http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 複数の箱を折る展開図

上原隆平@JAIST
(北陸先端科学技術大学院大学)
http://www.jaist.ac.jp/~uehara/
uehara@jaist.ac.jp

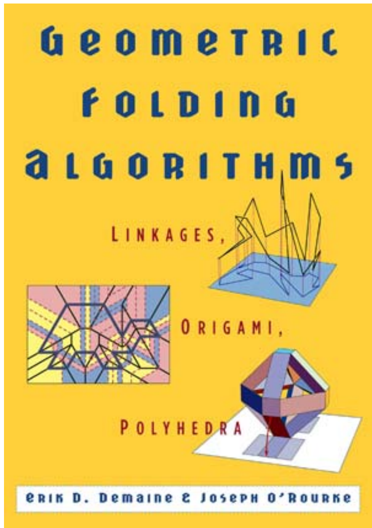
2008/06/22

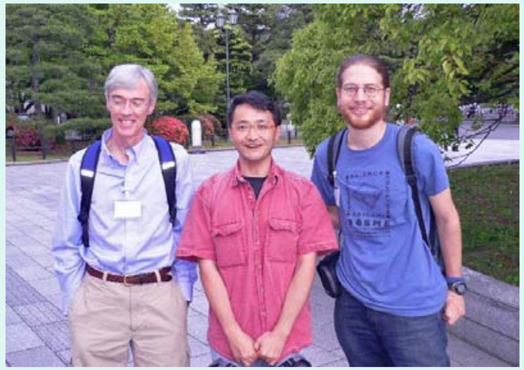
http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# はじめに...

- 2007年6月15日の講演会@JAIST

  “Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra” by Joseph O’Rourke



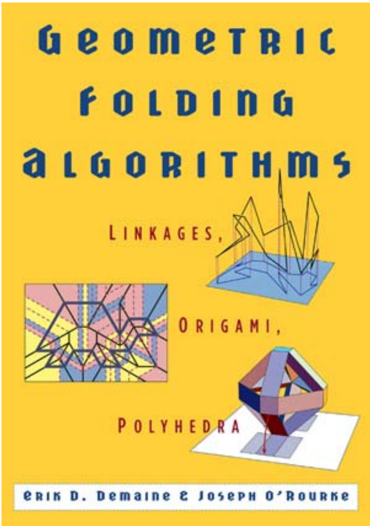
2008/06/22

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# はじめに…

- 2007年6月15日の講演会@JAIST

  “Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra” by Joseph O’Rourke



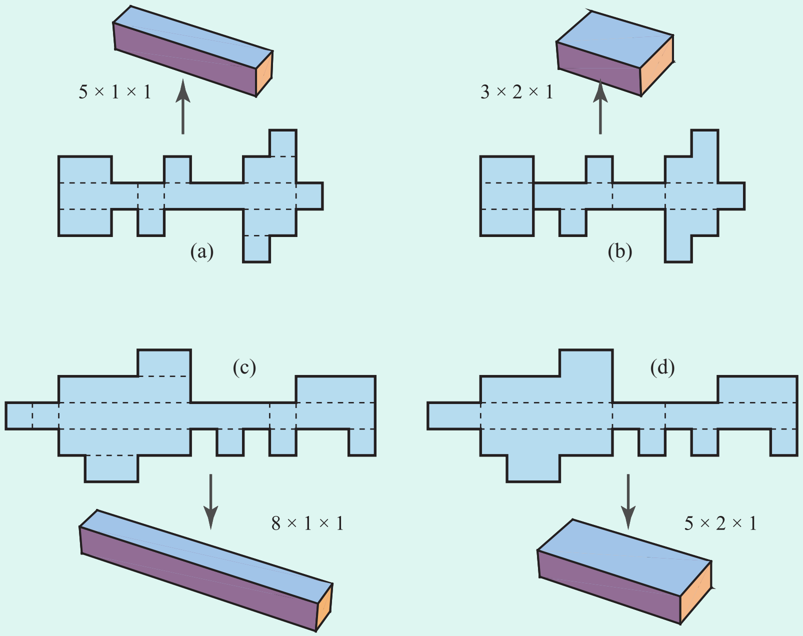
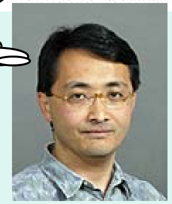




図25.53

[Biedl, Chan, Demaine, Demaine, Lubiw, Munro, Shallit, 1999]

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html

プログラムで
探せるのでは…?

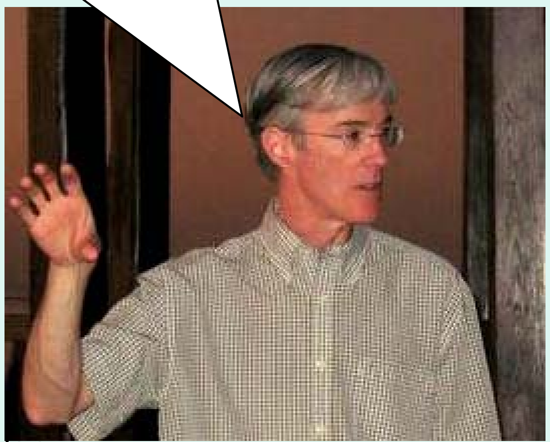


# はじめに…

- 2007年6月15日の講演会＠JAIST

“Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra” by Joseph O’Rourke

- この二つしか知られてない
- 例えば3種類折れるものは??



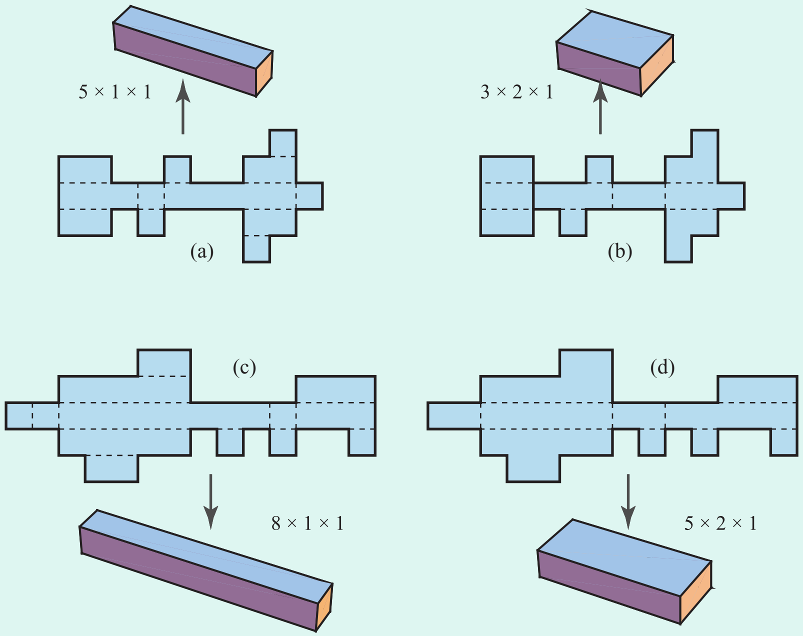
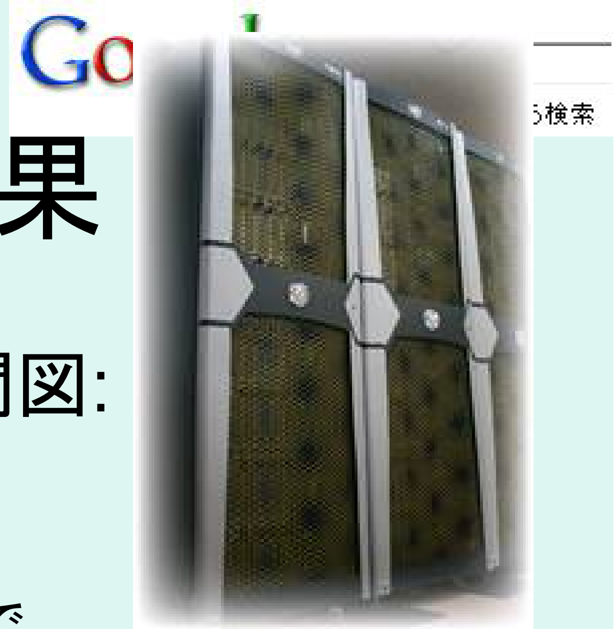



図25.53

2008/06/22

http　c.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html



# 今回得られた結果

- 2種類の箱を作ることができる展開図:
  1. たくさん見つかった。
     - PC (ThinkPad X41)で数百個
     - スーパーコンピュータ (SGI Altix 4700) でさらに1500個以上…合計2000個強
  2. 興味深い展開図
  3. 理論的に<u>無限個</u>あることを証明

本質的に
違うものが

– 展開図発見<u>アルゴリズム</u>(ランダム生成法)

