

グラフクラスと アルゴリズム

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科

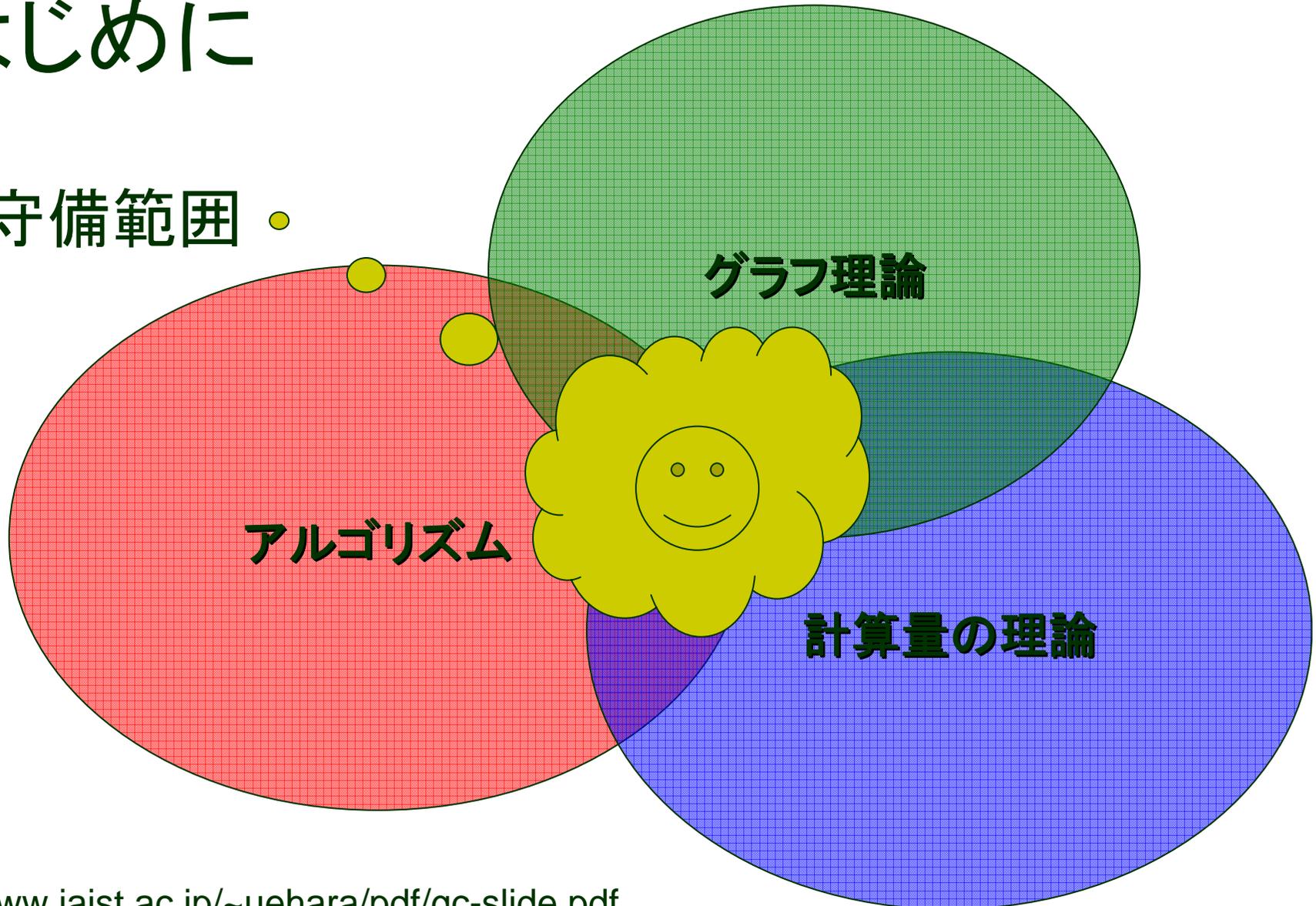
上原 隆平

uehara@jaist.ac.jp

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara>

はじめに

■ 守備範囲 ●



はじめに

■ 歴史的経緯

□ Perfect Graph:

- すべての導出部分グラフにおいて、最大クリークの大きさと彩色数が一致する。

□ Berge の予想(1960):

