



# グラフクラスと アルゴリズム

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科

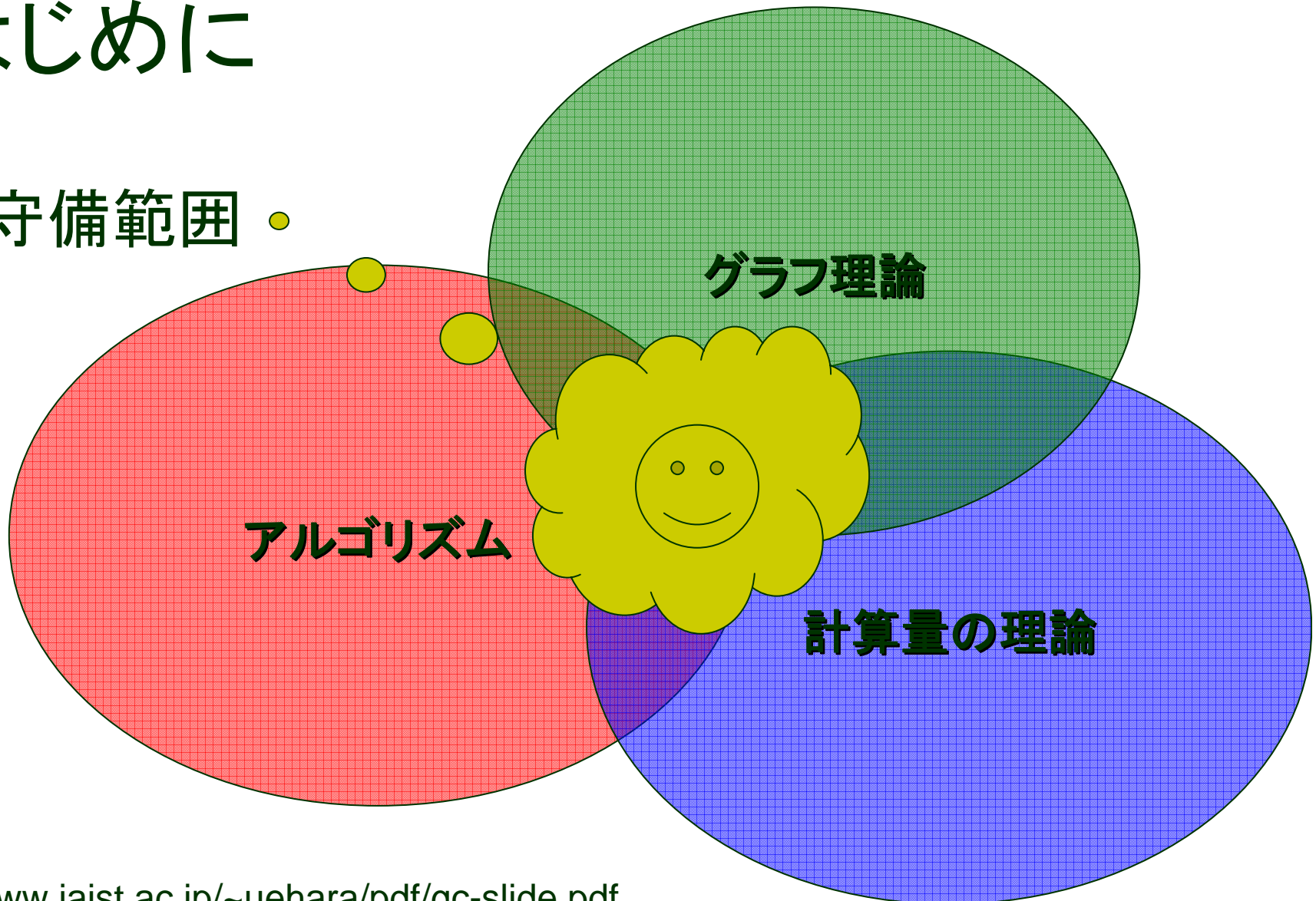
上原 隆平

[uehara@jaist.ac.jp](mailto:uehara@jaist.ac.jp)

