書けない



[例]　山谷山谷山谷…山谷山山谷山谷山谷…山谷山

最小伸び折りたたみ問題(仮)

- 未解決問題:
  - $\mathcal{NP}$完全(ほぼ解決?)
  - 「伸び≦ k 」としたら多項式時間で解けるか?
  - もっとも組合せの多いパターンは?

- 既解決問題:
  1. ランダムなパターンの折りたたみ方の期待値
  2. (「単純折りモデル」の万能性)

最小伸び折りたたみ問題(仮)

既解決問題:

1. ランダムなパターンの折りたたみ方の期待値
   - 長さ n のランダムな山谷パターンに対する折りたたみ方 $f(n)$ が相対に小さければ、力技で解けるかもしれない…
   - …という考えは甘かった
   - 実験的: $f(n)=\Theta(1.65^n)$
   - 理論的: $f(n)=\Omega(1.53^n)$ かつ $f(n)=O(2^n)$

   …単純な全数チェックは望みがない

2. (「単純折りモデル」の万能性)

最小伸び折りたたみ問題(仮)

1. ランダムなパターンの折りたたみ方の期待値

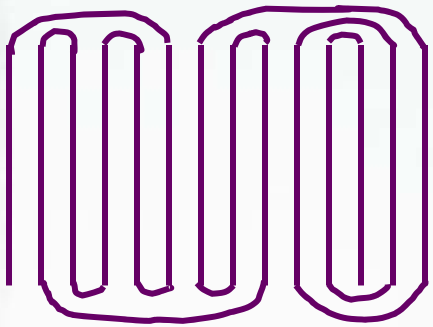
- 長さ n の紙を(折り目は考えずに)長さ1になるまで折りたたむ方法を $F(n)$ とすると、$f(n)=F(n)/2^n$

- $F(n)=\Omega(3.06^n)$ かつ $F(n)=O(4^n)$ を示せばよい。

最小伸び折りたたみ問題(仮)

$F(n)$の上界: $F(n)=O(4^n)$

[証明] 満たすべき条件:奇数折り目と偶数折り目がそれぞれ入れ子状になっていなければならない



入れ子

(( ) ( )) (( ) (( )))

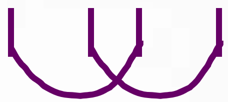
$n/2$組の( )の組合せ
＝カタラン数$C_{n/2}$

×

入れ子

·(( ) ( ) ( )) ((·))

$n/2$組の( )の組合せ
＝カタラン数$C_{n/2}$



ダメ！

連結性は考慮していない

最小伸び折りたたみ問題(仮)

$F(n)$の下界: $F(n)=\Omega(3.07^n)$

[証明] 「紙の最後の $k+1$ 長を折ってのり付け」を考える;

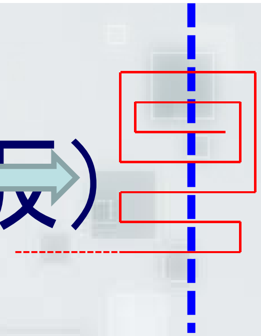
- $F(n)$: 長さ $n+1$ の紙の折りたたみ方
- $g(k)$: 長さ $k+1$ の紙の折りたたみ方
  ただし左端点は覆われない

n は変数だけど
k は定数

とすると以下を得る: $f(n) \geq (g(k))^{\frac{n}{k-1}} = \left(g(k)^{1/(k-1)}\right)^n$

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/

最小伸び折りたたみ問題(仮)



$F(n)$の下界: $F(n)=\Omega(3.07^n)$

[証明] 「紙の最後の $k+1$ 長を折ってのり付け」を考える;

- $g(k)$: 長さ $k+1$ の紙の折りたたみ方(ただし左端点は覆われない)とすると

$g(k)$=“the number of ways a semi-infinite directed curve can cross a straight line k times”, “The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences” (A000682)

上記のデータベースによると、 $g(43)=830776205506531894760$.