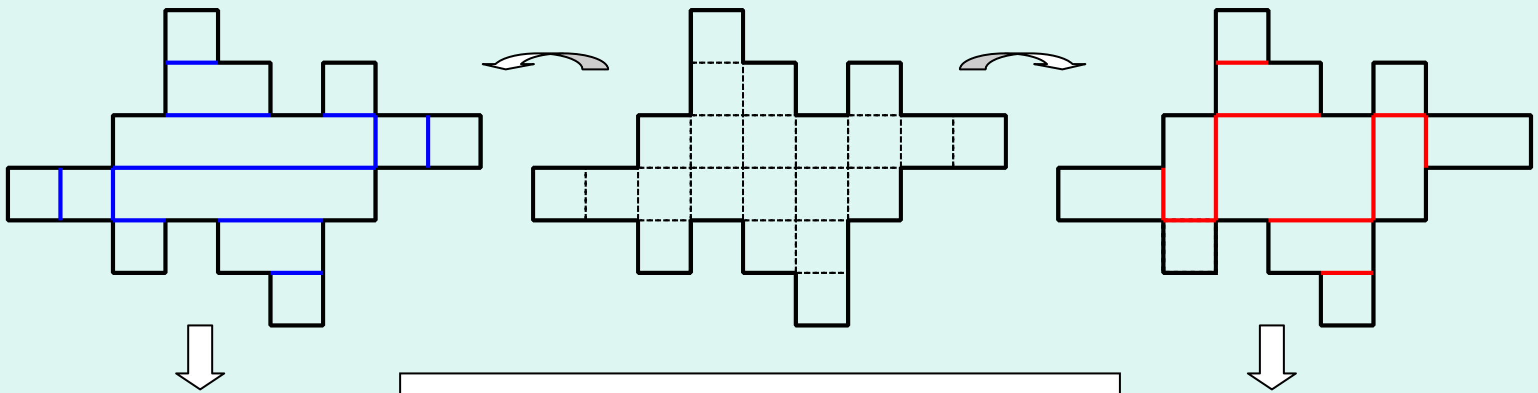
– …3種類以上の箱を作ることができる展開図は見つからなかったｹﾄﾞ…

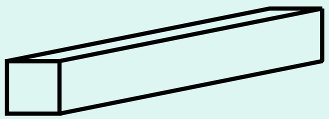
http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html

# 準備

例：
1×1＋1×5＋1×5
＝1×2＋2×3＋1×3
＝11（表面積は22)

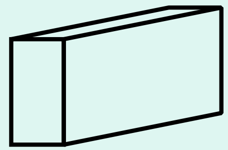
- 「2種類の箱を作ることができる展開図」





1×1×5
= $a$ × $b$ × $c$

- 単位正方形のところで切る/折る
- 面積: $2(ab+bc+ca)$
- 次の式が成立していないとダメ



1×2×3
= $a'$ × $b'$ × $c'$

$$ab+bc+ca=a'b'+b'c'+c'a'$$

組み合わせが
たくさんある
面積が良さそう

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 結果1: 2000個強ある展開図

## 2種類の箱を作ることができる展開図(1)

既存の結果

| 面積/2 | サイズ | 展開図数 | RG($\times 10^7$) |
|---|---|---|---|
| **11** | (1,1,5),(1,2,3) | 541 | 6.7 |
| 15 | (1,1,7),(1,3,3) | 72 | 18.6 |
| **17** | (1,1,8),(1,2,5) | 708 | 28.4 |
| 19 | (1,1,9),(1,3,4) | 41 | 30.4 |
| 23 | (1,1,11),(1,3,5) | 568 | 191.0 |
| | (1,2,7),(1,3,5) | 92 | |
| 27 | (1,1,13)(3,3,3) | 2 | 126.7 |
| | (1,3,6),(3,3,3) | 1 | |

19億

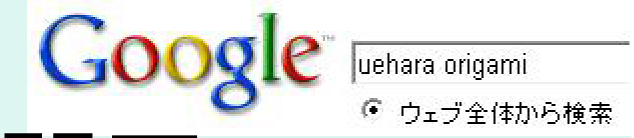
http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 結果1: 2000個強ある展開図

## 2種類の箱を作ることができる展開図(2)

| 面積/2 | サイズ | 展開図数 | RG($\times 10^7$) |
|---|---|---|---|
| 29 | (1,1,14),(1,4,5) | 37 | 89.3 |
| 31 | (1,3,7),(2,3,5) | 5 | 82.4 |
| 32 | (1,2,10),(2,2,7) | 50 | 204.8 |
| | (2,2,7),(2,4,4) | 6 | |
| 35 | (1,1,17),(1,5,5) | 3 | 91.3 |
| | (1,2,11),(1,3,8) | 11 | |
| 44 | (2,2,10),(1,4,8) | 2 | 217.0 |

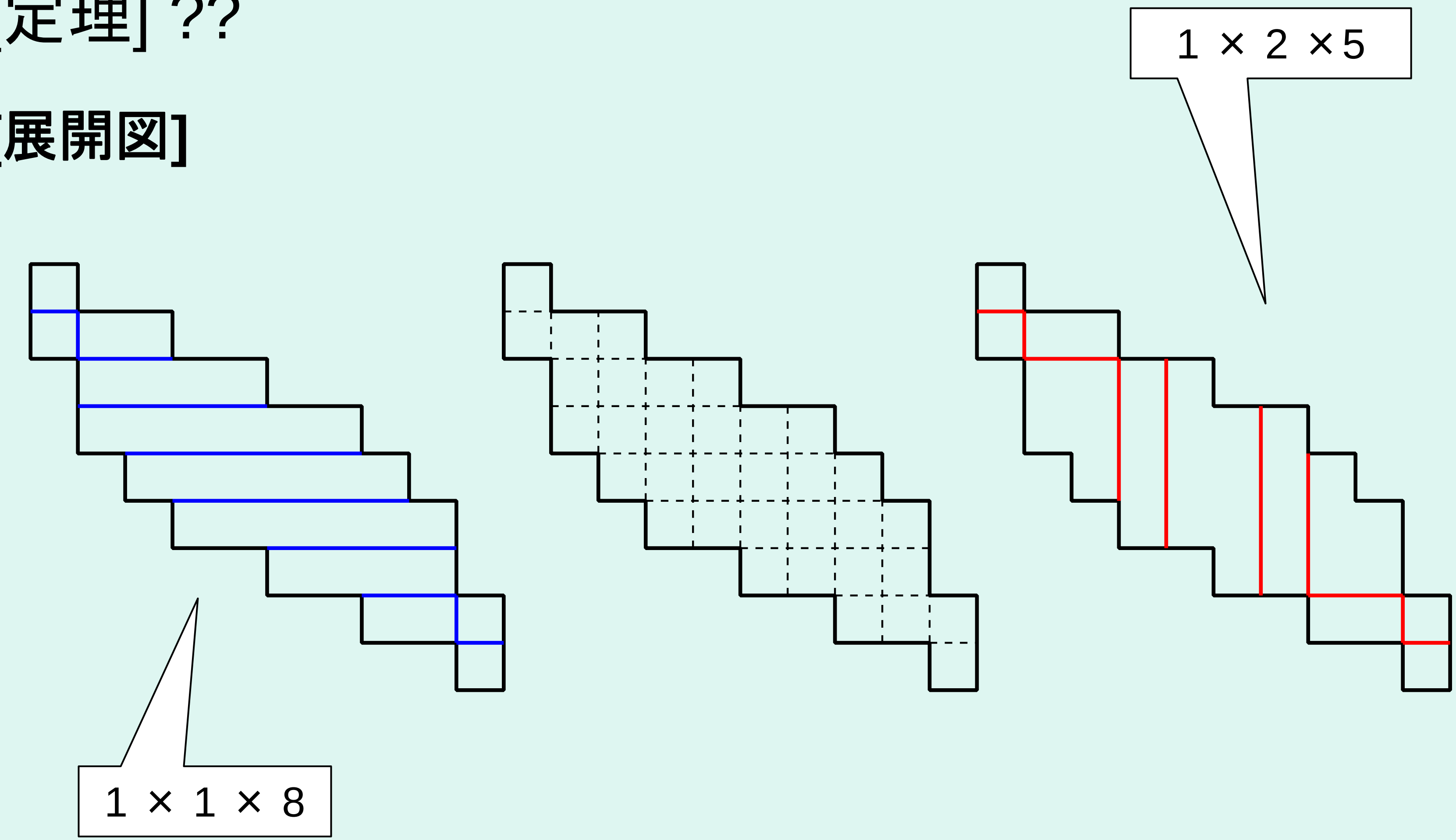
http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html




# 結果2: 興味深い展開図

[定理] ??

