Scale-Free ネットに関する最新動向

林 幸雄 (yhayashi@jaist.ac.jp)

平成 14 年 12 月 11 日

Scale-Free(SF) ネットが持つ「べき乗則」の結合分布[1] は, インターネットのルータや WWW のリンク, 知人関係, 神経回路網, 電力網など, 現実のネットワークに共通した普遍的な特徴として, 数年前から（nature や Science などの科学雑誌で欧米諸国の研究者によって）大きく取り上げられるようになった. これらのネットワークは, ライフライン的な社会インフラとして広い応用対象（通信, 電力, 企業取引, コミュニティ等）を支えており, 不意の故障や悪意な攻撃に対しても頑強であることが強く要求される. それには, 広域なトラフィックの実測による（ボトルネック部分などの）現状理解のみならず, 理論解析やシミュレーションによる攻撃実験から, ネットワークの設計指針を見い出す努力が必要となる.

最近, この「べき乗則」に従う SF 構造に起因する情報伝搬やウィルスの蔓延特性, さらに, 効果的な免疫方法（災害時の復旧や, テロによる通信網の破壊防止も関係）などに関する本質的な研究が急速に進展している. 本稿は, こうした先端分野の日本における教育研究の普及の観点から, そのエッセンスを抽出したものである. 但し, 個人的力量の問題から, 重要ポイントの偏った選択や, 誤った解釈などが含まれているかも知れず, 詳細は原著論文を参照されたい.

これまで, ネットワークの研究は主に情報の分野であったが, SF ネットには従来とは異なる統計物理や数学などのアプローチが導入されており, さまざまな新しい発見がなされることが今後期待される（斬新な洞察力があれば, 局所分散的な自律構成原理などを, 工学屋が見つける余地も十分にある）. ここで紹介したトピックスに興味を示し, 既存の学問を技術にまで発展させられるような, 社会的に重要でチャレンジャブルなこの若い研究領域に参入される人々が, 少しでも増えることを願ってやまない.

[1] ネットワークの辺数が k 本となる頂点の頻度が, $k^{-\gamma}$ に比例する（$\gamma > 0$ は係数）結合分布. すなわち, 辺数が少ない大多数の頂点と, 辺数が多い hub 的な極く少数の頂点で構成された, 結合の疎密な部分が混在する構造を持つ.

1 BA(Barabási-Albert) ネットワークモデル

1.1 A.L. Barabási, R. Albert, and H. Jeong (Dept. of Phys., Univ. of Notre-Dame, USA)

Mean-field theory for scale-free random networks, Physica A, 272, pp. 173-187, 1999.

対象によらず広く適用可能な以下の**たった 2 つの基本原理によって, 結合分布が「べき乗則」となるネットワークが生成できる**ことを, 平均場近似法から解析的に示した.

Growth: m_0 個の孤立頂点から, 時刻 t ステップごとに頂点が 1 個ずつ追加され, ネットワークが成長していく.

Preferential Attachment: 新しい頂点からの m 本の辺（リンク）の結合相手として, 既存の頂点 i がその結合度 k_i に比例した頻度で選ばれる. $\Rightarrow$ rich-gets-richer

上記のどちらか片方でも欠けると, 指数分布やガウス分布となることから, それらはべき乗分布となるために必要不可欠であることが判明した. 以下に, べき乗分布の導出過程をまとめる.

各時刻に 1 頂点と m 本ずつ辺が追加されるので（結合総数は辺を 2 重に数える）,

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{m_0+t-1} k_j} = \frac{k_i}{2t}.$$

時刻 t_i に頂点 i が追加される最低辺数の初期条件 $k_i(t_i) = m$ において, これを解いて,

$$k_i(t) = m\sqrt{\frac{t}{t_i}}.$$

この関係式より, （時間に依存した）結合度 k_i が k より小さくなる確率（累積値の分布関数）は, 時間 t_i の確率密度 $\frac{1}{m_0+t_i}$ を用いて,

$$P(k_i(t) < k) = P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right) = 1 - P\left(t_i \le \frac{m^2 t}{k^2}\right) = 1 - \frac{m^2 t}{k^2(m_0+t)}.$$

ゆえに, 結合度 k の確率密度は,

$$P(k) = \frac{\partial P(k_i(t) < k)}{\partial k} = \frac{2m^2 t}{m_0 + t}\frac{1}{k^3} \to 2m^2 k^{-3} \quad (t \to \infty),$$

となり, べき乗分布 $P(k) \sim k^{-\gamma}$, $\gamma = 3$ を得る.