- G が Perfect Graph $\Leftrightarrow G$ と G の補グラフが長さ5以上の奇数長の「弦を持たないグラフ」を導出部分グラフとしてもたない。

□ Chudnovsky, Seymour, Robertson, Thomas らによる解決(2002)

- 多くの分類と特徴づけの積み重ねによる解決

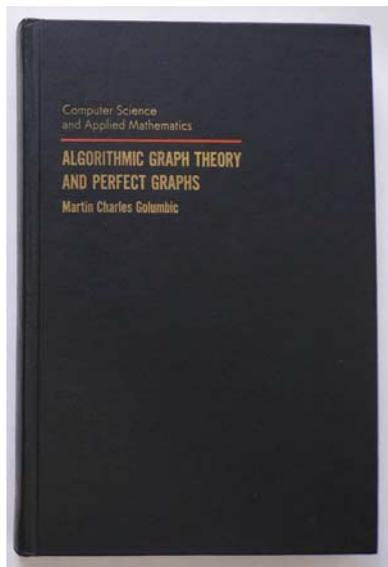
はじめに

- Strongly Perfect Graph {Conjecture|Theorem} の研究の歴史的意味
 - 計算量の理論的観点：
 - 彩色数、最大クリークなどの代表的なNP完全問題の、特徴づけが得られる
 - アルゴリズム論的観点：
 - 一般のグラフ上でNP完全な問題でも、クラスを限定することにより、効率的なアルゴリズムを構築できる
 - グラフ理論的観点：
 - さまざまな条件による分類により、Perfect graph や部分クラスについての有用な特徴づけが得られる

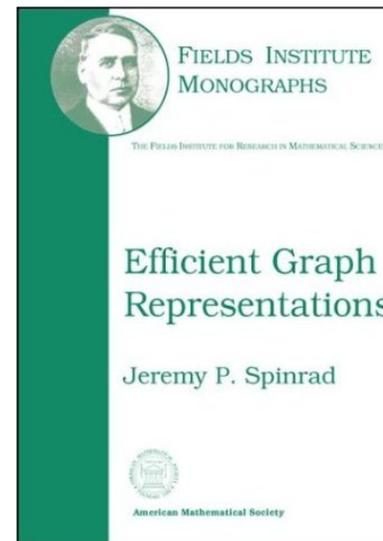
はじめに

■ この分野の標準的な教科書

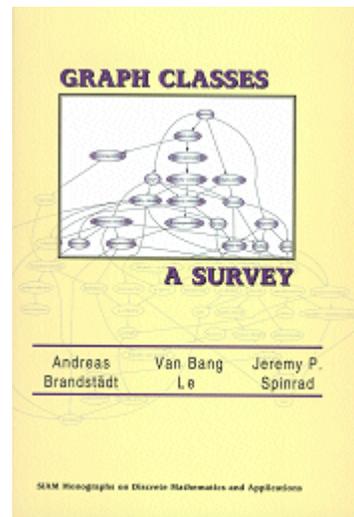
1980年 Algorithmic Graph Theory
M.C. Golumbic



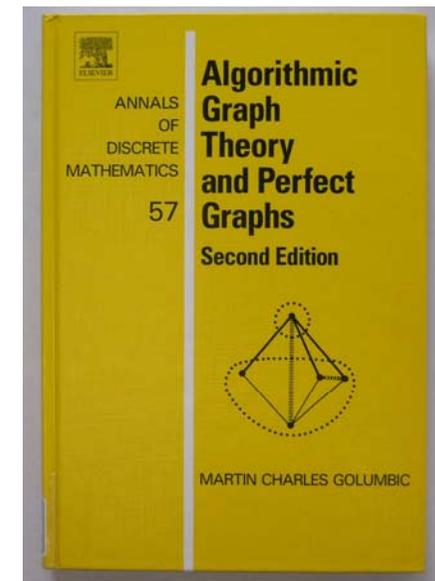
2003年 Efficient Graph Representations
J.P. Spinrad