**[展開図]**



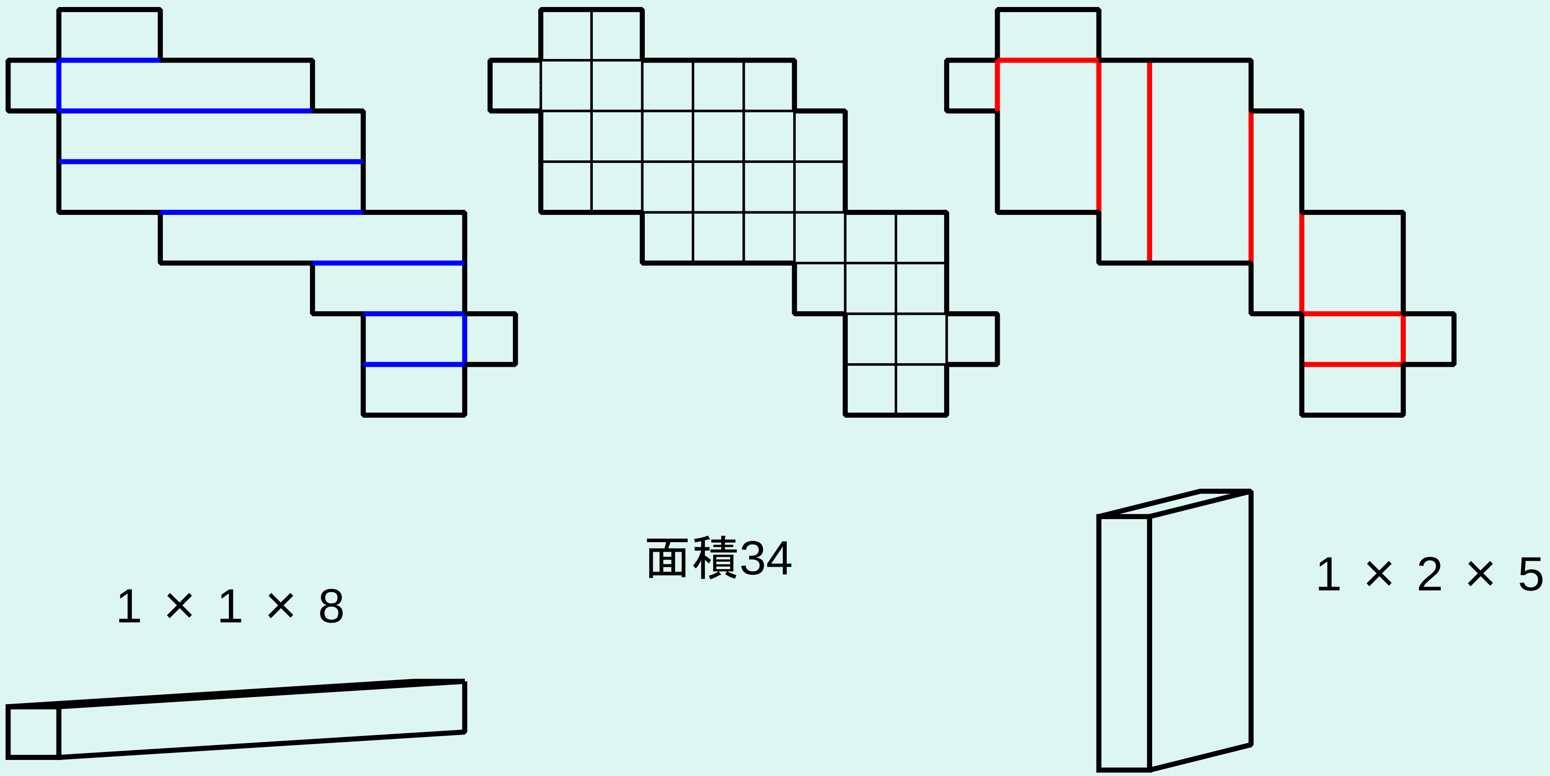
# 結果2: 興味深い展開図

[定理] 2種類の箱を作ることができるタイリングが存在する

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 結果3: 理論的に無限個あることの証明

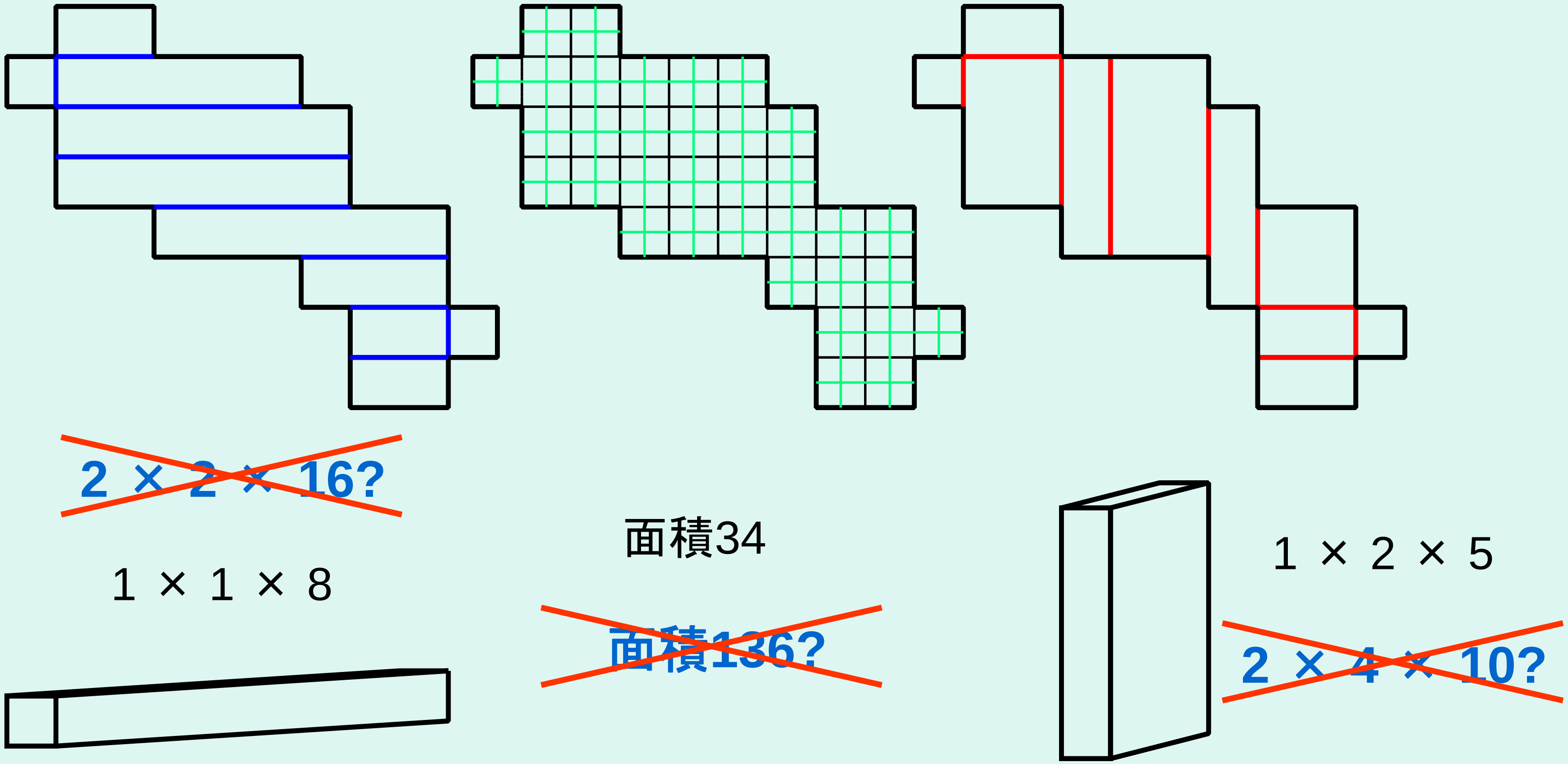
…の前に「本質的に」違う解答とは…?



http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 結果3: 理論的に無限個あることの証明

…の前に「本質的に」違う解答とは…?






GCD(*a*,*b*,*c*,*a'*,*b'*,*c'*)=1 であるものだけを考えればよい。

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 結果3: 理論的に無限個あることの証明

…の前に「本質的に」違う解答とは…?

| 面積/2 | サイズ | 展開図数 | RG($\times 10^7$) |
|---|---|---|---|
| **11** | (1,1,5),(1,2,3) | 541 | 6.7 |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| **44** | (2,2,10),(1,4,8) | 2 | 217.0 |