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara>

# はじめに

## ■ 守備範囲 ●



# はじめに

## ■ 歴史的経緯

### □ Perfect Graph:

- すべての導出部分グラフにおいて、最大クリークの大きさと彩色数が一致する。

### □ Berge の予想(1960):

- $G$  が Perfect Graph  $\Leftrightarrow G$  と  $G$  の補グラフが長さ5以上の奇数長の「弦を持たないグラフ」を導出部分グラフとしてもたない。

### □ Chudnovsky, Seymour, Robertson, Thomas らによる解決(2002)

- 多くの分類と特徴づけの積み重ねによる解決

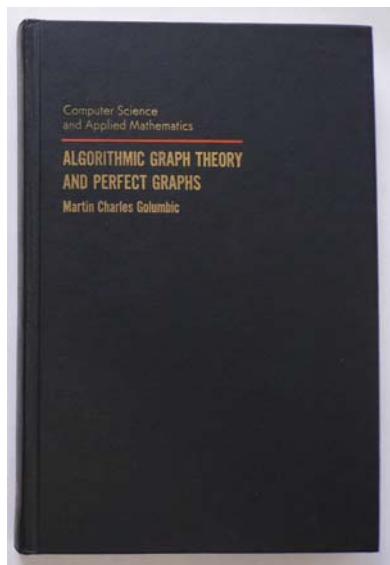
# はじめに

- Strongly Perfect Graph {Conjecture|Theorem} の研究の歴史的意味
  - 計算量の理論的観点：
    - 彩色数、最大クリークなどの代表的なNP完全問題の、特徴づけが得られる
  - アルゴリズム論的観点：
    - 一般のグラフ上でNP完全な問題でも、クラスを限定することにより、効率的なアルゴリズムを構築できる
  - グラフ理論的観点：
    - さまざまな条件による分類により、Perfect graph や部分クラスについての有用な特徴づけが得られる

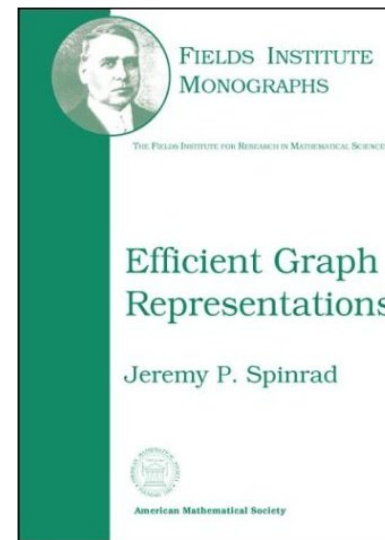
# はじめに

## ■ この分野の標準的な教科書

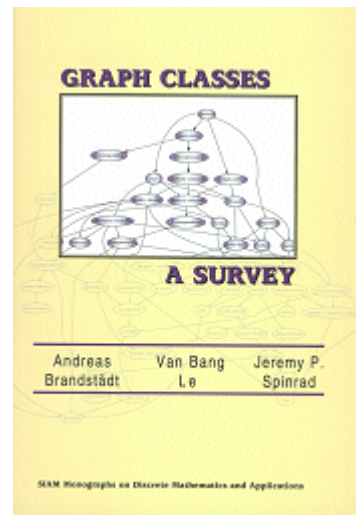
1980年 Algorithmic Graph Theory  
M.C. Golumbic



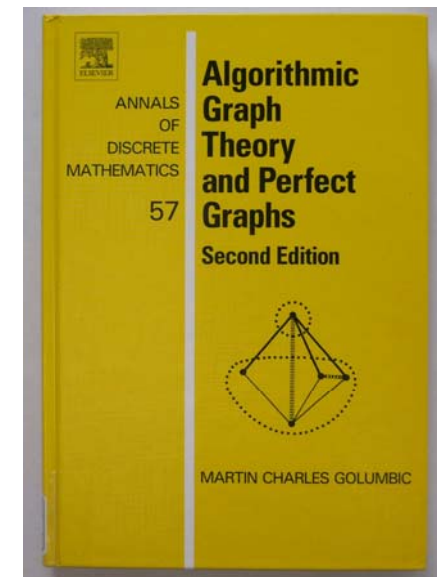
2003年 Efficient Graph Representations  
J.P. Spinrad