1999年 Graph Classes: A Survey
A. Brandstädt, V.B. Le, J.P. Spinrad

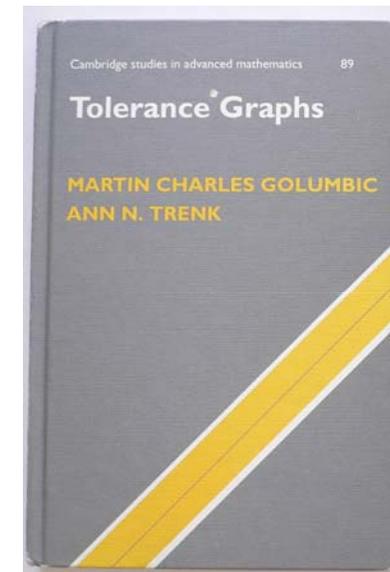
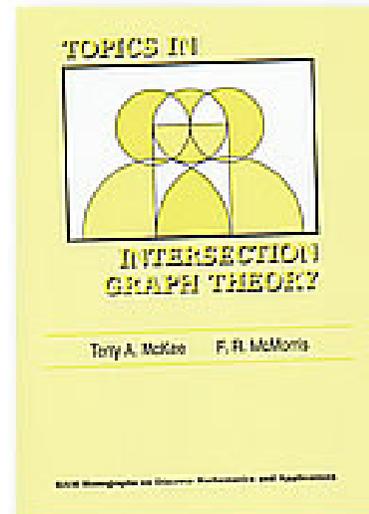
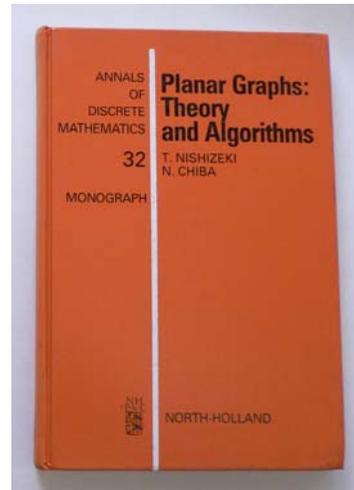
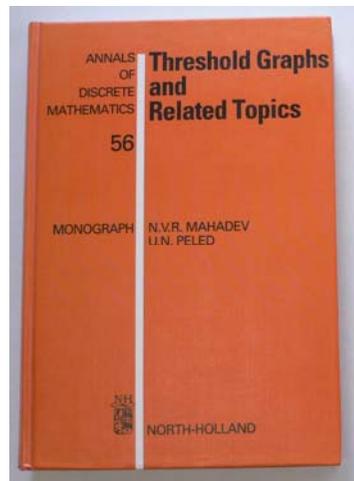


2004年 Algorithmic Graph Theory
2nd Edition. M.C. Golumbic



はじめに

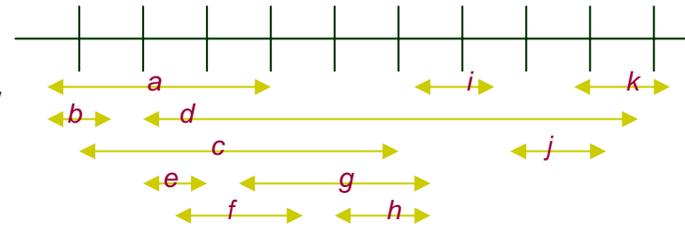
■ この分野のマニアックな参考書



今日の話の流れ

1. **グラフクラスの紹介**
 - 幾何的なモデルを持つクラス...chordal graph, interval graph
 - 数学的なモデルを持つクラス...permutation graph
2. **グラフクラスの包含関係に関して遺伝的な問題**
 - グラフの同型性判定問題
3. **グラフクラスの包含関係に関して独立な問題**
 - グラフの認識問題
4. **現在のグラフクラスの枠組みでの未解決問題(趣味編)**
5. **今後有望な新しい‘グラフクラスの’枠組み(偏見編)**
 - Scale Free Graph...Randomized Algorithm + Graph Class
 - Linkage...Computational Geometry + Algorithm + Graph Class