3日

1ヶ月

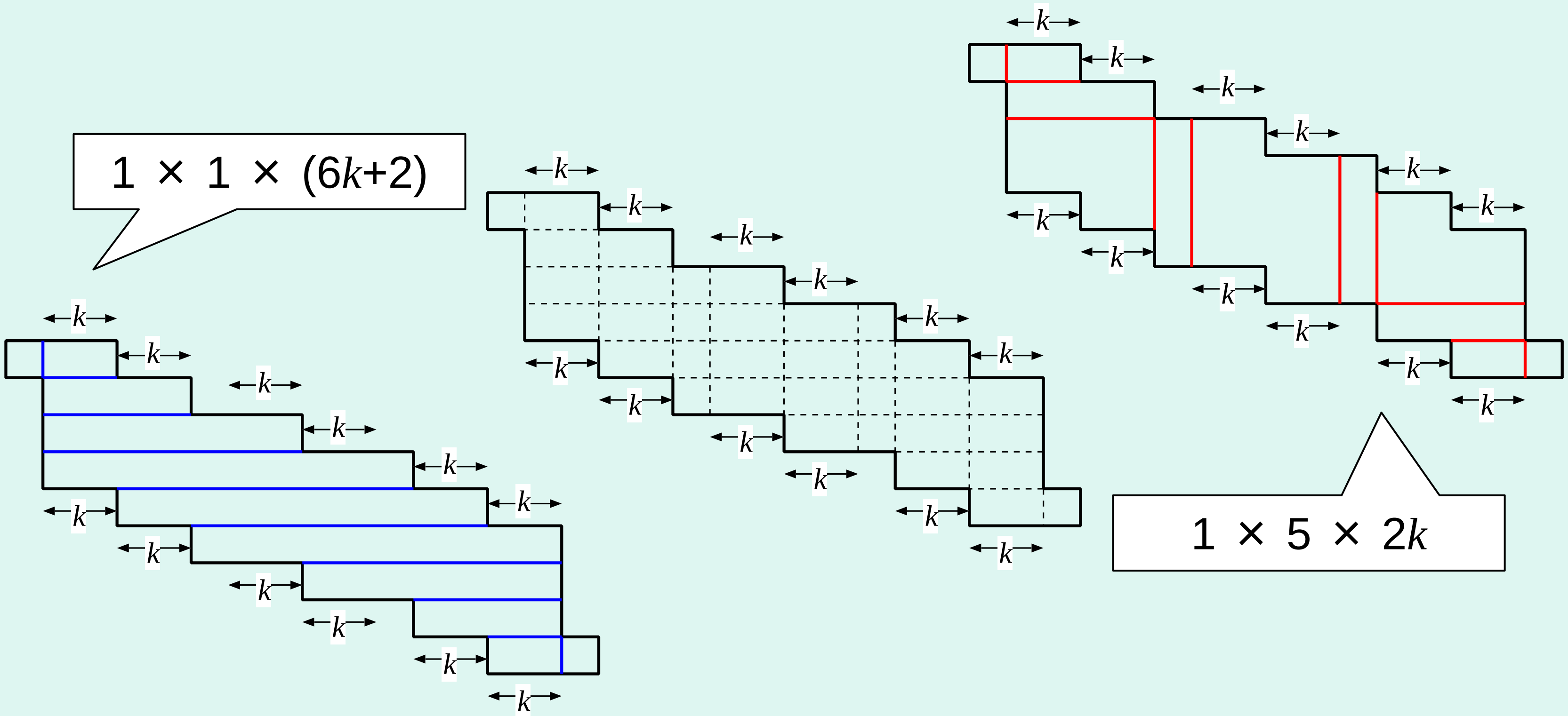
GCD($a,b,c,a',b',c'$)=1 であるものだけを考えればよい。

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 結果3: 理論的に無限個あることの証明

[定理] 本質的に違う解答が無限個存在する!!

**[証明1]**

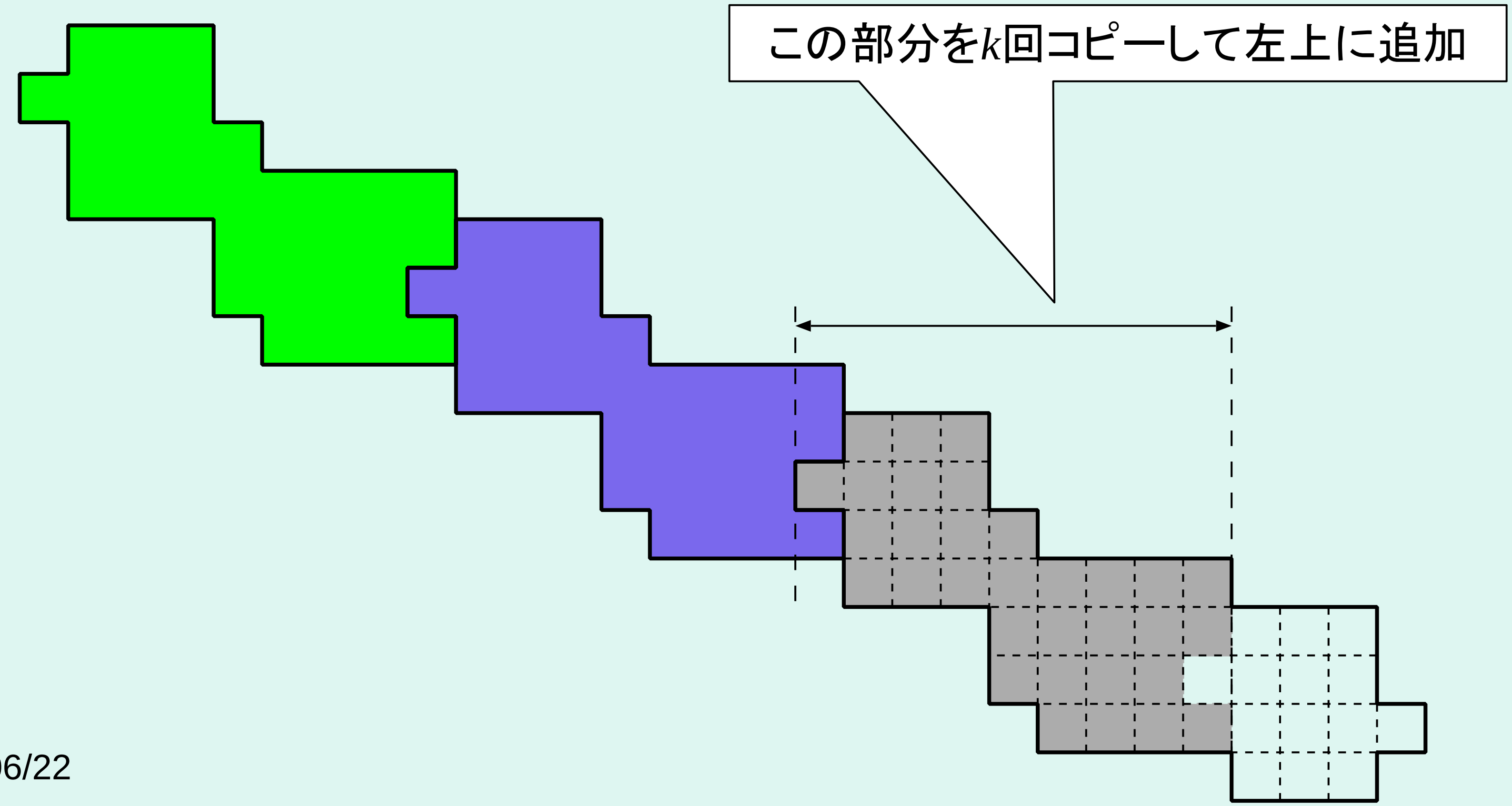


http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 結果3: 理論的に無限個あることの証明

[定理] 本質的に違う解答が無限個存在する!!

**[証明2]**



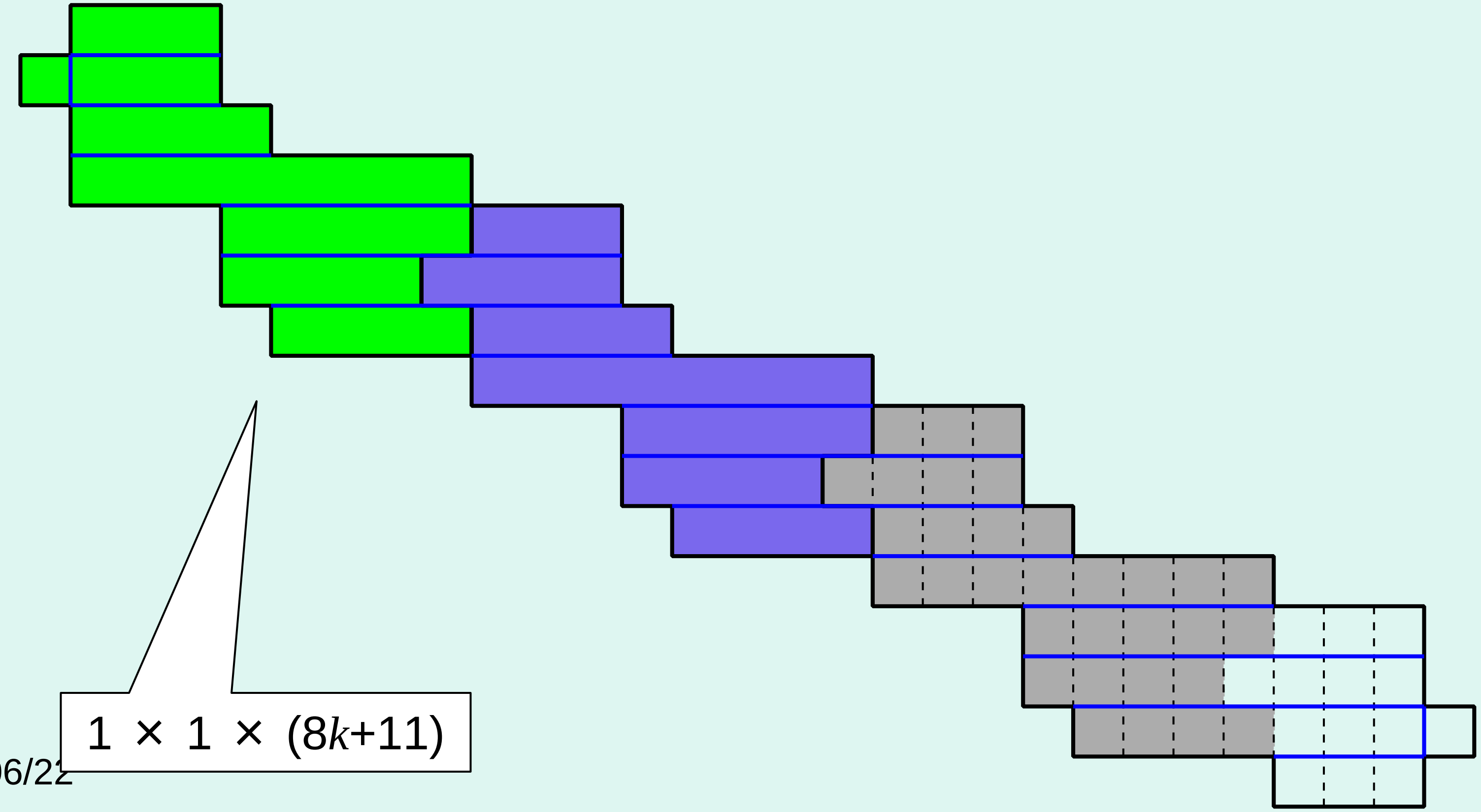

2008/06/22

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 結果3: 理論的に無限個あることの証明

[定理] 本質的に違う解答が無限個存在する!!

