

ネットワーク科学とその数理

-現実のネットワークに潜む共通性-

林 幸雄

yhayashi@jaist.ac.jp

北陸先端科学技術大学院大学

1. Introduction

日々の生活や経済活動, 物流や通信手段, 我々自身の体内メカニズムに至るまで, どれも複雑なネットワークの上で成り立っている.

例えば,

- 人や企業間の関係 : ロコミ効果, 連鎖倒産
- 自律分散システム : インターネット, 移動体通信
- バイオ技術 : 分子モータ, 遺伝子治療薬

全く異なる対象や構成要素であるが...

⇒ 新発見はまさに世紀末に起こった!!

Best Business Books '02

複雑な世界、

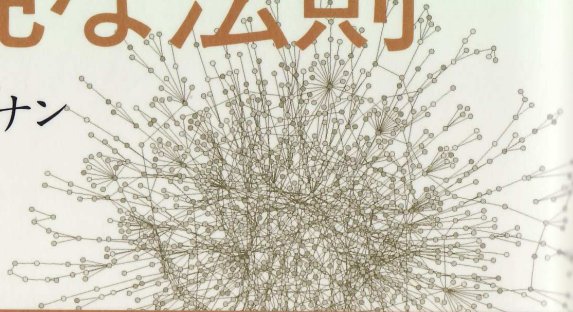
NEXUS: Small Worlds and the Groundbreaking Science of Networks

ネットワーク科学の最前線

単純な法則

マーク・ブキャナン

阪本芳久=訳



エイズの蔓延から貧富の格差まで、この発見が数々の難問を解き明かす!

脳細胞、インターネット、
食物連鎖、人間社会……。
どれも同じ法則に従って、
つながっていた!

草思社



LINKED: The New Science of Networks
新ネットワーク思考
世界のしくみを読み解く

アルバート=ラズロ=バラバシ[著]

Albert-László Barabási

青木 薫[訳]

Translated by Kaoru Aoki

すべてはリンクしている。

インターネットの弱点、 エイズの急速な広がり、

すべてを説明するルールがあった

マイクロソフトのひとり勝ち、 アルカイダの組織など、

ついに複雑系の姿をとらえた話題の書!

Media Reports

SMALL WORLD 12月29日(木) 24:55~26:25



「世間は狭い」。

2005年現在、60億以上の人間がひしめく地球。うことができるのはこのうち何人でしょうか。すべての人と繋がる方法があったら・・・? 知り合いがいるとして、Aが他の人間Bと知り合いだと考え、Bの知り合いCがAと知り合っていないと、世界中の人々の関係はほとんど6次の新ことが分かってきました。

この法則を前提に、「一般人が有名タレント」というルートで、どのようにつながることが検証するのがこの番組です。

人間関係という基本的なものをベースに展開したエンターテインメントです。番組を見た人は、意外にもう一度自分の知り合いを見つめなおす気分が

出演：無作為に選ばれたタレント

ゲスト：優香・石原良純

内容：日本全国から無作為に選ばれた一般人AとBが、「知り合いの知り合い」のタレント（優香・石原良純）に6次以内で到達しようとする「知り合いバトル」を展開し、対決を行う有名人の選択を間違えると、たどり着けない可能性が高くなります。また情報をうまく出せるかはプレイヤーの手腕にかかってきます。

タレントの優香さんは、全く見ず知らずの人が、知り合いをたどって自分へとつながってくる過見守ります。スタジオで待つ優香に、一般人がたどり着くことはできるのでしょうか？

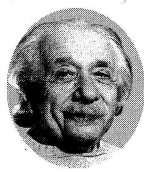
このWEBサイトに掲載されている文章・映像・音声・写真等の著作権はテレビ東京およびその他の権利者に帰属しています。権利者の許諾なく、私的使用の範囲を超えて複製したり、頒布・上映・公衆送信（送信可能化を含む）等を行うことは法律で固く禁じられています。

Copyright (C) 1996-2005 TV TOKYO All rights reserved.

この意見は科学部へ。
 3677-8000
 ル (t-kagakubu@nifty.com)
 0120-000045

2005
 11/20(土)
 読書新聞

14500通 筆まめ天才科学者



相対性理論で知られるアインシュタインの写真、A P IIは生涯で1万4500通以上の手紙を出し、重要な来信にはすぐに返事を書く相応な筆まめだったことがわかった。手紙の優先度を判断する仕方は、大量の電子メールを処理する現代と事情がよく似ており、パラバシ教授らによくと、重要な手紙を書くまでの日数を分析し

た。生涯に約7600通以上の手紙を出した進化論のC・ダーウィンについても同様の分析を試みた。2人とも大半の手紙には10日以内に返答したが、それをこえる返事を出さない手紙が増えていった。これは、たさんの電子メールを受け取る現代と事情がよく似ており、パラバシ教授らによくと、重要な手紙とそうでない手紙とを、要領よく判別していたことを示しているという。