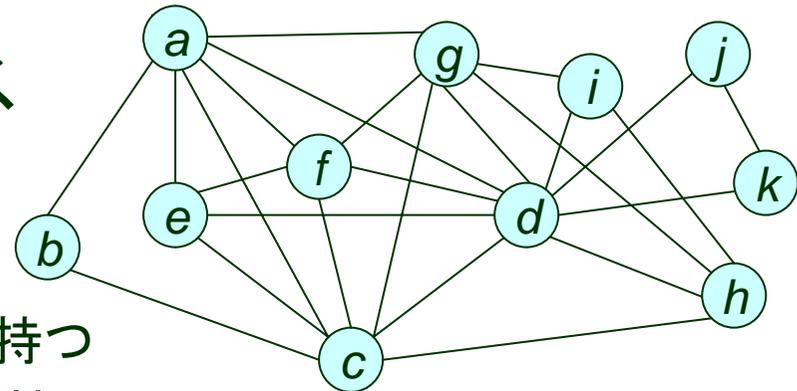
1. グラフクラスを紹介します



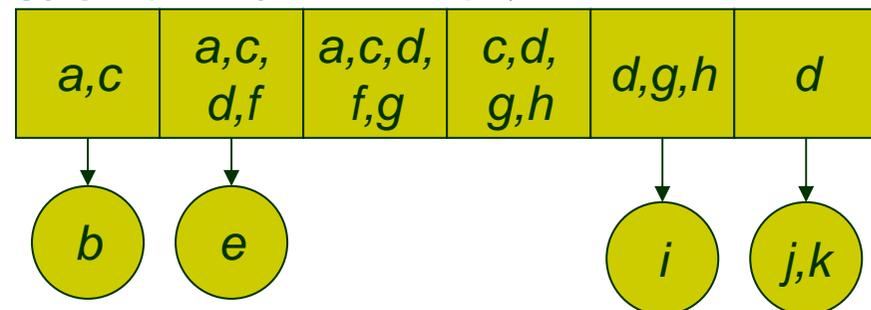
■ 幾何的なモデルを持つクラス

□ interval graph

- 各頂点は区間に対応
- 区間が重なるなら頂点間に辺を持つ
- 1つのグラフは多くの区間表現を持つ
- すべての可能な区間表現を表現するMPQ-treeで表現できる
- MPQ-treeを用いれば線形時間で同型性などが判定できる



□ chordal graph



1. グラフクラスを紹介

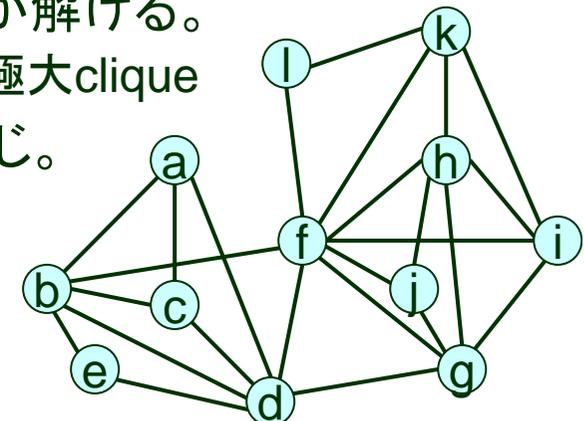
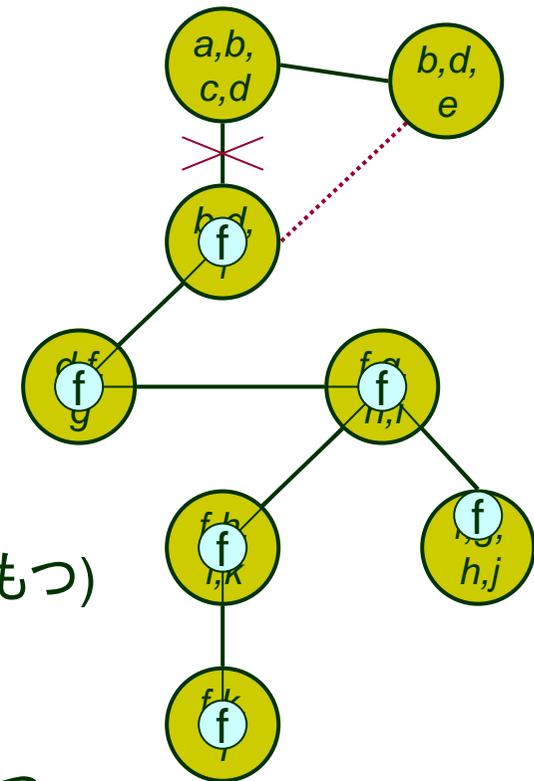
■ 幾何的なモデルを持つクラス