**[証明2]**

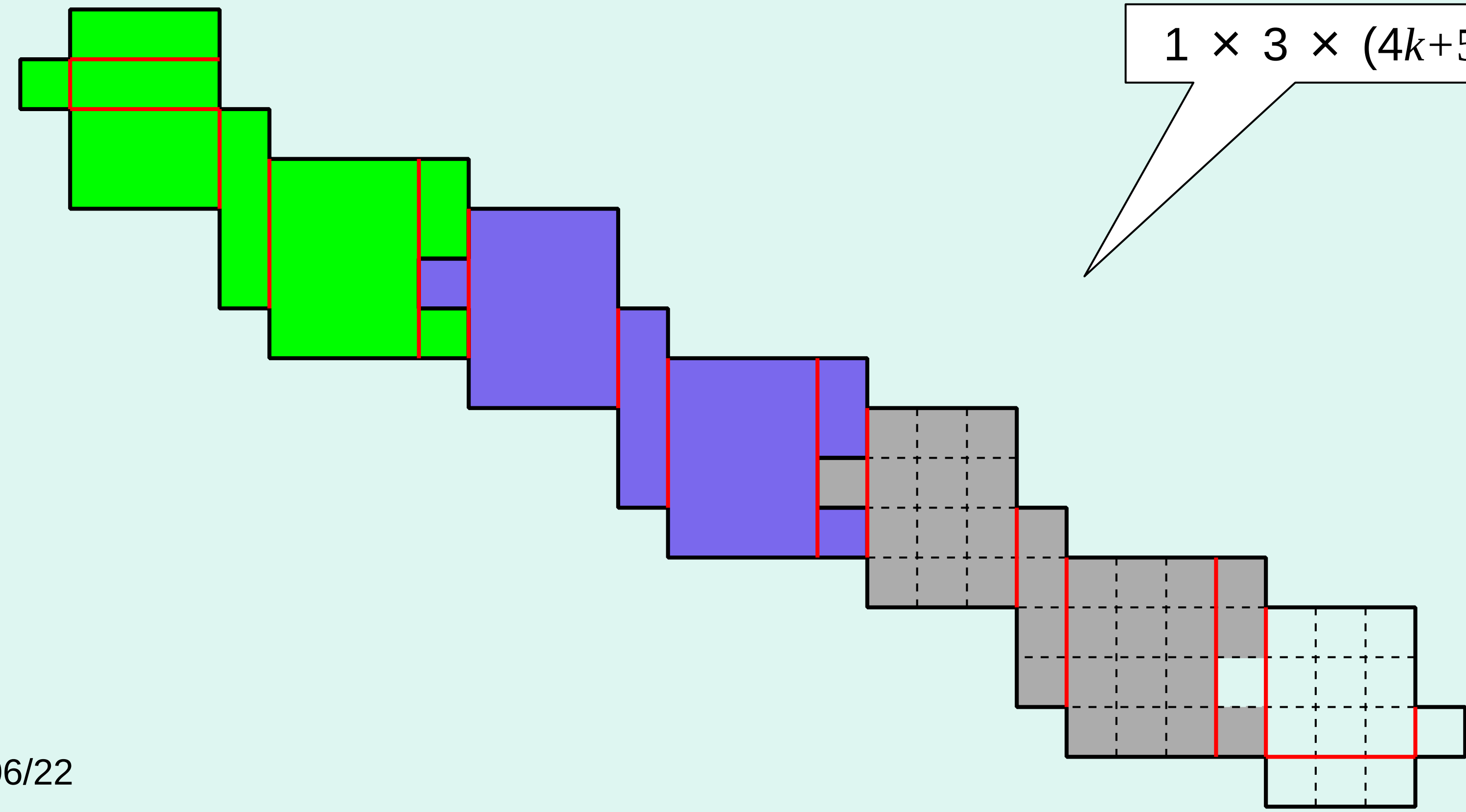


http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 結果3: 理論的に無限個あることの証明

[定理] 本質的に違う解答が無限個存在する!!

**[証明2]**



$1 \times 3 \times (4k+5)$

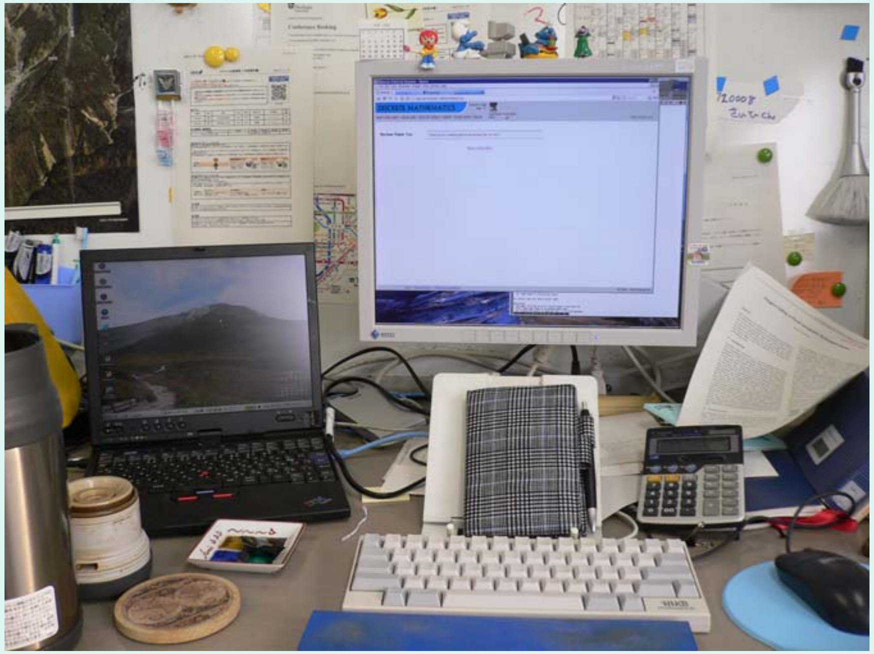
http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html

Google uehara origami
ウェブ全体から検索

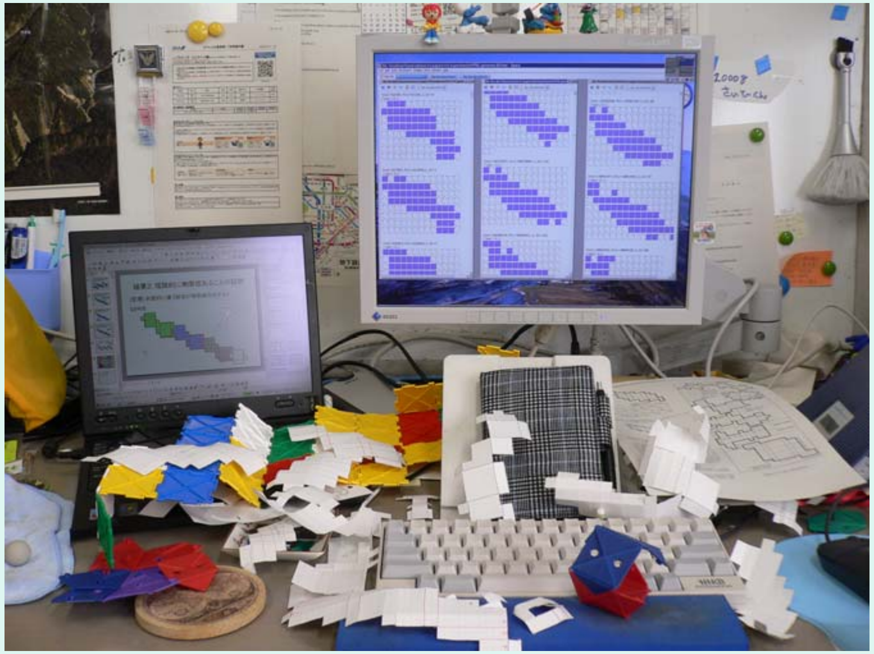
# おまけ

- これらの証明への道のり

Before



After



http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 展開図発見アルゴリズム（ランダム生成法）

1. 準備計算:$(a,b,c)$の組が複数ある面積を見つける
   1. $a \leqq b \leqq c$としてよいので、
      - $a$=1,2,…,100
      - $b$=$a$,$a$+1,…,100
      - $c$=$b$,$b$+1,…,100