この $P(k)$ より, 漸近的な無限サイズ $(N = m_0 + t,\ t \to \infty)$ で,

$$< k >= \int_m^\infty kP(k)dk = \int_m^\infty 2m^2 k^{-2} dk = 2m,$$

$$< k^2 >= \int_m^{k_{max}} 2m^2 k^{-1} dk = 2m^2 \ln\left(\frac{k_{max}}{m}\right) \to \infty.$$

1.2 G. Bianconi, and A.L. Barabási (Univ. of Notre-Dame)

Competition and multiscaling in evolving networks, Europhys. Lett. Vol. 54, 2001.

新たに追加される辺に接続する頂点としての選ばれやすさが, その結合度 k_i のみならず頂点の fitness η_i にも比例するように改良された fitness モデル（fitter-gets-richer）.

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j}, \tag{1}$$

を解くために,

$$k_{\eta_i} = m \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\beta(\eta_i)}, \tag{2}$$

$0 < \beta(\eta) < 1$ を仮定し, fitness の分布 $\rho(\eta)$ による (1) の平均を考えれば, $C = \int \frac{\eta\rho(\eta)d\eta}{1-\beta(\eta)}$ を用いて $\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{\eta k_\eta}{Ct}$ となる. (2) より, これは解 $\beta(\eta) = \frac{\eta}{C}$ を持つ.

特に, $\rho(\eta)$ が $[0,1]$ 一様分布のとき, C は $e^{-2/C} = 1 - 1/C$ の解として $C^* = 1.255$. と求められ,

$$P(k) \propto \int_0^1 \frac{C^*}{\eta} \frac{d\eta}{k^{1+C^*/\eta}} \sim \frac{k^{1+C^*}}{\ln k},$$

に従う一般化されたべき乗分布を得る.

また, より現実的なネットワークモデルに改善するための関連研究として, 以下のものが挙げられる. これらの要件は全く独立ではなく, 例えば地理的近さや若い頂点に高い fitness を与えることで同時に満足できるものと思われる.

Geographical factors: C.G. Warren (Dept. of Phys., Univ. of Michigan) et al., lattice-based SF ネットワーク, cond-mat/0207324, 2002.
A. Medina (Computer Science Dept, Boston Univ.) et al,. Internet topological BRITE モデル, ACM-SIGCOMM, 2000.

$< k_i^{nn} >$ **Correlations:** R. Pastor-Satorras et al., 3 年間の inter-ISP ルータ結合の実測データと fitness モデルの整合性, Phys. Rev. Lett., Vol.87, 258701, 2001.

Age effects: S.N. Dorogovtsev et al., Phys. Rev. Lett., Vol. 85, No.21, 4633, 2000.

他にも, 既存の頂点間の辺を確率的に張り直すように修正し, かつ, 任意のべき指数 $\gamma > 0$ を持つ Generalized BA ネットワーク: R. Albert, and A.L. Barabási, Phys. Rev. Lett., Vol.85, No. 24, 5234, 2000.

2 ウィルスの拡散

2.1 R. Pastor-Satorras (Univ. Politècnica Catalunya, Spain), and A. Vespignani (ICTP, Italy)

Epidemic dymanics and endemic states in complex networks, Phys. Rev. E, Vol. 63, 066117, 2001.

頂点の感染密度 $\rho(t)$ に関する平均場方程式による SIS 感染モデルから, 感染が広がるための感染率のしきい値 λ_c が WS(Watts-Strogatz) ネットワークでは存在する一方, **BA ネットワークでは存在せず, どんな小さな感染源からでも蔓延する**ことを示した.

Small-World 特性をもつ WS ネットワーク:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -\rho(t) + \lambda < k > \rho(t)(1-\rho(t)) + (higher),$$

右辺第 1 項はランダムな感染からの復帰を, 第 2 項は Susceptible と Infected との接触感染を表し, λ は感染率である.

平衡条件 $\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \rho\{-1+\lambda < k > (1-\rho)\} = 0$ より, $\rho = 0$, あるいは $\exists \lambda_c =< k >^{-1}$,

$$\rho = 1 - \frac{1}{\lambda < k >} = \frac{\lambda - \lambda_c}{\lambda_c} + O((\lambda-\lambda_c)^2).$$

ゆえに, $\lambda < \lambda_c$ なら $\rho = 0$, $\lambda > \lambda_c$ なら $\rho \sim \lambda - \lambda_c$.

