

# ネットワーク科学におけるフラクタル分析

中央大学理工学部物理学科 松下 貢

ネットワークは生態系、食物連鎖、細胞内化学反応系、電話網、www、インターネットなど、自然界や社会に普遍的に存在する。私達は意識するとしないうちに、経済、社会活動を通じていろいろなネットワークの中に生きている。ここでは一般的な複雑性科学の視点から、現実に見られるネットワークの構造を分析し、多くのネットワークに共通した特徴・性質を議論する。さらにそれらの性質を持つ始原的なモデルを考察し、現実のネットワークと比較することにより、モデルの有効性、問題点などを議論する。

生態系は動植物が構成する大規模なネットワークとみなされる。大腸菌などの細菌細胞の活動を取り上げてみると、外部から必要なものを取り入れて加工し利用して不要になったものを排出する複雑な化学工場とみなすことができる。その意味で細胞内部には数多くの化学物質の間に複雑な化学反応のネットワークが張り巡らされている。友人関係、親戚関係は私達の日常生活、社会生活の上で重要な人の間のネットワークである。企業の組織はネットワークそのものである。また、最近特に重要になり日常生活にさえ無視できなくなってしまったインターネットは有線、無線を問わず物理的につながったルーターやコンピュータの間の複雑なネットワークであり、wwwはハイパーリンクでつながったウェブページの複雑なネットワークである。一見複雑すぎて何の関連もなさそうに見えるこれらのネットワークにも何か共通した特徴があるのであろうか。この問題を複雑性科学の視点から議論してみたい。

複雑系とは同一ではない要素が多数集まって複雑に絡み合い、非線形的に相互作用しながらまとまっているような系をいう。典型的な例は脳を初めとする生物の組織や生態系などであるが、地球環境そのものあるいはその中で行動する人間の社会も含まれる。このような系では要素間の複雑な相互作用とその非線形性のために、局所的・部分的な相互作用の形あるいは構成要素の個性だけからは予測できない多様な特性が自己組織的に発現したり、系内のごく些細な出来事が系全体にわたるほどの大きな変動に発展する可能性がある。

複雑系に起こる現象を研究する複雑性科学は、歴史的には非線形・非平衡系における散逸構造や自己組織化、カオス、フラクタルの研究の発展とコンピュータ技術の飛躍的進歩とがあいまって生じた、既存の科学の枠を超えた現代科学の潮流である。それは生物組織の発生・分化による機能の発現、免疫系、脳の働きのメカニズム、生態系での生物の適応や進化のメカニズム、さらには人間の政治、経済、文化的現象をも含んでおり、単純な平衡理論や最適化理論あるいは要素還元主義的なアプローチでは理解できない現象を研究対象としている。

このように見てくると、上述のネットワークは複雑系の舞台を構成しているとみなされ

よう。現実のネットワークを抽象化したネットワークは節 (node) と稜 (edge) から構成されると考える。このようなネットワークの構造を分析する際に、注目すべき代表的な特徴が三つあることがわかる。第一は **small world** (世界は狭い!) かどうかという点である。これはネットワークの任意の二つの節を取り上げて、その間の最短ルートを見ると稜の数が平均するといくらぐらいかという性質である。具体的には、日本全国の電話帳から全くランダムに抽出した人と自分自身とのつながりは非常に遠いと思いがちであるが、実際には途中でせいぜい6人ぐらいを介してつながってしまうというのが **small world** 性である。ネットワークの第二の特徴付けはクラスター化 (**clustering**) である。これは徒党を組む傾向を表しており、友達の友達も友達という感じで、社会的ネットワークに特に強い特徴であろう。ネットワークを特徴付ける第三の性質は一つの節が持つ稜の数 (次数; **degree**) の分布 (次数分布; **degree distribution**) である。以上の三つの性質を使うと、概ね現実のネットワークが特徴付けられることがわかっている。