      のそれぞれに対して $ab+bc+ca$ を計算して表に登録
2. 表に複数のエントリがあるものを小さいほうからエントリと一緒に出力

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html

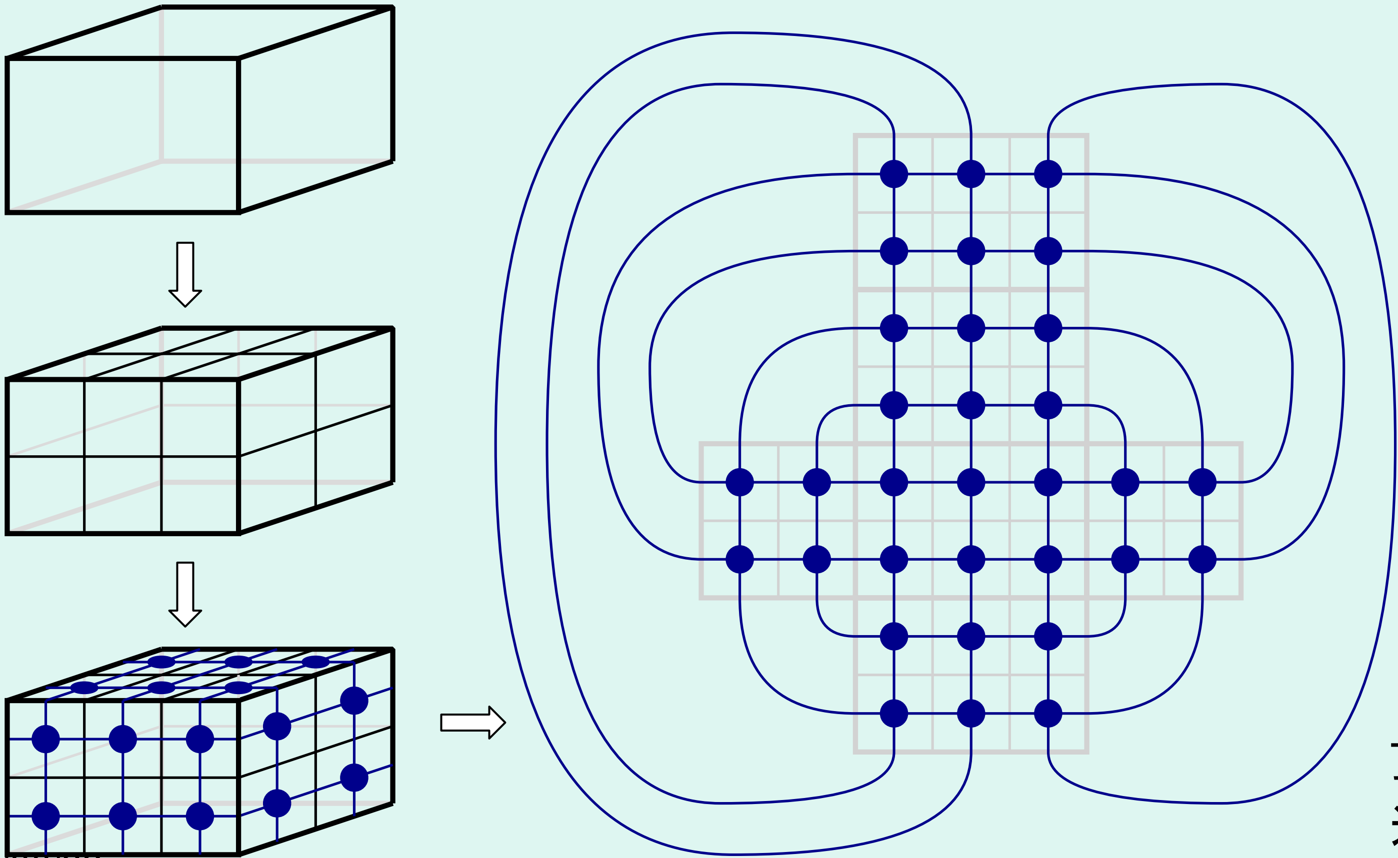

# 展開図発見アルゴリズム（ランダム生成法）

2. 本番
    1. 面積を1つ固定(例:46)
    2. $(a,b,c)$をランダムに選ぶ(例:(1,1,11),(1,2,7),(1,3,5))
    3. $a \times b \times c$の箱のグラフ表現を作る
    4. ランダムに切り開いて展開図を作る
    5. 巨大なハッシュ表に展開図を登録
    6. エントリがバッティングしたら出力
    7. ステップ2に戻る

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 展開図発見アルゴリズム（ランダム生成法）

3. 「箱」のグラフ表現：表面積 $S$=2($ab$+$bc$+$ca$) に対し



頂点数: $S$

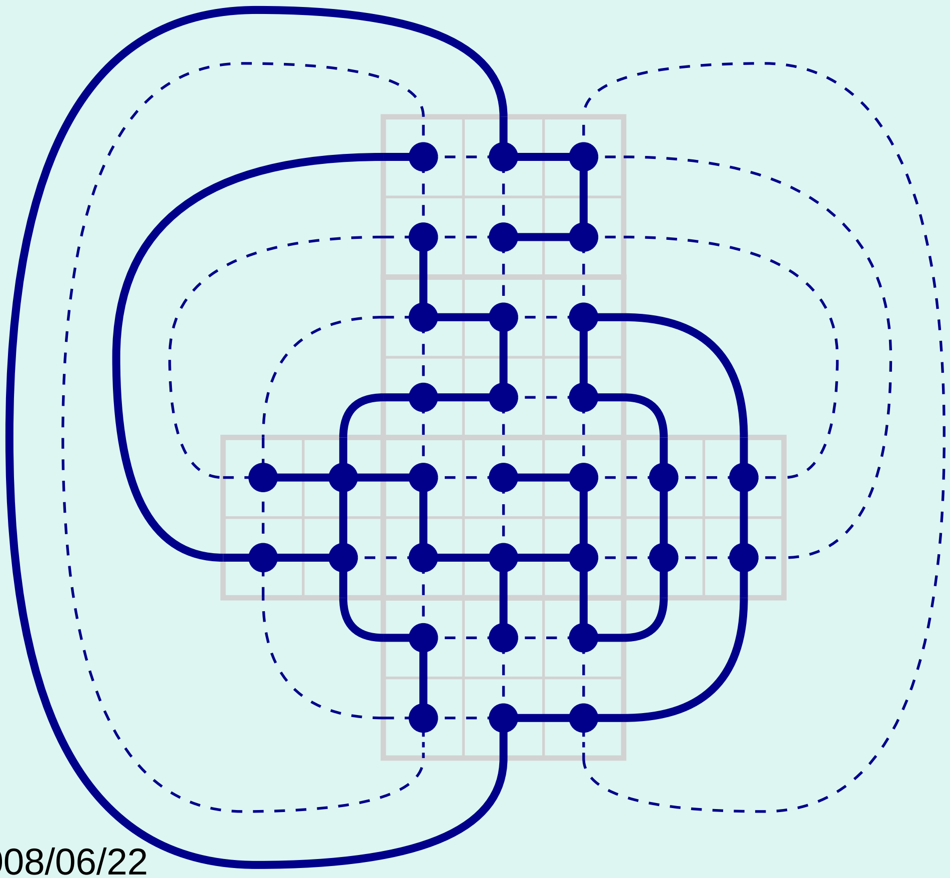
辺数: $2S$

どの頂点も次数4

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 展開図発見アルゴリズム（ランダム生成法）

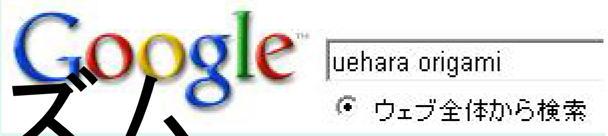
## 4.　ランダムに切り開いて展開図を作る



4.1. 全域木になるまで辺を切る
- 4.1.1. 辺をランダムに選ぶ
- 4.1.2. その辺がブリッジでなければ切る
- 4.1.3. $S$-1本切るまで続ける

4.2.全域木を元の幾何構造通りに広げる

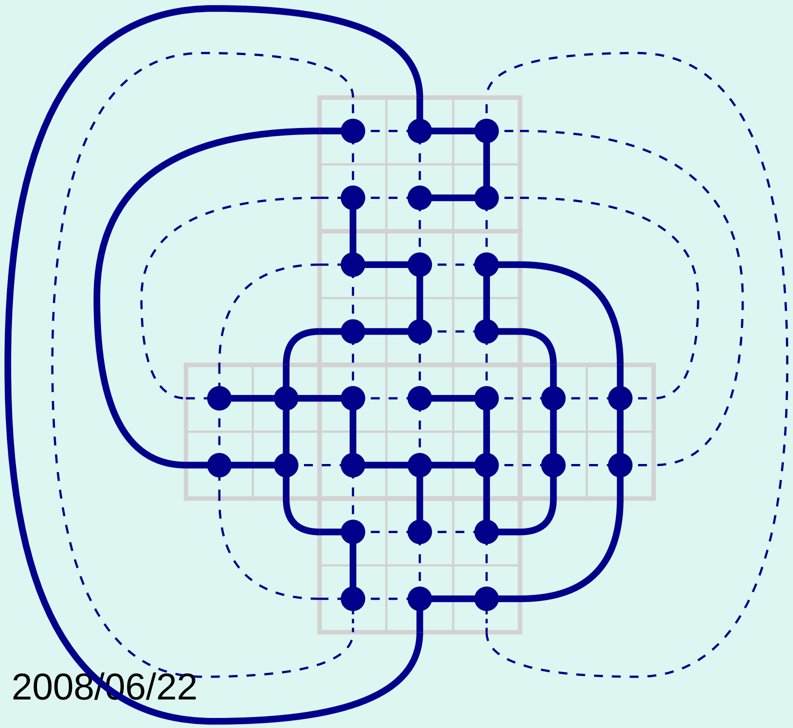
http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html