よって

$$f(n) \geq (g(k))^{\frac{n}{k-1}} = \left(g(k)^{1/(k-1)}\right)^n$$

に代入すればOK!

最小伸び折りたたみ問題(仮)

- 既解決問題:

2. (「単純折りモデル」の万能性)

[単純折りモデルの万能性]:

「単位長の折り目のついた帯状の紙の任意の折りたたみ状態は、単純折りを繰り返すだけで必ず作れる」

- 問題が(単純折りモデル上で)well-defined
- 見た目ほど自明な結果ではない

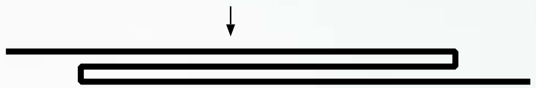
単純折りモデル

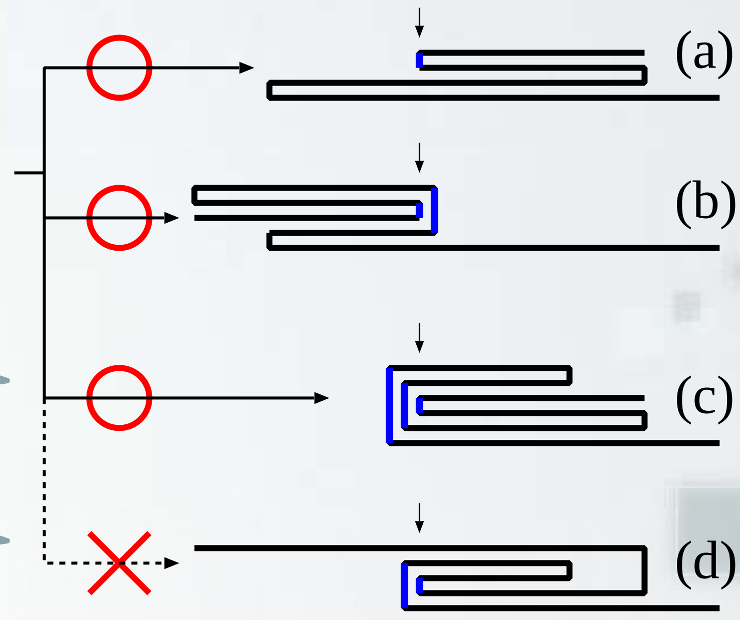
単純！

単純折りモデルでの基本操作

1. (平坦な状態から)
2. 1点を選ぶ
3. 内側の層を何枚か谷折りにする
   単なるフリップのみ
4. 再び平坦な状態へ

折り紙が
剛体でもOK





山折りは全層を裏から谷折り

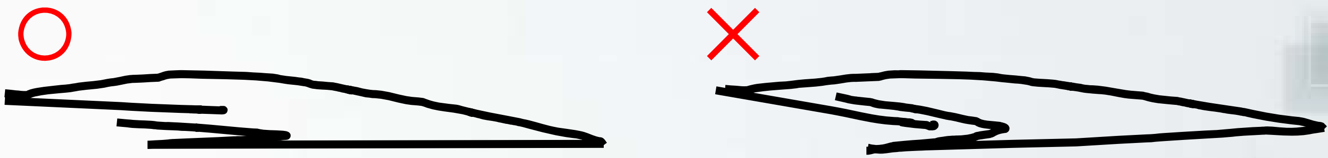
隙間にもぐらせてはいけない！

少し一般的な視点から...

単位長ではない1次元折り紙

- そもそも折れないパターンがある;

- 単純折りだと折れないパターンもある;



「最後の折り」が存在しない！

少し一般的な視点から...