BA ネットワーク:

$$\frac{\partial \rho_k(t)}{\partial t} = -\rho_k(t) + \lambda k(1-\rho_k(t))\Theta(\rho(t)),$$

ここで, $\rho_k(t)$ は k 本の辺をもつ頂点の感染密度, $\Theta(\rho(t))$ は感染した頂点にリンクする確率で, 平衡点では感染率 λ だけに依存する.

平衡条件 $\frac{\partial \rho_k(t)}{\partial t} = 0$ より得られた $\rho_k = \frac{\lambda k \Theta(\lambda)}{1+k\Theta(\lambda)}$ を, $\Theta(\lambda) = \sum_k \frac{kP(k)\rho_k}{\sum_s sP(s)}$ に代入して, $P(k) = 2m^2k^{-3}$, $< k >= \sum_s sP(s) = 2m$ を用いれば（暗黙的に $N \to \infty$）,

$$\Theta(\lambda) = m\lambda\Theta(\lambda)\int_m^\infty \frac{1}{k^3}\frac{k^2}{1+\lambda k\Theta(\lambda)}dk, \tag{3}$$

となり, その解

$$\Theta(\lambda) = \frac{e^{-1/m\lambda}}{\lambda m}\frac{1}{1-e^{-1/m\lambda}},$$

から, 十分小さな λ に対して $\rho \sim e^{-1/m\lambda}$ となる. これは $\lambda_c = 0$ に相当する.

さらに, 任意のべき係数 $\gamma > 0$ をもつ Generalized BA ネットワークに対しても同様な解析がなされている. $0 < \gamma \leq 1$ では $\lambda_c = 0$, $1 < \gamma < 2$ では $\exists \lambda_c \sim 0$, $\gamma > 2$ では $\exists \lambda_c \neq 0$ となり, 上記との違いは結合度の相関をもつことによると考えられている.

Immunization of complex networks, Phys. Rev. E, Vol. 65, 036104, 2002.

BA ネットワークにおける SIS モデルの平衡解 $\rho_k \neq 0$ が得られて, なおかつ, 先の式 (3) が $0 < \Theta \leq 1$ の解をもつには, その右辺に相当する関数の傾きが,

$$\frac{d}{d\Theta}\left(\frac{1}{<k>}\sum_k kP(k)\frac{\lambda k\Theta}{1+\lambda k\Theta}\right)\Big|_{\Theta=0} \geq 1,$$

を満たす必要がある. よって, （$\Theta = 0$ における上式の等号から）しきい値 λ_c は,

$$\frac{\sum_k kP(k)\lambda_c k}{<k>} = \frac{<k^2>}{<k>}\lambda_c = 1.$$

$<k>= 2m$, $<k^2>= 2m^2\ln(k_{max}/k)$, $k_{max} \sim m\sqrt{N}$ より, 感染が広がるしきい値は,

$$\lambda_c = \frac{<k>}{<k^2>} \sim \frac{1}{\ln(N)} \to 0 \quad (N \to \infty).$$

全ての頂点を同様な率で免疫する場合, ウィルスが絶滅する免疫率のしきい値 g_c は,

$$g_c = \sum_{k>\lambda^{-1}}\left(1-\frac{1}{\lambda k}\right)P(k), \;\; or\ explicit\ \ \frac{1}{3}(m\lambda)^2,$$

となって, $\lambda \to 0$ でない限りなかなか絶滅しない（高い免疫率 $g > g_c$ が必要）.
一方, 結合率に従って（hub を重点的に）免疫する場合,

$$g_c \sim e^{-2/m\lambda},$$

となって, 広い範囲の λ で指数的に小さなしきい値が得られ, **比較的低い免疫率でも絶滅が可能**となる.

2.2 Z. Dezsö, and A.L. Barabási (Univ. of Notre-Dame)

Halting viruses in scale-free networks, Phys. Rev. E, Vol. 65, 055103, 2002.