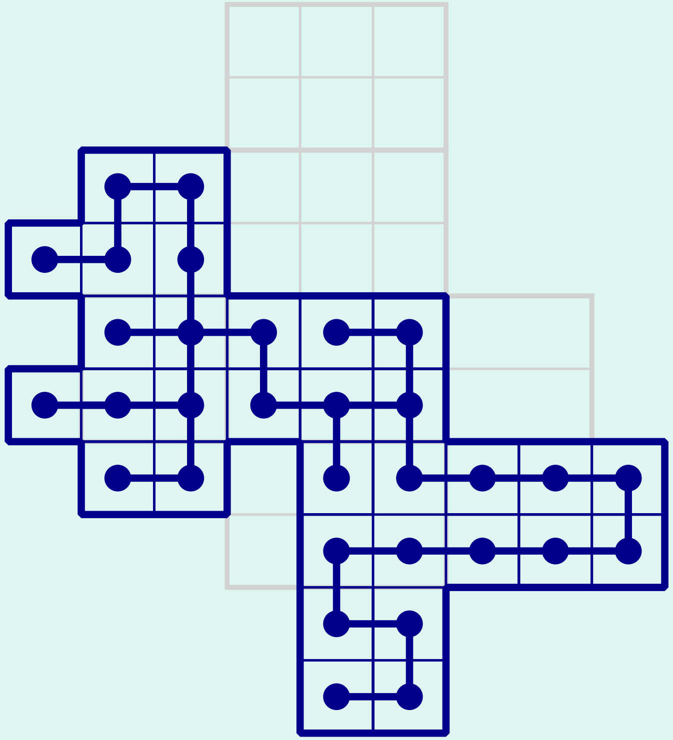

# 展開図発見アルゴリズム（ランダム生成法）

4.　ランダムに切り開いて展開図を作る

4.1. 全域木になるまで辺を切る



4.2.全域木を元の幾何構造通りに広げる



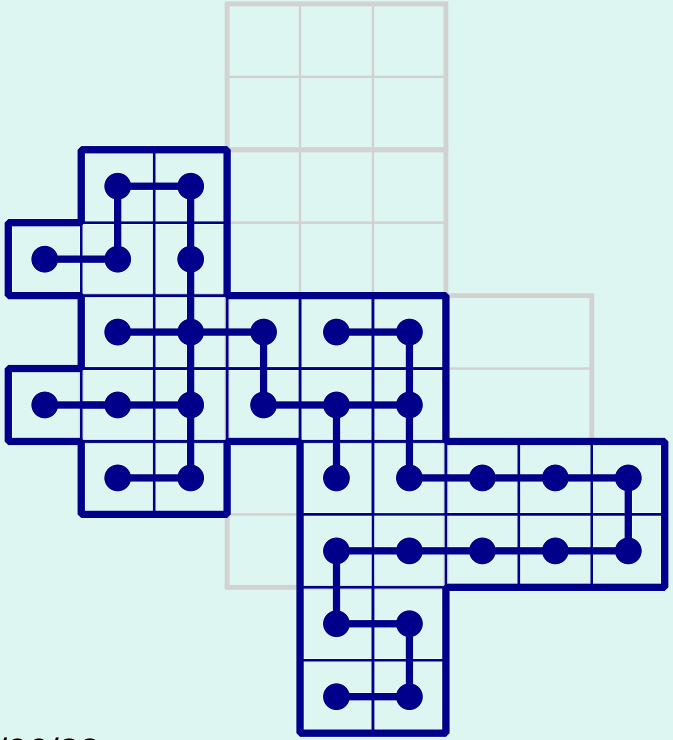
主張: 得られたものは展開図(?)

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 展開図発見アルゴリズム（ランダム生成法）

## 4. ランダムに切り開いて展開図を作る

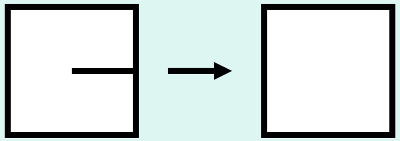
### 4.2.全域木を元の幾何構造通りに広げる



主張: 得られたものは展開図(?)

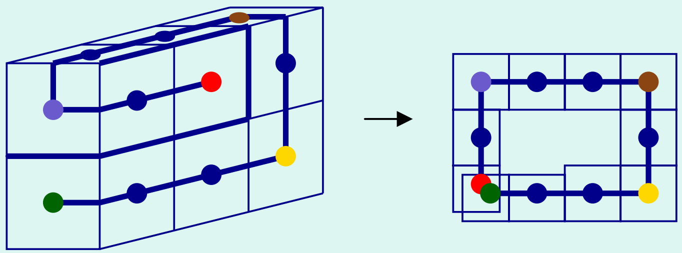
(1) 立体ではない(平坦化可能)
「カド」は閉路を導出するから。

(2) 切れ込みは不要(凸多面体より)



を繰り返し適用。

(3) 重なりは…?



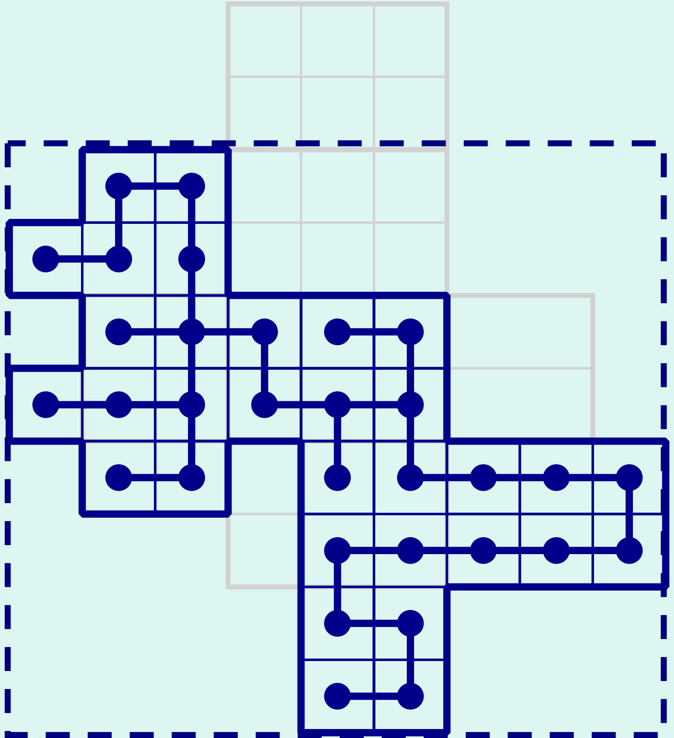
…起こりえる!!

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 展開図発見アルゴリズム（ランダム生成法）

## 5. 巨大なハッシュ表に展開図を登録

5.1. 一意的な0/1マトリクスにして、ビット列に符号化



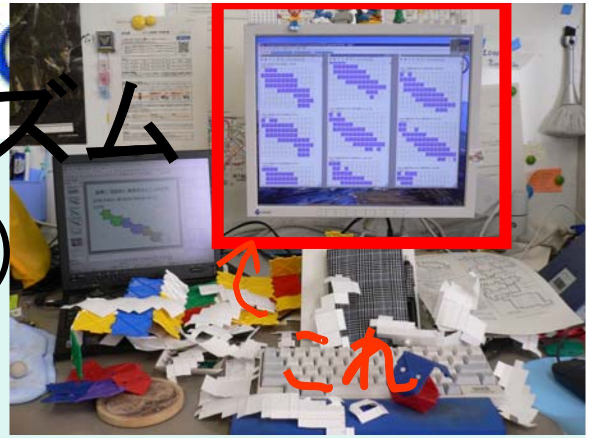
(1) 縦≦横
(2) ラスタスキャンの結果で辞書式に最大
(3) 元の型($(a,b,c)$)を符号化したものと一緒にビット列に埋め込む

011000000 111000000 011111000 …

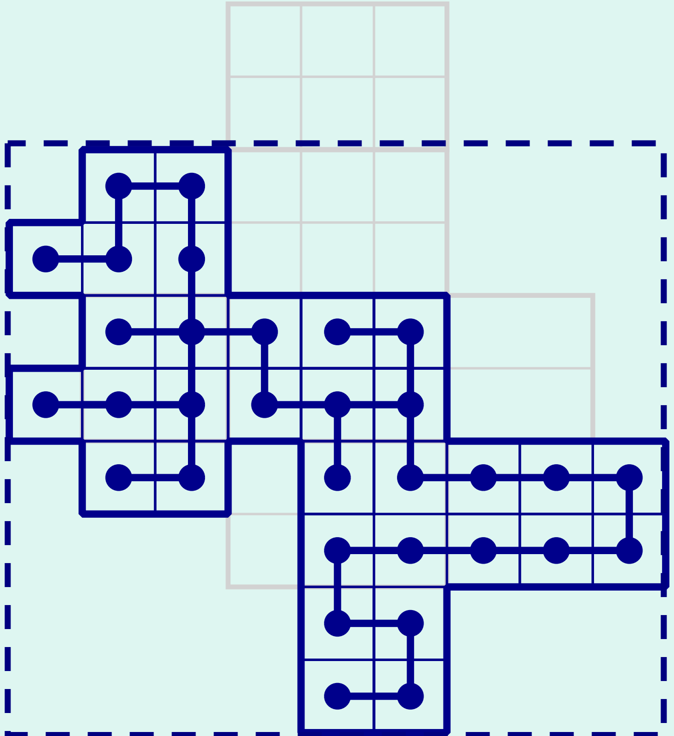
2008/06/22

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html

# 展開図発見アルゴリズム（ランダム生成法）

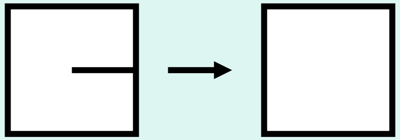



## ステップ3－5の考察



主張: 得られたものは展開図(?)