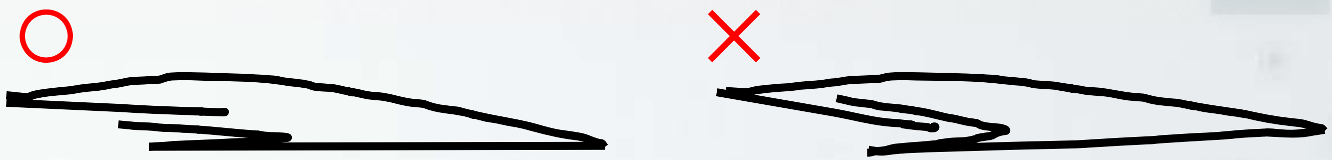
単位長の1次元折り紙

- 任意の*M/V* パターンが与えられたとき、単位長にまで折りたたむことはできるのか?
  - "Yes"; 端から一つずつ折っていけばよい。
- 単位長の任意の「折りたたみ状態」が与えられたとき、これは折れるのか?
  - どんな折り方でもよければ "Yes";
    - 「2次元空間のリンケージは絡まない」という（解決に10年以上かかった）大問題と関連がある
    - 直感的には「折りたたみ状態」を「ふんわりと」ほどいて開く。この操作を逆回しすればよい。
    - ✓ …が、これは「折り紙」とは言えない!!
  - **もっと単純なモデルで"Yes"と言いたい!!**

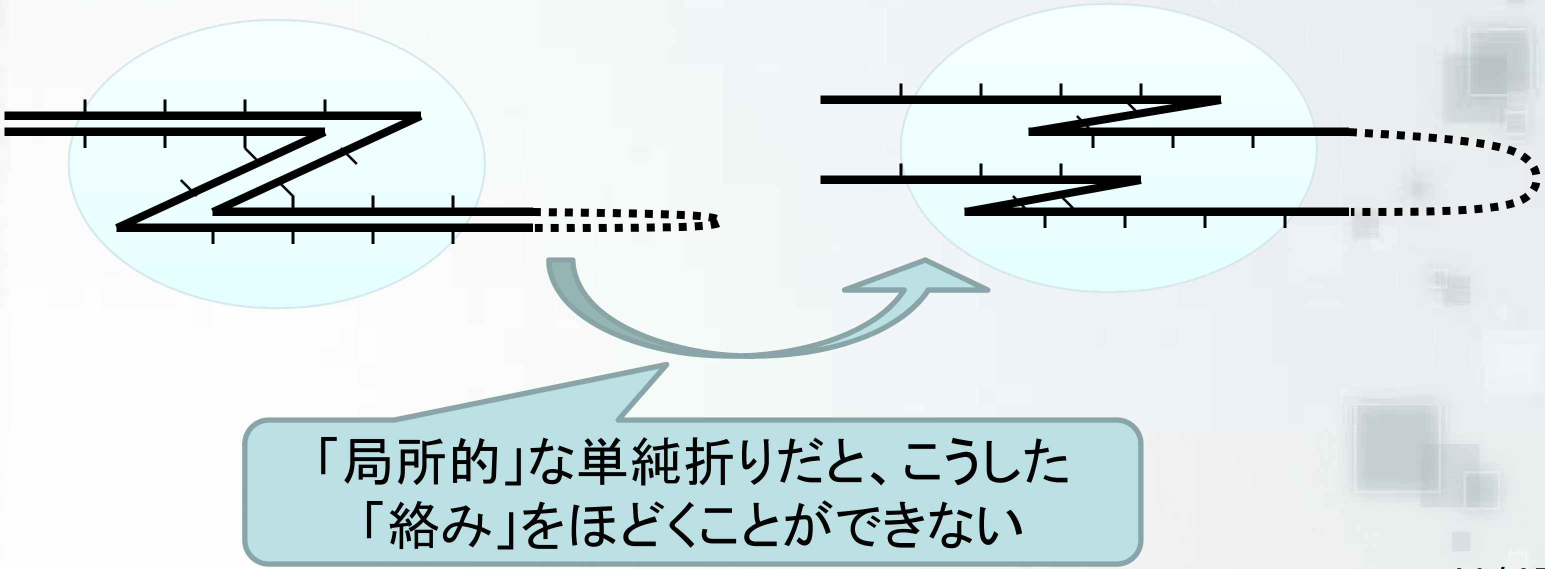
そこで単純折りモデル!