1999年 Graph Classes: A Survey  
A. Brandstädt, V.B. Le, J.P. Spinrad

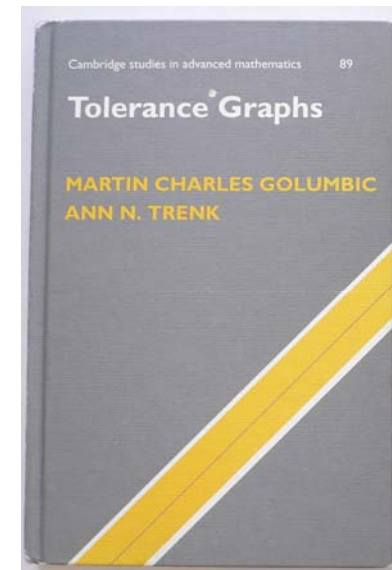
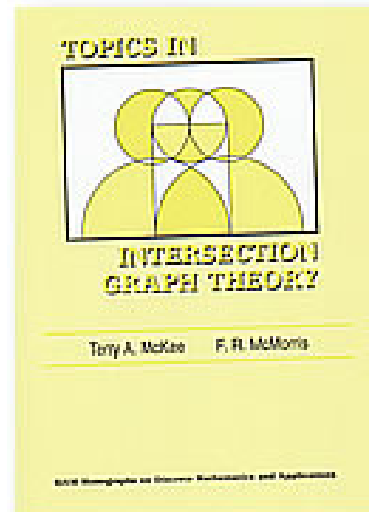
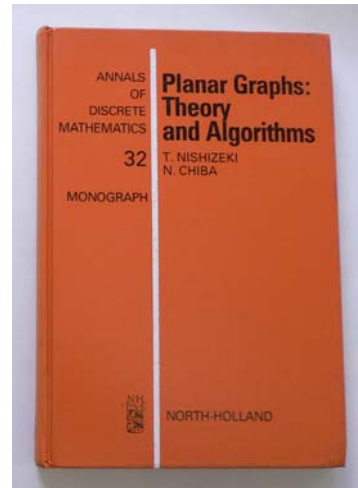
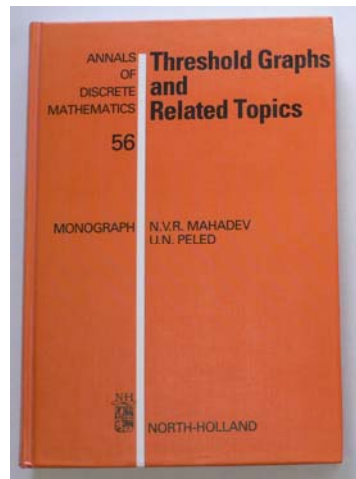


2004年 Algorithmic Graph Theory  
2<sup>nd</sup> Edition. M.C. Golumbic



# はじめに

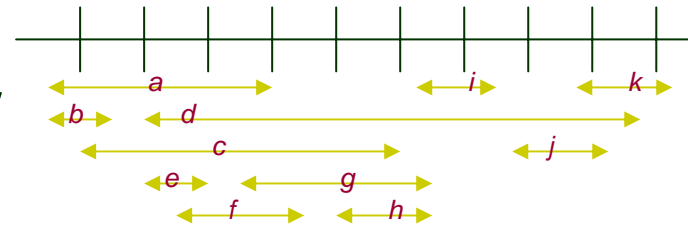
## ■ この分野のマニアックな参考書



# 今日の話の流れ

1. **グラフクラスの紹介**
  - 幾何的なモデルを持つクラス...chordal graph, interval graph
  - 数学的なモデルを持つクラス...permutation graph
2. **グラフクラスの包含関係に関して遺伝的な問題**
  - グラフの同型性判定問題
3. **グラフクラスの包含関係に関して独立な問題**
  - グラフの認識問題
4. **現在のグラフクラスの枠組みでの未解決問題(趣味編)**
5. **今後有望な新しい‘グラフクラスの’枠組み(偏見編)**
  - Scale Free Graph...Randomized Algorithm + Graph Class
  - Linkage...Computational Geometry + Algorithm + Graph Class