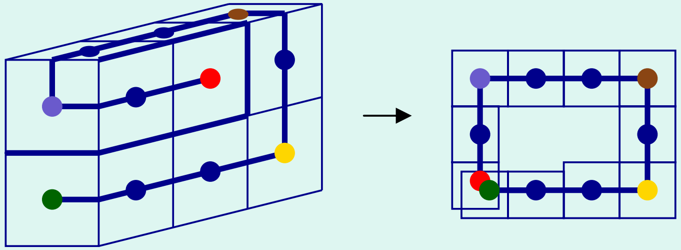
(2) 切れ込みは不要



を繰り返し適用。

0/1マトリクスにすることで自動的に対処

(3) 重なりは…?



気にしない!!

結果的には…
2139個の解の
ほかに26個の誤答 …を視認

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# おまけ：重なり/接触のある展開図

アルゴリズム的には簡単

今は同じところで切ってもダメ

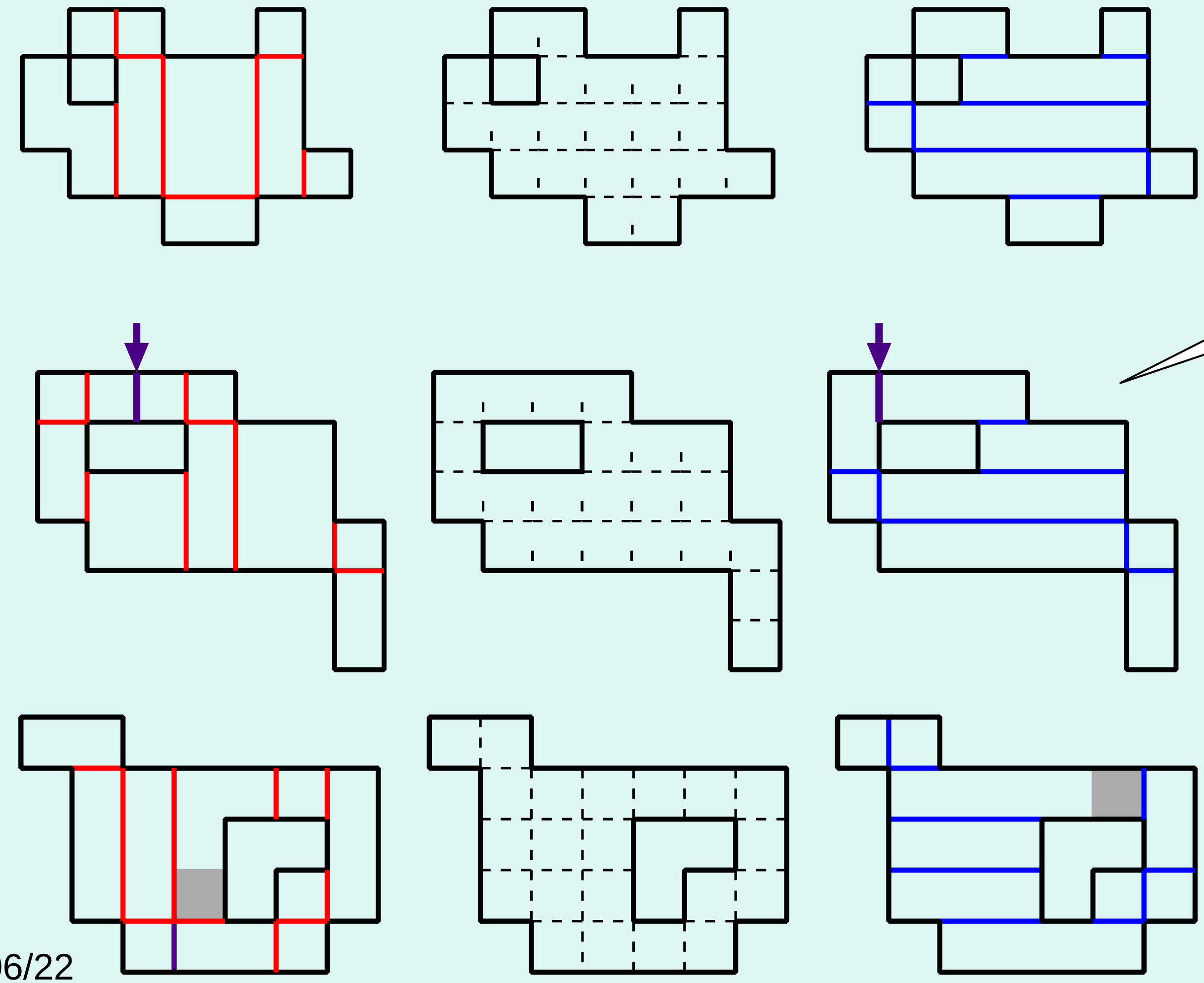
(2) 外枠で測った面積＞想定面積

(1) 1の個数＜想定面積

OK

NG

NG

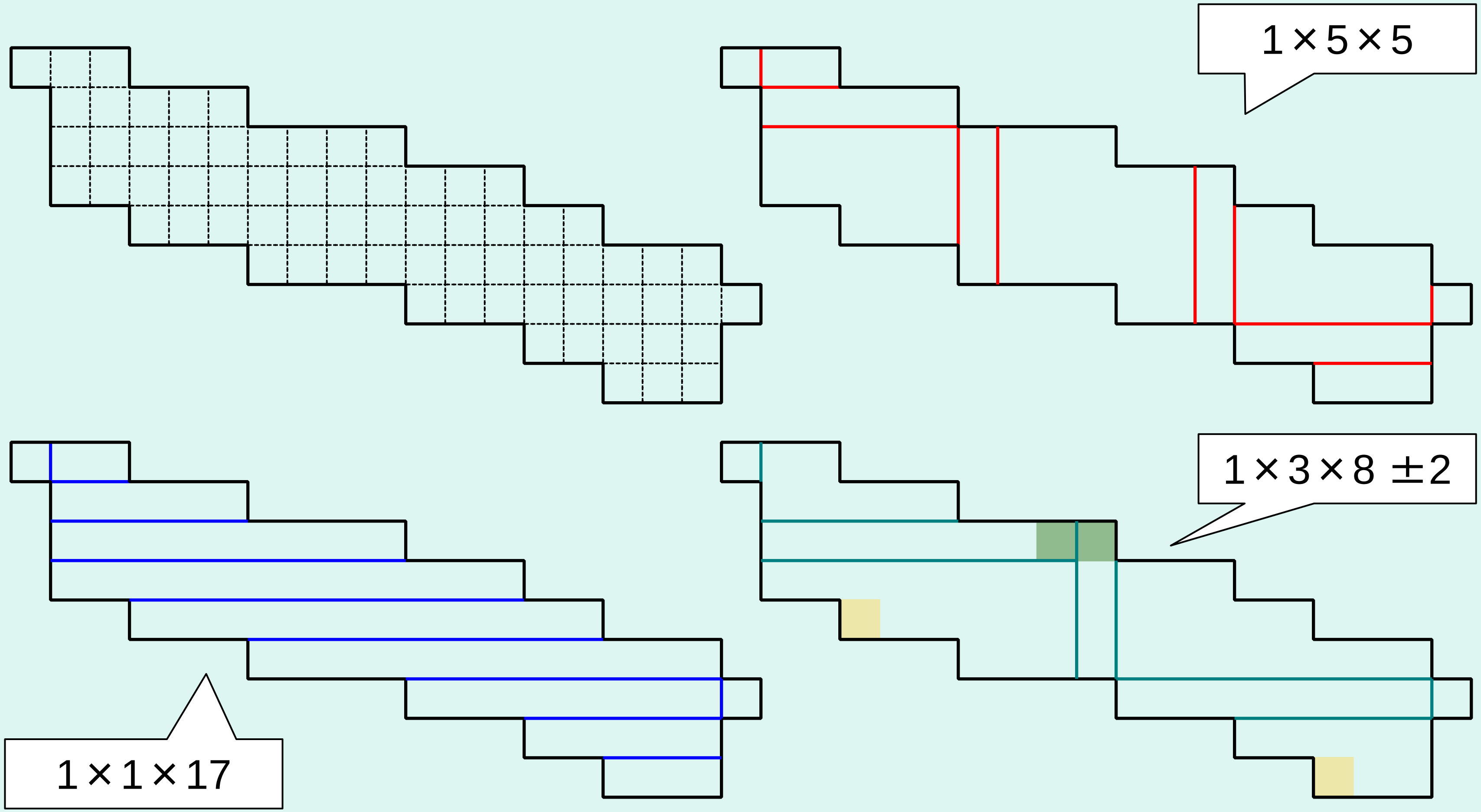


2008/06/22

http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 残された仕事

(1) 3つの箱を作ることができる展開図は…?



http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html


# 残された仕事

## (2) 展開図に対する理論的な興味

1. $(a,b,c)$が与えられたときの展開図の個数/列挙
   - {重なり/接触}を{許す/許さない}
   - {重なり/接触}ができる条件を定性的に評価
2. $(a,b,c)$が与えられたときの展開図の一様生成
   - 今の全域木を用いた方法だと「大きな四角形」ができやすい

展開図に「穴」が
できることが必要
十分ではある