単純折りモデルでも、

- 単位長でなければ「万能定理」は成立しない



- 「局所的な戦略」だけでは折れない/開けない



万能定理

- 単位長折りの紙と単純折りモデルにおける万能定理;

> 折り目が等間隔の紙の任意の平坦折り状態 P は
> たかだか $2n$ 回の単純折りで折ることができる

[証明]

ポイント : P が折れる必要十分条件は、P を単純折りで平坦に戻せること。したがって任意の平坦折り状態 P をたかだか $2n$ 回の単純折りで平坦に広げられることを示す。

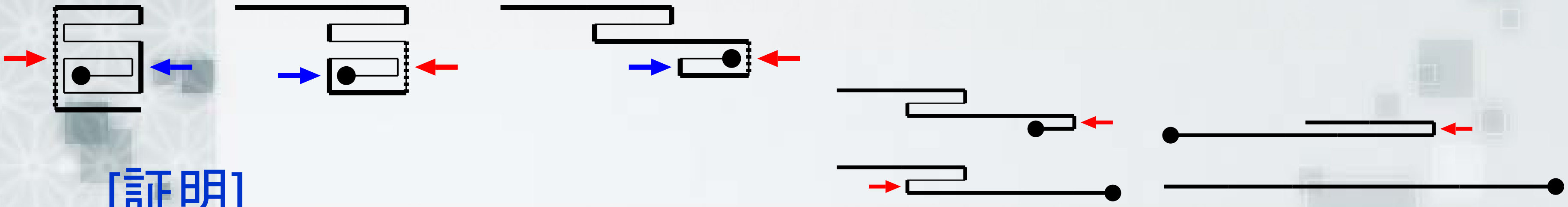
[ステップ1] 端点をむき出しにする

- 中に巻き込まれている端点を外から見えるようにする

[ステップ2] 端点から紙を剥いていく

- 後半の平坦部分を広げていく

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/



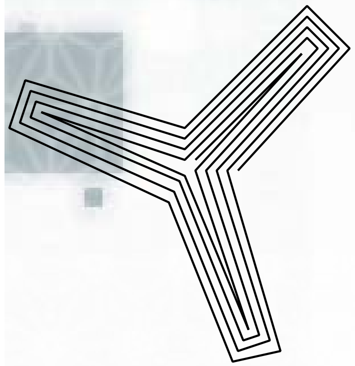
[証明]

[ステップ1] 端点をむき出しにする

- 端点が見えていないならば、「もっとも端点に近い見えている点」の奥を見えるように折る
- たかだか n 回開くと、端点が見えるようになる

[ステップ2] 端点から紙を剥いていく

- 「見える端点を含む最後の平坦な部分」をフリップして、その部分の長さを伸ばしていく
- たかだか n 回開けば、平坦な紙を得る



[注意]

それぞれのステップで、同じ折り目に何度も操作をすることがある

そのため、操作の回数全体のトータルを n でおさえられない

(ように見える)

折り目が等間隔の紙の任意の平坦折り状態 P は
たかだか $2n$ 回の単純折りで折ることができる

未解決:

- 展開の回数はたかだか n にできるのでは?
- 折り目が等間隔でないとき、単純折りで「折れない」かどうかを判定する問題は解けるか?

後半の未解決問題と課題

- 最小伸び折りたたみ問題:
  - どんなときなら解けるのか?
    - $\mathcal{NP}$完全性の証明をちゃんと示す
    - 「伸び≦k」という判定問題は多項式時間で解けるか?
  - もっとも多くのたたみ方をもつパターンとはどのようなものか?
- 拡張
  - 単位長でない1次元折り紙
  - 2次元 (地図折り問題:超難問と予想されている)
- 折り紙における妥当な「領域計算量」とは?
  - 折りに必要な机の広さ?
    - 1次元なら妥当性があるけど2次元だとちょっと…