□ interval graph

- 各頂点は区間に対応
- MPQ-treeを用いれば線形時間で同型性が判定できる

□ chordal graph (※他にも多くの特徴づけをもつ)

- 各頂点は subtree に対応
- subtree が重なるなら頂点間に辺を持つ
- 1つのグラフは多くの clique tree 表現を持つ
- Clique tree 上で DP を使えば、多くの問題が解ける。
 - 例: clique tree 上の各頂点は元のグラフの極大clique
- 同型性判定問題は一般のグラフのそれと同じ。



1. グラフクラスを紹介

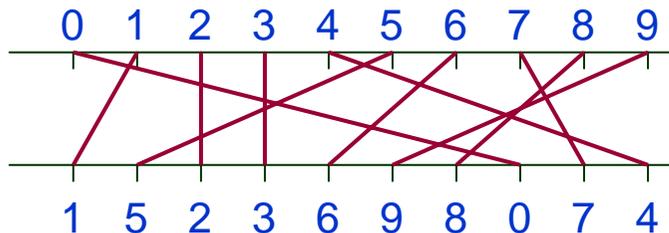
面白い性質の例:

- 補グラフもPermutation Graph
- 最長減少列が最大clique

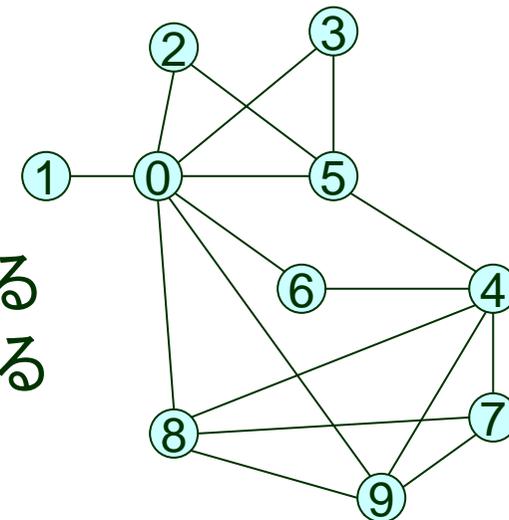
■ 数学的なモデルを持つクラス

□ permutation graph

- ある permutation σ によって特徴付けられる
- $i < j$ かつ $\sigma(i) > \sigma(j)$ なら辺で結ばれる



- 認識問題や同型性は簡単に解ける
- 「端から見ていく」ことでDPが使える



2. 包含関係に関して遺伝的な問題

- グラフの同型性判定問題(Graph Isomorphism)
 - 一般のグラフの同型性判定問題...NPに属していることは自明だが、NP-完全かどうかは未解決。
 - あるグラフクラスCがGI完全...C上でのGI問題が一般のグラフ上のGI問題と同等な困難さを持つ。
 - e.g., Bipartite Graph, Chordal Graph, (上原、戸田、名古屋; 2005)
 - グラフクラス $C_1 \subseteq C_2$ について
 - C_1 がGI完全なら、 C_2 もGI完全
 - C_2 でGIが多項式時間で解けるなら、 C_1 でも同様。

2. 包含関係に関して遺伝的な問題

- グラフの同型性判定問題(Graph Isomorphism)
 - GI完全と多項式時間で解けるクラスの境界線をはっきりさせる
 - ⇒GI問題の本質を明らかにする(群論?)
 - ⇒GI問題はNP完全なのかどうか?
 - GI問題を解く効率の良いアルゴリズムは存在するのか?
 - ⇒一般のグラフに対して $O(2^n)$ 時間で解けるか?
 - ⇒Quantumなどの別の計算機モデルではどうか?

3. 包含関係に関して独立な問題

■ グラフの認識問題

□ クラスの特徴をチェックする必要があるので、クラスの包含関係と無関係。

■ Chordal graph の認識

LexBFS(Rose, Tarjan, Lueker; 1976)

■ Interval graph の認識

PQ-tree で線形(Booth, Lueker 1976) \Rightarrow ...