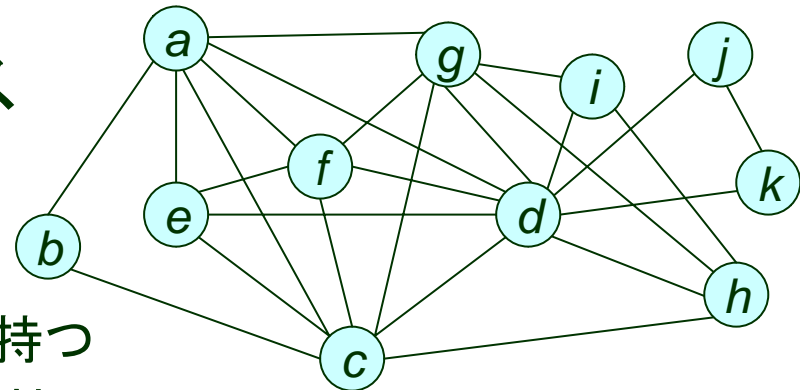
# 1. グラフクラスを紹介



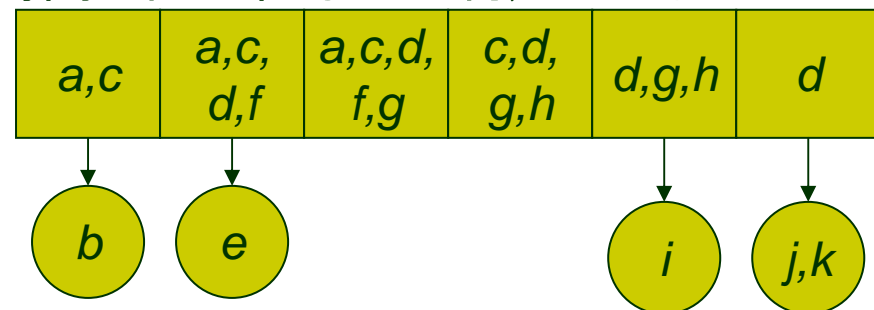
## ■ 幾何的なモデルを持つクラス

### □ interval graph

- 各頂点は区間に対応
- 区間が重なるなら頂点間に辺を持つ
- 1つのグラフは多くの区間表現を持つ
- すべての可能な区間表現を表現するMPQ-treeで表現できる
- MPQ-treeを用いれば線形時間で同型性などが判定できる



### □ chordal graph





# 1. グラフクラスを紹介

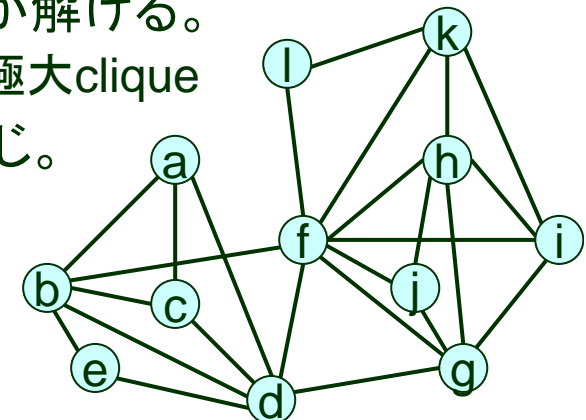
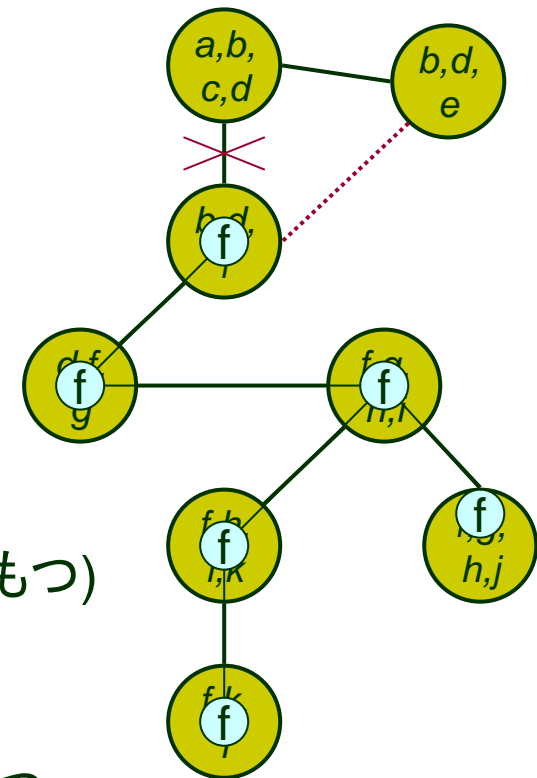
## ■ 幾何的なモデルを持つクラス