北陸先端科学技術大学院大学の林幸雄・助教授（ネットワーク科学）の話「今も昔も、情報のやりとりは共通の法則が見られる点が興味深い。来た順番どおりでなく、優先度の判断で返事を出すので同じパターンが出現するのだろう」

優先度で返信

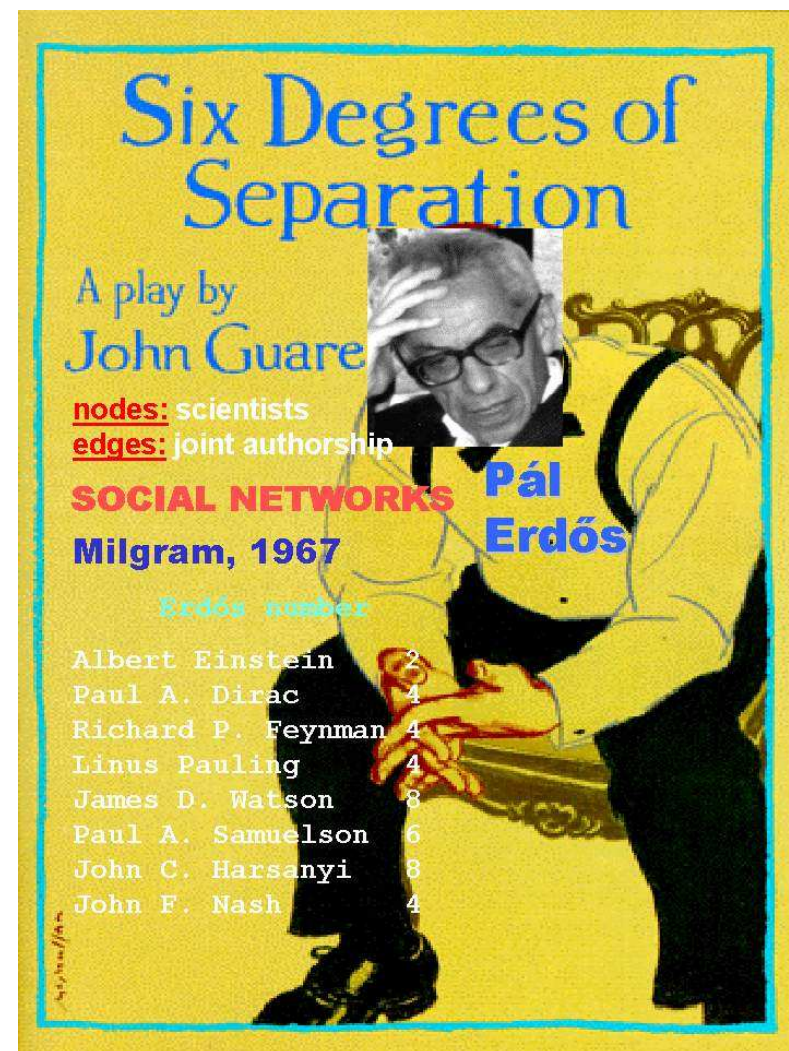
2. It's a Small World

小さな世界

- 6人の知人, S.Milgram, Psychology Today 1, 1967.
- WWWは19クリック
 $d = 0.35 + 2 \log_{10} N$,
R.Albert et al., Nature 401, 1999.