結合度 k をもつ頂点を $\delta_0 k^\alpha$ の確率で（hub を重点的に）治癒する場合, SIS モデルの感染率の平均場方程式は,

$$\frac{\partial \rho_k(t)}{\partial t} = -\delta_0 k^\alpha \rho_k(t) + \lambda k(1-\rho_k(t))\Theta(\lambda/\delta_0).$$

平衡条件 $\frac{\partial \rho_k(t)}{\partial t} = 0$ より得られる

$$\rho_k = \frac{\lambda\Theta(\lambda/\delta_0)}{k^{\alpha-1} + \lambda\Theta(\lambda/\delta_0)},$$

は, $\Theta(\lambda/\delta_0) = \sum_k \frac{kP(k)}{<k>}\rho_k$, および, $< k >= 2m$, $P(k) = 2m^2k^{-3}$ から,

$$m\lambda \int_m^\infty \frac{dk}{k^2(k^{\alpha-1} + \lambda\Theta(\lambda/\delta_0))} = 1,$$

となり, 感染が広がらない $\Theta(\lambda_c/\delta_0) = 0$ においてこれを解くと, 感染率のしきい値 λ_c が hub を特徴付ける $\alpha > 0$ の単調増加関数として,

$$\lambda_c = \alpha m^{\alpha-1},$$

となる．ゆえに, **hub を重点的に治癒すると, 感染率 $\lambda < \lambda_c$ で広がりを阻止できる**.

2.3 R.M. May (Dept. of Zoology, Univ. of Oxford, UK), and A.L. Lioyd (Prog. in Theor. Biology, IAS, Princeton)

Infection dynamics on scale-free networks, Phys. Rev. E, Vol. 64, 066112, 2001.

SIR モデルの流行病理論より, final epidemic size は $I =< 1 - e^{-k\alpha} >$ で与えられる．ここで,

$$\alpha = \rho_0 \frac{< k(1 - e^{-k\alpha}) >}{< k >^2} = \rho_0 \frac{2m^2}{4m^2} \int_m^\infty \frac{dk}{k^2}(1 - e^{-k\alpha}),$$

2 次感染平均数と呼ばれる $\rho_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{\delta} < k >$, 感染率 λ, 回復率 δ, また BA ネットワークにおいては $< k >= 2m$, $P(k) = 2m^2k^{-3}$ である（暗黙的に $N \to \infty$）．これより,

$$I = 2e^{1-\delta}e^{-2/\rho_0}\left\{1 + O\left(\frac{e^{-2/\rho_0}}{\rho_0}\right)\right\},$$

となる．すなわち, $\ln I$ は $1/\rho_0$ に関する単調減少関数となる．

より一般的なべき指数 $2 < \gamma < 3$ を持つとき, $P(k) = (\gamma - 1)m^{\gamma-1}k^{-\gamma}$ となり,

$$I = (\gamma-1)\int_1^\infty \frac{dx}{x^\gamma}(1-e^{-xm\alpha}) = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma-2}\right)\left\{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}\Gamma(3-\gamma)\rho_0\right\}^{1/(3-\gamma)} \times (1+(higher)),$$

を得る．また, 有限サイズ効果として, k_{max} が小さい程, 小さな $1/\rho_0$ の値で $\ln I$ が激減する（感染が広がらなくなる）ことを数値計算により示した.

2.4 V.E. Eguíluz (Univ. de las Islas Baleares, Spain), and K. Klemm (Center for Chaos and Turbulence Studies, Denmark)

Epdemics Threshold in Structured Scale-Free Networls, Phys. Rev. Lett., Vol. 89, No. 10, 108701, 2002.

頂点 i の隣接頂点 j の平均結合度は, $k_i^{nn} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{k_i}\sum_j k_j$ で定義される.
高度にクラスタ化された SF ネットワークの hub に対しては,

$$< k_{hub}^{nn} >=< k > -1,$$

となる. これは, 感染率のしきい値 $\lambda_c = \frac{1}{<k>-1}$ の存在を示唆する.
一方, ランダムな SF（BA）ネットワークにおいては, 条件付き確率 $P_c(k'|k)$ を用いて,

$$< k^{nn} >= \sum_{k'} k' P_c(k'|k) = \sum_{k'} \frac{(k')^2}{< k >} P(k') = \frac{< k^2 >}{< k >},$$

となり, 上式に $< k^2 >= \sum_{i=1}^{N} k_i(N)$, $k_i(N) = \frac{<k>}{2}\sqrt{\frac{N}{i}}$ を代入すると,

$$< k^{nn} >= \frac{< k >}{4} \ln N,$$

を得る（クラスタ化された SF でもこうしたサイズ効果をもつ？）.
Internet のルータなど現実のネットワークでは, 結合が密な頂点が疎な頂点と結合しがちな相関があり, k_i に対する $< k_i^{nn} >$ がべき乗分布に似た傾向を示す.