### □ interval graph

- 各頂点は区間に対応
- MPQ-treeを用いれば線形時間で同型性が判定できる

### □ chordal graph (※他にも多くの特徴づけをもつ)

- 各頂点は subtree に対応
- subtree が重なるなら頂点間に辺を持つ
- 1つのグラフは多くの clique tree 表現を持つ
- Clique tree 上で DP を使えば、多くの問題が解ける。
  - 例: clique tree 上の各頂点は元のグラフの極大clique
- 同型性判定問題は一般のグラフのそれと同じ。



# 1. グラフクラスを紹介

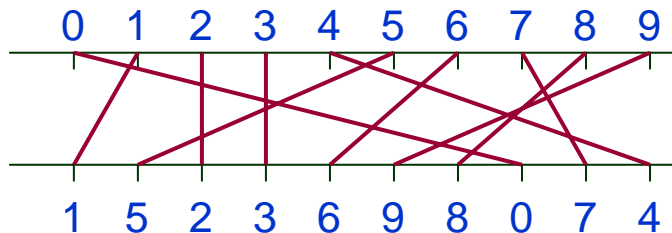
面白い性質の例:

- 補グラフもPermutation Graph
- 最長減少列が最大clique

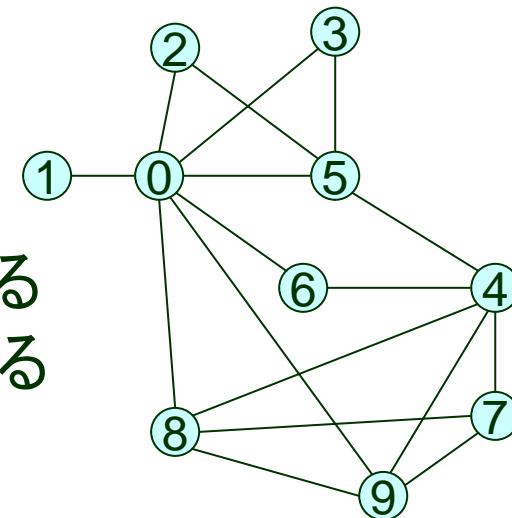
## ■ 数学的なモデルを持つクラス

### □ permutation graph

- ある permutation  $\sigma$  によって特徴付けられる
- $i < j$  かつ  $\sigma(i) > \sigma(j)$  なら辺で結ばれる



- 認識問題や同型性は簡単に解ける
- 「端から見ていく」ことでDPが使える



## 2. 包含関係に関して遺伝的な問題

### ■ グラフの同型性判定問題(Graph Isomorphism)

- 一般のグラフの同型性判定問題...NPに属していることは自明だが、NP-完全かどうかは未解決。
  - あるグラフクラスCがGI完全...C上でのGI問題が一般のグラフ上のGI問題と同等な困難さを持つ。
    - e.g., Bipartite Graph, Chordal Graph, (上原、戸田、名古屋; 2005)
- グラフクラス  $C_1 \subseteq C_2$  について
  - $C_1$ がGI完全なら、 $C_2$ もGI完全
  - $C_2$ でGIが多項式時間で解けるなら、 $C_1$ でも同様。

## 2. 包含関係に関して遺伝的な問題

- グラフの同型性判定問題(Graph Isomorphism)
  - GI完全と多項式時間で解けるクラスの境界線をはっきりさせる
    - ⇒GI問題の本質を明らかにする(群論?)
    - ⇒GI問題はNP完全なのかどうか?
  - GI問題を解く効率の良いアルゴリズムは存在するのか?
    - ⇒一般のグラフに対して $O(2^n)$ 時間で解けるか?
    - ⇒Quantum などの別の計算機モデルではどうか?

## 3. 包含関係に関して独立な問題

### ■ グラフの認識問題

□ クラスの特徴をチェックする必要があるので、クラスの包含関係と無関係。

#### ■ Chordal graph の認識

LexBFS(Rose, Tarjan, Lueker; 1976)

#### ■ Interval graph の認識

PQ-tree で線形(Booth, Lueker 1976)  $\Rightarrow$  ...