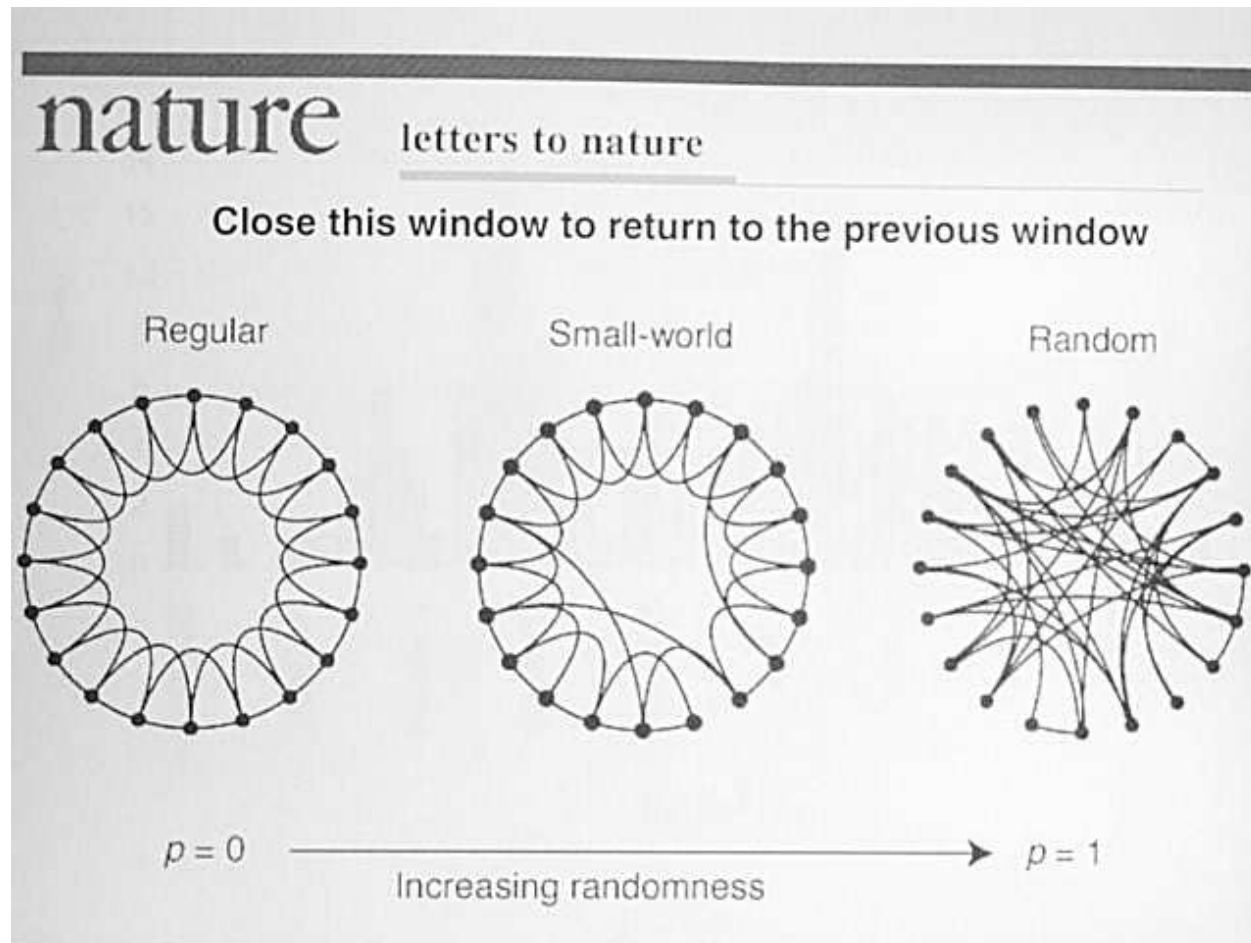
社会関係, 人工物, 自然界など, 全く異なる対象や要素のネットワークに共通の性質がある!