2.5 N.E. Newman (Center for the Study of Complex Systems, Univ. of Michigan, & Santa Fe Institute)

Spread of epidemic disease on networks, Phys. Rev. E, Vol. 66, 016128, 2002.

母関数を用いて, 広い範囲のネットワーク上の SIR モデルが厳密に解けることを示した. 適当な確率分布 p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ のもとで母関数

$$G_0(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k,$$

を考えると, $G_0(1) = \sum_k p_k = 1$ や以下の表現を得る（$'$ は x に関する微分）.

$$p_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k G_0}{dx^k}\bigg|_{x=0},$$

$$< k >= \sum_k k p_k = G_0'(1), \quad < k^n >= \sum_k k^n p_k = \left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^n G_0(x) \right]_{x=1}.$$

また, T を疾患の可伝達度 (transmissibility) とし, 疾患爆発 (outbreak) サイズ s の分布を $P_s(T)$ として, ランダムに選ばれた頂点から接続辺を介して到達可能なクラスタサイズを表す母関数

$$H_0(x;T) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{s=0}^{\infty} P_s(T) x^s,$$

を考えると, Cauchy の積分公式より,

$$P_s(T) = \frac{1}{s!} \frac{d^s H_0}{dx^s} \bigg|_{x=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{H_0(z;T)}{z^{s+1}} dz, \tag{4}$$

を得る. 一般には (4) を解かなければならないが, いくつかの量を以下のようにして求めることができる. まず, 発生サイズの平均 $< s >$ は, $H_0'(1;T) = \sum_{s=0}^{\infty} s P_s(T)$ より,

$$< s >= H_0'(1;T) = 1 + \frac{G_0'(1;T)}{1 - G_1'(1;T)} = 1 + \frac{T G_0'(1)}{1 - T G_1'(1)}.$$

上記右辺第 2 項の分母がゼロとなる, outbreak（疾患が無限に広がる）のしきい値 T_c は,

$$T_c = \frac{1}{G_1'(1)} = \frac{G_0'(1)}{G_0''(x)} = \frac{\sum_k k p_k}{\sum_k k(k-1) p_k},$$

となる. ここで, $G_1(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{G_0'(x)}{G_0'(1)}$, $G_0(x;T) \stackrel{\mathrm{def}}{=} G_0(1 + (x-1)T)$, $G_1(x;T) \stackrel{\mathrm{def}}{=} G_1(1 + (x-1)T)$ である.

さらに, Giant Component から孤立した有限サイズの感染集団の比率を $S(T)$ で表すと, P_s が疾患爆発 (outbreak) なので,

$$S(T) = 1 - \sum_s P_s = 1 - G_0(u,;T), \quad u \stackrel{\mathrm{def}}{=} H_1(1;T) = G_1(u;T),$$

となり（関係式 $H_0(x;T) = x G_0(H_1(x;T);T)$, $H_1(x;T) = x G_1(H_1(x;T);T)$ より）, これらを数値的に解けばよい.

具体例として, 次数 κ の指数的 cutoff を持つべき乗分布

$$p_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ C k^{-\alpha} e^{k/\kappa} & k \geq 1 \end{cases}$$

を考え (C, α は係数), 上記の $< s >$ や T_c を求めている. 正規化条件 $\sum_k p_k = 1$ より, 係数 C は代数的整数論における n 次の polylogarithm $\mathrm{Li}_n(x)$ を用いて,

$$p_k = \frac{k^{-\alpha} e^{k/\kappa}}{\mathrm{Li}_\alpha(e^{-1/\kappa})}, \tag{5}$$

と表される ($k \geq 1$). この式 (5) より,

$$G_0(x) = \frac{\mathrm{Li}_\alpha(xe^{-1/\kappa})}{\mathrm{Li}_\alpha(e^{-1/\kappa})}, \quad G_1(x) = \frac{\mathrm{Li}_{\alpha-1}(xe^{-1/\kappa})}{x\mathrm{Li}_{\alpha-1}(e^{-1/\kappa})},$$

