最適な折りたたみを見つける問題の難しさ

上原隆平 (北陸先端科学技術大学院大学)

uehara@jaist.ac.jp
http://www.jaist.ac.jp/~uehara

じゃばら折りの複雑さに関する研究

…の続編

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/

• じゃばら折りとは…

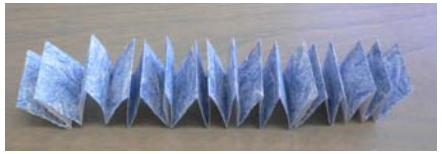
- 山折りと谷折りを等間隔で交互に繰り返した折り
- 基本的な折りの一つ
- 応用もたくさんある

http://km-sewing.seesaa.net/article/60694279.html

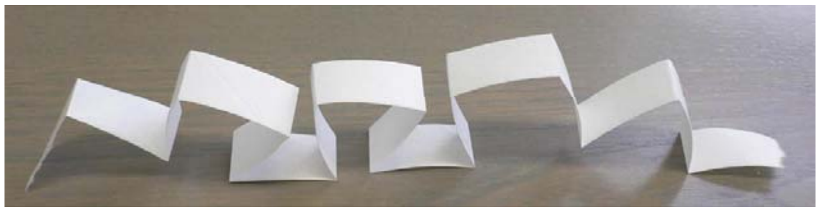
じゃばら折り

- 普通のじゃばら折り

モデル： 紙の厚みは0



- ...をもうちょっと一般化して
  - 入力：山折りと谷折りの列が等間隔で与えられる
    - 例：山谷山山谷谷山山谷谷山山谷山谷
  - 出力：上記の入力を実現する平坦な折りたたみ状態



じゃばら折りの一般化

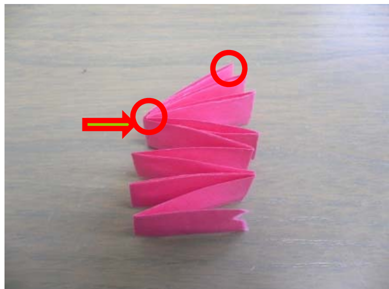
- 一般化じゃばら折り問題
  - 入力：山折りと谷折りの列が等間隔で与えられる
  - 出力：上記の入力を実現する平坦な折りたたみ状態

[定理] どんな入力に対しても、平坦な折りたたみ状態が存在する。

[証明(?)] 端から一つずつ折っていけばよい。

[疑問]「良い平坦折り状態」とは？？

例：山谷山谷山谷山山谷山谷山谷山



左側の一つの折り目に右側を全部入れる

× 良くない！！

どの折り目も2枚以下の紙しか挟まっていない

○ 良い！！

平坦折りの「良さ」

- **[疑問] 「良い平坦折り状態」とは？？**

もっといい名前
募集中

- 「折り目に挟まった紙」が少ないほど「良い」としよう！
  - 厚みがあっても精度が確保されやすい
  - バランスがよさそう
- 良さの指標
  1. 折り目のストレスの最大値
  2. 折り目のストレスの平均値
  3. 折り目のストレスの総和

ある折り目のストレス＝その折り目に挟まった他の紙の枚数

指標[2]と[3]は本質的に同じ:
平均値＝(総和/折り目の数)

指標による結果の違い

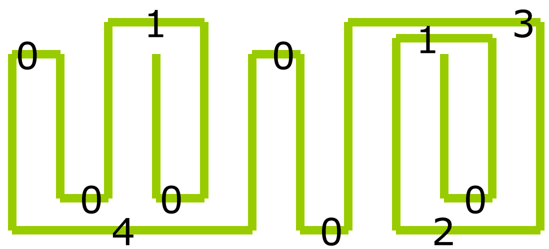
- 答えが自明ではない例

入力: 山山谷山山谷山谷谷谷谷

折りたたみ方: 正当な平坦折りの個数:100通り

解答: 指標によって結果が違う(しかもどちらも唯一解):

- 平均値が最小値1の唯一解
  [5|4|3|1|2|6|7|8|10|12|11|9]



- 最大値が最小値3の唯一解
  [5|4|3|6|7|1|2|8|10|12|11|9]

最小ストレス折りたたみ問題(仮)

入力: 長さ $n+1$ の紙と[山/谷]の長さ n の文字列 s

出力: s に従って平坦に折られた紙

目的: ストレスの少ない「良い」平坦折り状態

- ある折り目のストレス:その折り目に挟まっている紙の枚数
- 2種類の最適化問題; 最大値の最小化&平均値の最小化
- わかっていること;
  1. 2種類の最適化問題の解答は違う場合がある
  2. パターンがじゃばら折りである⇔
ストレスが0である⇔
折り方が一意的
  3. 指数関数的な組合せをもつ入力例がある

[証明] 余白がせまますぎて書けない

[例] 山谷山谷山谷…山谷山山谷山谷山谷…山谷山

最小ストレス折りたたみ問題(仮)

- 未解決問題:
  - そもそも多項式時間で解けるのか？
    - $\mathcal{NP}$困難？
    - 多項式時間で解ける？

…ぜんぜんわかりません ;-)