\Rightarrow LexBFS \times 5(Corneil, Olariu, Stewart; SODA, 1999)

■ Circular arc graph の認識

NP完全? $\Rightarrow O(n^3) \Rightarrow \dots \Rightarrow$ 線形時間(McConnel, FOCS, 2001)

4. 現グラフクラスでの未解決問題

- 現在のグラフクラスの枠組みでの未解決問題(趣味編)
 - 数学的興味: 同型性判定問題
 - 台形グラフ(Interval graph と permutation graph を含む一般化)
 - Bioinformatics 系応用:
 - Interval graph などの線形な幾何的表現を持つクラス
 - 大規模 & 単純な構造のグラフ上の高速(線形時間)なアルゴリズム
 - 無線ネットワーク系応用:
 - (Unit) disk graph などの面的な幾何的表現を持つクラス
⇒よりリアルな問題設定?

5. 今後有望な新しい枠組み

■ Scale Free Graph; Web, Internet などの社会ネットワークのモデル

□ Randomized Algorithm + Graph Class

$G_{n,p}$ や $G_{n,m}$

□ Erdős & Rényi 式のRandom Graphモデル(1959～)

- グラフの構造(degreeなど)が一様
- ある種 of 社会ネットワーク(e.g. WWW, Internet)のモデルとしては不適切

□ 新しいRandom Graph モデル(1998～)

- WWW, Internet などは頂点の次数がベキ法則に従って分布
 $\Pr(\text{degree}=k) \sim k^{-\gamma}$
- Small world network, Scale free graph, ...

社会ネットワーク
だとだいたい
 $\gamma \sim 3$ 程度

5. 今後有望な新しい枠組み

- 多くの入門書が...



5. 今後有望な新しい枠組み

- Theoretical Computer Scientist としての注目株
 - Preferential attachment model [Barabási, Albert; 1999]
 - 作り方(定数 m)
 - G_0 =頂点数 m のクリーク
 - G_i は G_{i-1} に degree m の頂点 v を一つ追加する
 - G_{i-1} の degree の大きい頂点ほど v からの辺をつけられやすい
 - Cooper, Frieze らの理論的な解析(SODA, 2005)
 - Random walk の cover time の期待値の上界と下界を与えた
 - 増田, 巳波, 今野のグラフクラス[Physical Review E; 2004]
 - Disc graph と Threshold graph の一般化
 - 無線ネットワークなどのモデルになりうる

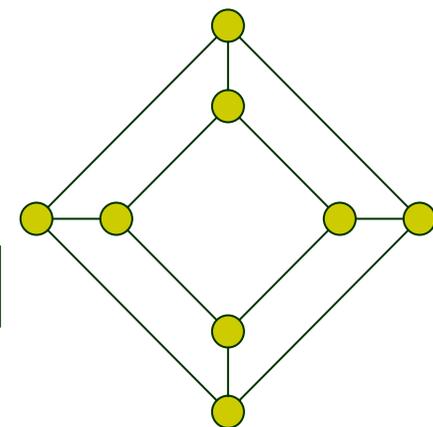
5. 今後有望な新しい枠組み

- Linkage; 「硬い」辺を持つグラフ
 - Computational Geometry + Algorithm + Graph Class
 - 『頂点』と『長さが変わらない辺』から構成されるグラフ。頂点は joint で、辺は自在に(2D内or 3D内)回転する。
 - 長い歴史を持つが...近年の新しい応用からの問題
 - コンピュータグラフィックス/アニメーション
 - バイオインフォマティクス...機能は形状で決まる
 - (ナノ)ロボットの制御...ロボットアーム

5. 今後有望な新しい枠組み

- Linkage; 「硬い」辺を持つグラフ
 - Computational Geometry + Algorithm + Graph Class
 - 一般には、かなり難しい
 - 例1: 1点で固定された gadget がある点まで伸ばせるか？
⇒PSPACE困難[Hopcroft, Joseph, Whitesides; 1984]
 - 例2: 同型でも「硬さ(Rigidness)」が異なるグラフがある
⇒構造計算(!!)が必要
 - 例3: 2次元と3次元でだいぶ違う
⇒3次元だとなんでも裏返せる

chordal graph = rigid circuit graph



5. 今後有望な新しい枠組み

- Linkage; 「硬い」辺を持つグラフ
 - Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, and Polyhedra

Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke,
Cambridge University Press

2006年末か
2007年初頭に出るはず

**The Fourth International Conference
on Origami in
Science, Mathematics, and Education
(4OSME)**

September 8-10, 2006.