$\Rightarrow$  LexBFS  $\times$  5(Corneil, Olariu, Stewart; SODA, 1999)

#### ■ Circular arc graph の認識

NP完全?  $\Rightarrow O(n^3) \Rightarrow \dots \Rightarrow$  線形時間(McConnel, FOCS, 2001)

## 4. 現グラフクラスでの未解決問題

- 現在のグラフクラスの枠組みでの未解決問題(趣味編)
  - 数学的興味: 同型性判定問題
    - 台形グラフ(Interval graph と permutation graph を含む一般化)
  - Bioinformatics 系応用:
    - Interval graph などの線形な幾何的表現を持つクラス
    - 大規模 & 単純な構造のグラフ上の高速(線形時間)なアルゴリズム
  - 無線ネットワーク系応用:
    - (Unit) disk graph などの面的な幾何的表現を持つクラス  
⇒よりリアルな問題設定?

## 5. 今後有望な新しい枠組み

### ■ Scale Free Graph; Web, Internet などの社会ネットワークのモデル

□ Randomized Algorithm + Graph Class

$G_{n,p}$  や  $G_{n,m}$

□ Erdős & Rényi 式のRandom Graphモデル(1959～)

- グラフの構造(degreeなど)が一様
- ある種の社会ネットワーク(e.g. WWW, Internet)のモデルとしては不適切

□ 新しいRandom Graph モデル(1998～)

- WWW, Internet などは頂点の次数がベキ法則に従って分布  
 $\text{Pr}(\text{degree}=k) \sim k^{-\gamma}$
- Small world network, Scale free graph, ...

社会ネットワーク  
だとだいたい  
 $\gamma \sim 3$ 程度

# 5. 今後有望な新しい枠組み

- 多くの入門書が...





## 5. 今後有望な新しい枠組み

- Theoretical Computer Scientist としての注目株
  - Preferential attachment model [Barabási, Albert; 1999]
    - 作り方(定数 $m$ )
      - $G_0$ =頂点数 $m$ のクリーク
      - $G_i$ は $G_{i-1}$ に degree  $m$  の頂点  $v$  を一つ追加する
        - $G_{i-1}$  の degree の大きい頂点ほど  $v$  からの辺をつけられやすい
    - Cooper, Frieze らの理論的な解析(SODA, 2005)
      - Random walk の cover time の期待値の上界と下界を与えた
  - 増田, 巳波, 今野のグラフクラス[Physical Review E; 2004]
    - Disc graph と Threshold graph の一般化
    - 無線ネットワークなどのモデルになりうる

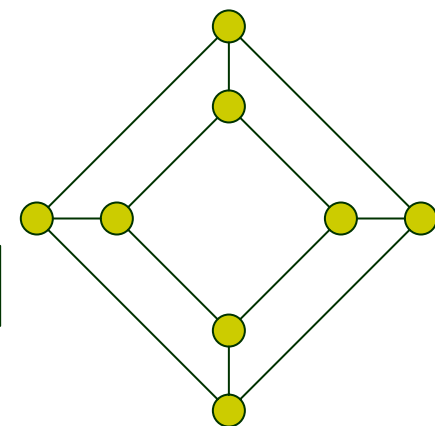
## 5. 今後有望な新しい枠組み

- Linkage; 「硬い」辺を持つグラフ
  - Computational Geometry + Algorithm + Graph Class
  - 『頂点』と『長さが変わらない辺』から構成されるグラフ。頂点は joint で、辺は自在に(2D内or 3D内)回転する。
  - 長い歴史を持つが...近年の新しい応用からの問題
    - コンピュータグラフィックス/アニメーション
    - バイオインフォマティクス...機能は形状で決まる
    - (ナノ)ロボットの制御...ロボットアーム

## 5. 今後有望な新しい枠組み

- Linkage; 「硬い」辺を持つグラフ
  - Computational Geometry + Algorithm + Graph Class
  - 一般には、かなり難しい
    - 例1: 1点で固定された gadget がある点まで伸ばせるか？  
⇒PSPACE困難[Hopcroft, Joseph, Whitesides; 1984]
    - 例2: 同型でも「硬さ(Rigidness)」が異なるグラフがある  
⇒構造計算(!!)が必要
    - 例3: 2次元と3次元でだいぶ違う  
⇒3次元だとなんでも裏返せる

chordal graph = rigid circuit graph



## 5. 今後有望な新しい枠組み

- Linkage; 「硬い」辺を持つグラフ
  - Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, and Polyhedra

Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke,  
Cambridge University Press

2006年末か  
2007年初頭に出るはず

**The Fourth International Conference  
on Origami in  
Science, Mathematics, and Education  
(4OSME)**

September 8-10, 2006.