最初は多項式時間で解けると思ったけど、
どうも「$\mathcal{NP}$困難」のような気がします。。。

最小ストレス折りたたみ問題（仮）

- 未解決問題:
  - 全部のパターンを列挙して挙動を観察した
    - とりあえず力技で全パターンを計算中
      - それぞれの山谷パターンに対して、
        - 可能な折りたたみの個数
        - それぞれの指標の最適な解とその個数

        の一覧表を計算中…
      - n=11 で66時間
      - n=12 で約60日程度、現在90%計算終了

最小ストレス折りたたみ問題(仮)

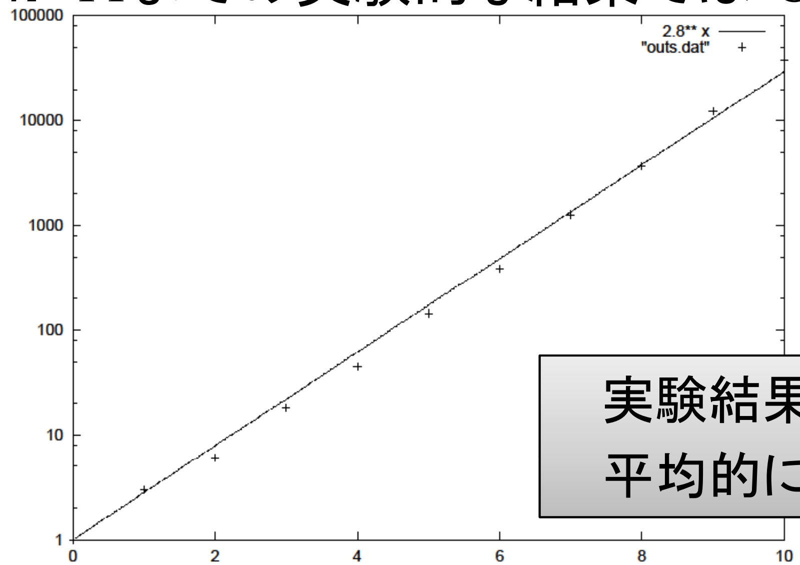
- 未解決問題:
  - 全部のパターンを列挙して挙動を観察した
    - 山谷を無視して、「長さ n の折り目の折りたたみ方」を $X(n)$ 通りとすると、
      - 長さ n の折り目の[山/谷]列の個数:2^n 通り
      - 平均的なパターンだと $X(n)/2^n$ 通り試せばよい?

    ...$X(n)$が 2^n に比べてどのくらい大きいかが知りたい!!
      - それほど大きすぎなければ、簡単に解けるかも
      - 極端に大きければ、相当難問

どうも「相当難問」のようです。

最小ストレス折りたたみ問題(仮)

- 未解決問題:
  - 長さ n+1の紙の折り方の個数$X(n)$
    - 上界:おおざっぱな見積もりでは $(n+1)!\sim O(2^{n\log n})$通り
    - n=11までの実験的な結果では $\Theta(2.8^n)$ 通り



実験結果からは
平均的には$\Theta((2.8/2)^n)=\Theta(1.4^n)$ 通り

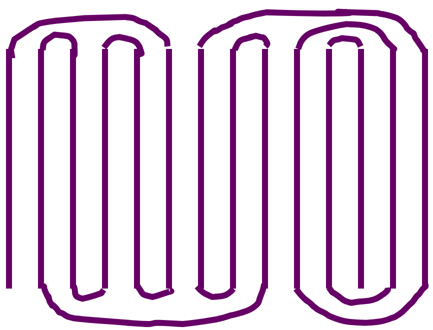
- 理論的な上界;$O(4^n)$通り
- 理論的な下界;どうしても2^nを越えられません

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/

最小ストレス折りたたみ問題(仮)

- 長さ $n+1$ の紙の折り方の個数 $X(n)$ の上界は…
  - 理論的な上界; $O(4^n)$ 通り

[証明] 満たすべき条件: 奇数折り目と偶数折り目がそれぞれ入れ子状になっていなければならない



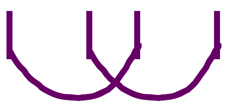
入れ子　(()())(()(()))

$n/2$ 組の()の組合せ ＝カタラン数 $C_{n/2}$

×

入れ子　·(()()())((·))

$n/2$ 組の()の組合せ ＝カタラン数 $C_{n/2}$



ダメ!

最小ストレス折りたたみ問題(仮)

- 未解決問題:
  - 問題そのものの難しさ;$\mathcal{NP}$完全っぽい?
  - 平均的な場合の難しさ;総当たりだと指数関数的?
    - 長さ n+1 の紙の「可能な折り方」の個数の上界は...
      - 「折り目が入れ子」条件から、$O(4^n)$通り
      - n=11までの実験的な結果では $\Theta(2.8^n)$ 通り
      - 平均的なパターンは$\Theta(1.4^n)$ 通りの折り方をもつ?
      - それならば...
    - 長さ n+1 の紙の「可能な折り方」の個数の下界が ある $\varepsilon>0$ に対して $\Omega((2+\varepsilon)^n)$ であることを示したい!!

Help!!