上に挙げた現実のネットワークの構造を分析してわかることは、まず共通している性質が **small world** 性であろう。ネットワークの二つの節を結ぶ稜の“長さ”を通常の高さと混同するために、二つの節をネットワークから任意に選ぶとその間に多数の稜が介在すると思われがちである。実際には節の総数が  $N$  のネットワークの任意の2つの節の間の平均“距離 (稜の数)”  $l$  は  $l \sim \ln N$  とスケールされる。これは  $N$  が大きな数の場合には驚くほど小さな数である。しかし、この **small world** 性は、何か調べごとがあって関連したウェブページを検索している場合には日常的に経験していることでもある。

現実のネットワークの第二の特徴はクラスター化が大きいことであろう。これは友人関係にしても、企業を単位とした経済活動にしても、考えや方針を同じくするものが徒党を組む傾向があることの反映であり、比較的容易に納得できる。

ネットワークのそれぞれの節が持つ稜の数の分布である次数分布を調べると、それがべき乗分布を示すことが多い。これが現実のネットワークの最も顕著な性質かもしれない。べき乗分布にはそれを特徴付けるスケールがないために、そのような分布のことをスケールフリー (**scale-free**) であるという。それで、べき乗的次数分布を持つネットワークはスケールフリー・ネットワークと呼ばれる。

それでは、以上のような現実のネットワークの特徴を適切に記述する、なるべく単純なモデルは考えられるであろうか。これが次の問題である。グラフ理論で伝統的に議論される最も単純で数学的にも基礎付けがなされている、プロトタイプなモデルは有名な **Erdős-Rényi** のランダムグラフ理論であり、総数  $N$  の節を任意に二つ選んで稜でつないでいくモデルである。このいわゆるランダムネットワークは現実のネットワークの **small world** 性を説明するが、クラスター化が非常に弱く、また当然ながら次数分布がポアソン分布であるために、現実のネットワークの記述には向いていない。この **small world** 性を維持しつつクラスター化が大きいようなモデルとして提案されたのが、**Watts-Strogatz** の **small world** ネットワークモデルである。これはたとえば物理的に最近接の節だけとつなが

れているような規則的な(格子状の)ネットワークから出発して、確率  $p$  で稜をつなぎかえるというものである。したがって、 $p=0$  で規則格子状ネットワークである。このとき、すべての節が互いにつながっているので、クラスター化は完全である。しかし、任意の二つの節の間の平均距離は  $\ell \sim N$  とスケールされるので、small world とは程遠い。他方、 $p=1$  でランダムネットワークとなる。すなわち、Watts-Strogatz モデルは規則格子状ネットワークとランダムネットワークを結ぶモデルなのである。ここで注目すべきことは、 $p$  の値の広い範囲でクラスター化が大きいままで  $\ell$  が小さくなることであり、Watts-Strogatz モデルの興味深い点である。しかし、次数分布に関してはランダムネットワークと似たところがあり、現実とは合わない。

これに対して、次数分布までそれなりに説明するモデルとして提案されたのが、Barabási-Albert の scale-free ネットワークモデルである。このモデルでは次数分布がべき乗的である理由として、まずネットワークは成長するものであると考える。最近注目されているネットワークのほとんどは確かに日毎に成長している。次に、新しくできた節は、既存の節とその次数に比例して稜を形成する (preferential attachment) と仮定する。ウェブなどを考えた場合、人気のある節には一層集中しやすいので、これは非常にもっともらしい仮定である。実際、計算機シミュレーションによると、この Barabási-Albert モデルはべき乗的な次数分布を自己組織的に生み出し、現実のネットワークの三つの特徴を少なくとも定性的にすべて満たすような結果を与えることがわかっている。その意味で、このモデルは現時点で最も注目すべきものであろう。

最後に問題となるのは、定性的にはともかく、定量的にもこれまでのモデルは満足すべきものかどうかである。現実は多様であり、ただひとつのモデルですべてがきれいに記述できることはあり得ない。次数分布一つをとっても、べき乗的に見えるのは分布のすその部分だけということもしばしば起こる。分布のすそはまれな事象 (rare event) を表しており、経済物理でのようにそれ自体に注目する場合は別として、そうでない場合にはそれほど重要性があるわけではない。これらのことをごく最近分析された例を考慮しながら、批判的に議論してみたい。