文献リスト

■ はじめに

- “The Strong Perfect Graph Theorem”,
<http://www.cs.concordia.ca/~chvatal/perfect/spgt.html>
- マニアックな教科書
 - Planar Graphs: Theory and Algorithms, T. Nishizeki and N. Chiba, Annals of Discrete mathematics 32, North-Holland, 1988.
 - Threshold Graphs and Related Topics, N.V.R. Mahadev and U.N. Peled, Annals of Discrete Mathematics 56, North-Holland, 1995.
 - Topics in Intersection Graph Theory, T.A. McKee and F.R. McMorris, SIAM, 1999.
 - Tolerance Graphs, M.C. Golumbic and A.N. Trenk, Cambridge studies in advanced mathematics 89, Cambridge, 2004.

文献リスト

■ グラフクラスの紹介

□ 幾何的なモデルを持つクラス

■ 区間グラフのMPQ-tree表現

- An Incremental Linear-Time Algorithm for Recognizing Interval Graphs, N. Korte and R.H. Möhring, SIAM J. on Computing, 18(1), 68-81, 1989.

■ 包含関係に関して遺伝的な問題

- Graph Isomorphism Completeness for Chordal Bipartite Graphs and Strongly Chordal Graphs, R. Uehara, S. Toda and T. Nagoya, Discrete Applied Mathematics, 145(3), 479-482, 2004.

文献リスト

■ 包含関係に関して独立な問題

- Algorithmic Aspects of Vertex Elimination on Graphs, D.J. Rose, R.E. Tarjan, and G.S. Lueker, SIAM J. on Computing, 5(2), 266-283, 1976.
- Testing for the Consecutive Ones Property, Interval Graphs, and Graph Planarity Using PQ-tree Algorithms, K.S. Booth and G.S. Lueker, J. Comput. Sys. Sci., 13, 335-379, 1976.
- The Ultimate Interval Graph Recognition Algorithm?, D.G. Corneil, S. Olariu, and L. Stewart, 9th SODA, 175-180, 1998.
- Linear Time Recognition of Circular-arc Graphs, R.M. McConnell, 42nd FOCS, 386-394, 2001.

文献リスト

■ Scale Free Graph

□ クラシックなRandom Graph

- Random Graph, 2nd Edition, B. Bollobas, Cambridge studies in advanced mathematics 73, Cambridge, 2001.

□ たくさんの入門書の中のお勧め

- 新ネットワーク思考、A.L. バラバシ著、青木薫訳、NHK出版、2002.
- 複雑な世界、単純な法則、M. ブキャナン著、阪本芳久訳、草思社、2005.
- 複雑ネットワークの科学、増田直紀、今野紀雄著、産業図書、2005.
- 「複雑ネットワーク」とは何か、増田直紀、今野紀雄著、ブルーバックスB1511、講談社、2006.

□ 論文

- Emergence of Scaling in Random Networks, A.-L. Baranasi and R. Albert, Science, 286(5459), 509-512, 1999
- Geographical Threshold Graphs with Small-World and Scale-Free Properties, N. Masuda, H. Miwa, and N. Konno, Physical Review E, <http://jp.arxiv.org/pdf/cond-mat/0403524>, 2005.
- The Cover Time of Two Classes of Random Graphs, C. Cooper and A. Frieze, 16th SODA, 961-970, 2005.

文献リスト

■ Linkage

□ クラシックな結果

- Movement problems for 2-dimensional linkages, J.E. Hopcroft, D.A. Joseph, and H. Whitesides, SIAM J. on Computing, 13, 610-629, 1984.

□ 構造計算(?)

- 形態解析、半谷裕彦、川口健一著、培風館、1991.

□ 未刊本

- Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, and Polyhedra, E.D. Demaine and J. O'Rourke, Cambridge Press, 2007?.

☆ <http://www.fucg.org/> にサポート情報や元になった Survey paper があります。