# 文献リスト

## ■ はじめに

- “The Strong Perfect Graph Theorem”,  
<http://www.cs.concordia.ca/~chvatal/perfect/spgt.html>
- マニアックな教科書
  - Planar Graphs: Theory and Algorithms, T. Nishizeki and N. Chiba, Annals of Discrete mathematics 32, North-Holland, 1988.
  - Threshold Graphs and Related Topics, N.V.R. Mahadev and U.N. Peled, Annals of Discrete Mathematics 56, North-Holland, 1995.
  - Topics in Intersection Graph Theory, T.A. McKee and F.R. McMorris, SIAM, 1999.
  - Tolerance Graphs, M.C. Golumbic and A.N. Trenk, Cambridge studies in advanced mathematics 89, Cambridge, 2004.

# 文献リスト

## ■ グラフクラスの紹介

### □ 幾何的なモデルを持つクラス

#### ■ 区間グラフのMPQ-tree表現

- An Incremental Linear-Time Algorithm for Recognizing Interval Graphs, N. Korte and R.H. Möhring, SIAM J. on Computing, 18(1), 68-81, 1989.

## ■ 包含関係に関して遺伝的な問題

- Graph Isomorphism Completeness for Chordal Bipartite Graphs and Strongly Chordal Graphs, R. Uehara, S. Toda and T. Nagoya, Discrete Applied Mathematics, 145(3), 479-482, 2004.

# 文献リスト

## ■ 包含関係に関して独立な問題

- Algorithmic Aspects of Vertex Elimination on Graphs, D.J. Rose, R.E. Tarjan, and G.S. Lueker, SIAM J. on Computing, 5(2), 266-283, 1976.
- Testing for the Consecutive Ones Property, Interval Graphs, and Graph Planarity Using PQ-tree Algorithms, K.S. Booth and G.S. Lueker, J. Comput. Sys. Sci., 13, 335-379, 1976.
- The Ultimate Interval Graph Recognition Algorithm?, D.G. Corneil, S. Olariu, and L. Stewart, 9th SODA, 175-180, 1998.
- Linear Time Recognition of Circular-arc Graphs, R.M. McConnell, 42nd FOCS, 386-394, 2001.

# 文献リスト

## ■ Scale Free Graph

### □ クラシックなRandom Graph

- Random Graph, 2nd Edition, B. Bollobas, Cambridge studies in advanced mathematics 73, Cambridge, 2001.

### □ たくさんの入門書の中のお勧め

- 新ネットワーク思考、A.L. バラバシ著、青木薫訳、NHK出版、2002.
- 複雑な世界、単純な法則、M. ブキャナン著、阪本芳久訳、草思社、2005.
- 複雑ネットワークの科学、増田直紀、今野紀雄著、産業図書、2005.
- 「複雑ネットワーク」とは何か、増田直紀、今野紀雄著、ブルーバックスB1511、講談社、2006.

### □ 論文

- Emergence of Scaling in Random Networks, A.-L. Baranasi and R. Albert, Science, 286(5459), 509-512, 1999
- Geographical Threshold Graphs with Small-World and Scale-Free Properties, N. Masuda, H. Miwa, and N. Konno, Physical Review E, <http://jp.arxiv.org/pdf/cond-mat/0403524>, 2005.
- The Cover Time of Two Classes of Random Graphs, C. Cooper and A. Frieze, 16th SODA, 961-970, 2005.



# 文献リスト

## ■ Linkage

### □ クラシックな結果

- Movement problems for 2-dimensional linkages, J.E. Hopcroft, D.A. Joseph, and H. Whitesides, SIAM J. on Computing, 13, 610-629, 1984.

### □ 構造計算(?)

- 形態解析、半谷裕彦、川口健一著、培風館、1991.

### □ 未刊本

- Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, and Polyhedra, E.D. Demaine and J. O'Rourke, Cambridge Press, 2007?.

☆ <http://www.fucg.org/> にサポート情報や元になった Survey paper があります。