が得られ, 先の議論にこれらの母関数を代入して,

$$T_c = \frac{\mathrm{Li}_{\alpha-1}(e^{-1/\kappa})}{\mathrm{Li}_{\alpha-2}(e^{-1/\kappa}) - \mathrm{Li}_{\alpha-1}(e^{-1/\kappa})},$$

$$< s >= 1 + \frac{T[\mathrm{Li}_{\alpha-1}(e^{-1/\kappa})]^2}{\mathrm{Li}_\alpha(e^{-1/\kappa})[(T+1)\mathrm{Li}_{\alpha-1}(e^{-1/\kappa}) - T\mathrm{Li}_{\alpha-2}(e^{-1/\kappa})]},$$

が得られる（平均パス長や平均 n 近傍頂点数なども同様な形式で導出されている）.

また, 可伝達度 T に対する有限サイズの感染率 S や平均 outbreak サイズ $< s >$, cutoff パラメータ κ に対する Giant Component のサイズなどに関する特性曲線が, 数値計算から求められている.

3 その他

3.1 W. Aiello (AT & T Labs), F. Chung (UCSD), L. Lu (Univ. of Pennsylvania)

A Random Graph Model for Power Law Graphs, Proc. of the 32nd STOC, 2000.

次数 x をもつ頂点の頻度 y が, べき乗則

$$\ln y = \alpha - \beta \ln x, \tag{6}$$

に従うランダムグラフ (V, E) の理論解析から, WWW リンク等における蝶ネクタイ構造の結び目に相当する相互に結合した Giant Component が,

1. $\beta > \beta_0 = 3.47875\ldots$, では Giant は存在せず, $\beta < \beta_0$ では唯一存在.
2. $2 < \beta < \beta_0$ では第 2 Largest Component のサイズが $\Theta(\ln |V|)$: 非常に小さい.
3. $\beta = 2$ のとき, そのサイズは $\Theta(\frac{\ln |V|}{\ln \ln |V|})$.
4. $1 < \beta < 2$ のとき, そのサイズは $\Theta(1)$ で, グラフは almost surely connected (a.s.c).
5. $0 < \beta < 1$ のとき, グラフは a.s.c.
6. $\beta = \beta_0$ では非常に複雑, $\beta = 1$ ではグラフの連結性に非自明な確率が存在.

を明らかにした. ここで, 式 (6) から,

1. 最大次数（辺数）X は $e^{\frac{\alpha}{\beta}}$.

2. 総頂点数

$$|V| = \sum_{x=1}^{X} \frac{e^\alpha}{x^\beta} \approx \begin{cases} \zeta(\beta)e^\alpha & \beta > 1 \\ \alpha e^\alpha & \beta = 1 \\ X/(1-\beta) & 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

$\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$ は Riemann の Zeta 関数.

3. 総辺数

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{X} x\frac{e^\alpha}{x^\beta} \approx \begin{cases} \frac{1}{2}\zeta(\beta-1)e^\alpha & \beta > 2 \\ \frac{1}{4}\alpha e^\alpha & \beta = 2 \\ \frac{1}{2}X^2/(2-\beta) & 0 < \beta < 2 \end{cases}$$

である. 現実のネットワークの実測値が $2 < \beta < 3$ となることの隠れた根拠が, 上記の結果から垣間見えるように思える.

3.2 R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan, A. Tomkins (IBM Almaden Research Center)

Extracting large-scale knowledge bases fron the web, Proc. of the 25nd VLDB Conf., 1999.

WWW などのように, 入次数と出次数のべき指数が異なる値を持つように制御できる, (α, β) モデルを提案. α, β コインの確率に従った結合頂点の選択によって, $\gamma_{in} = \frac{1}{1-\alpha}$, $\gamma_{out} = \frac{1}{1-\beta}$ を得る.

BA ネットワークが（$N \to \infty$ の漸近）解析的なのに対して, 頂点を追加しながら **SF ネットワークとして成長していく構成的なモデル**であるとともに, 十分大きな時間経過において, べき乗則を近似的に導くことができる.

3.3 B. Albert, H. Jeong, and A.L. Barabási (Univ. of Notre-Dame)

Error and attack tolerance of complex netwroks, nature, Vol. 406, 2000.

Internet のアキレス腱として, **SF ネットワークの構造が hub に対する攻撃によって極度に分断**されてしまう反面, ランダムな攻撃には極めて頑強であることを示し, 世界の注目を集めた.