むしろ例外: 階層的組織, 基盤目の都市, 物質の結晶格子等



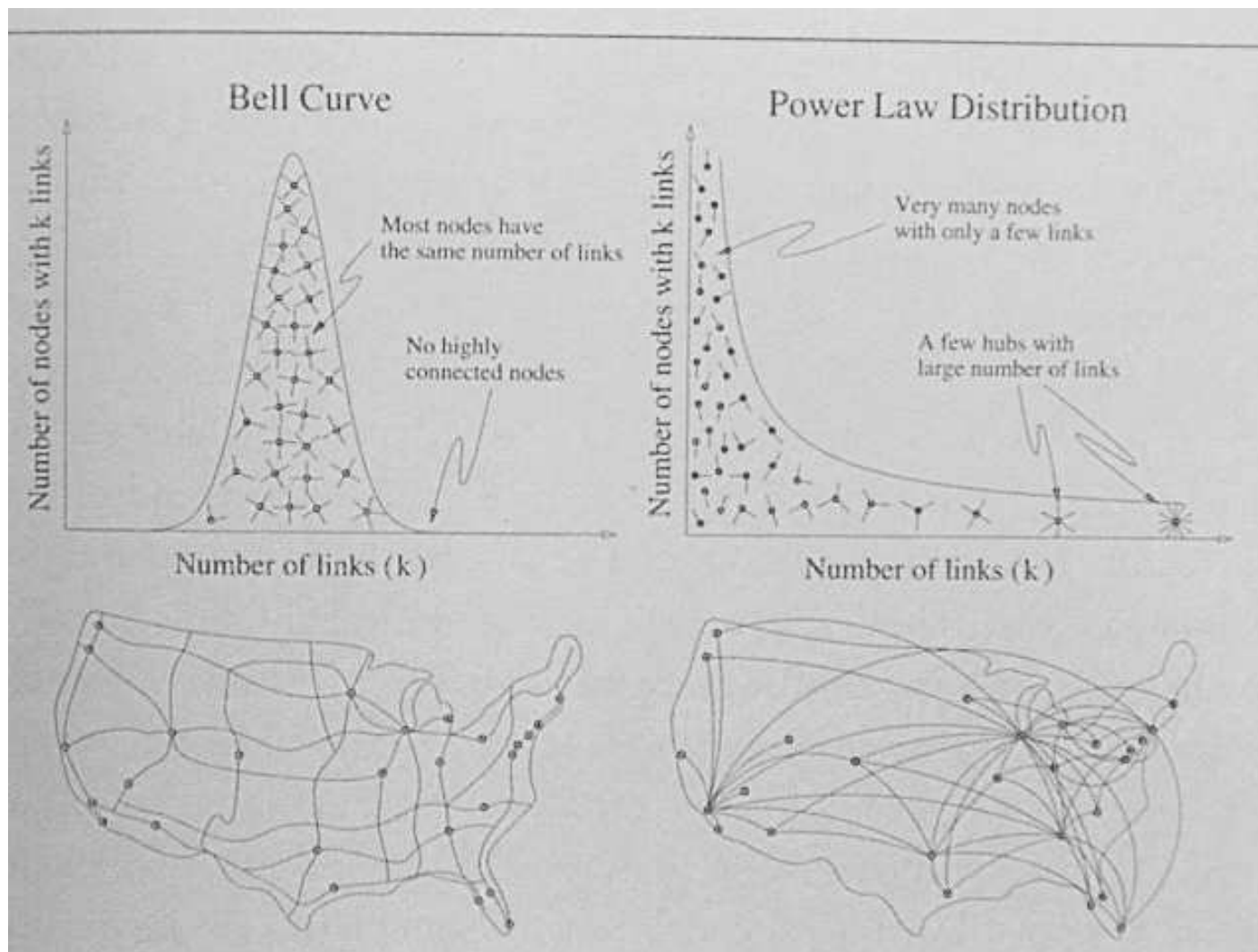
Small World Model

現実には規則的でも一様ランダムでもない



D.J. Watts and S.H. Strogatz, Nature, 393, 1998

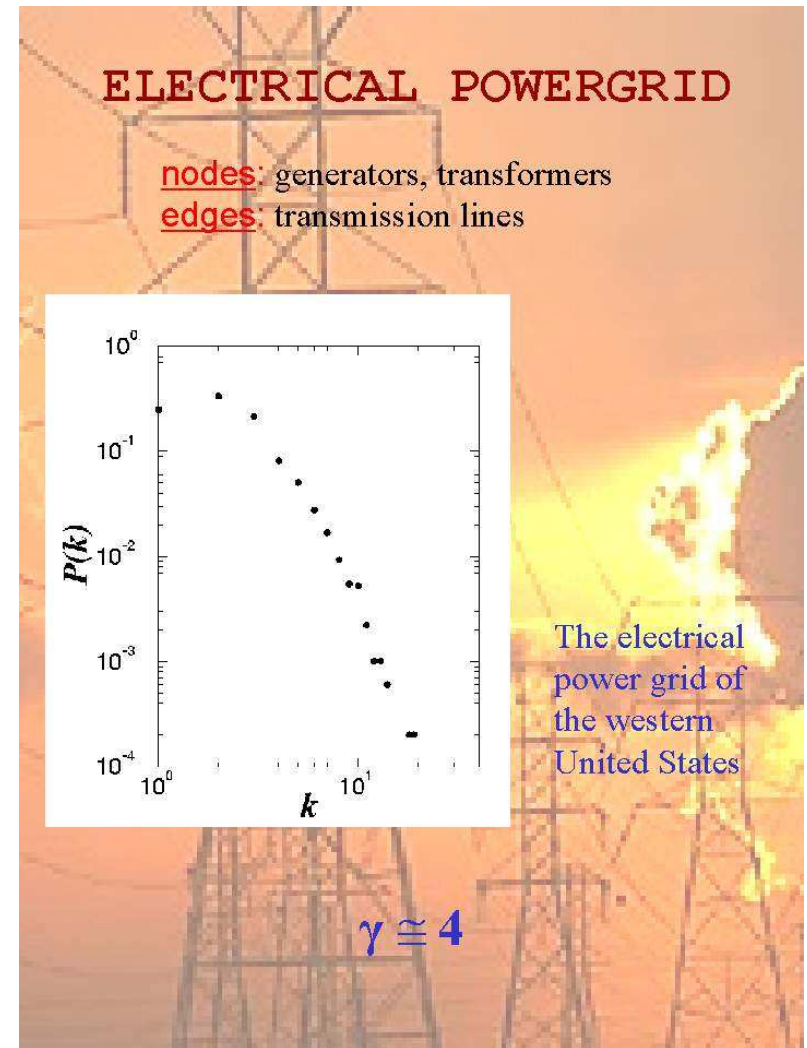
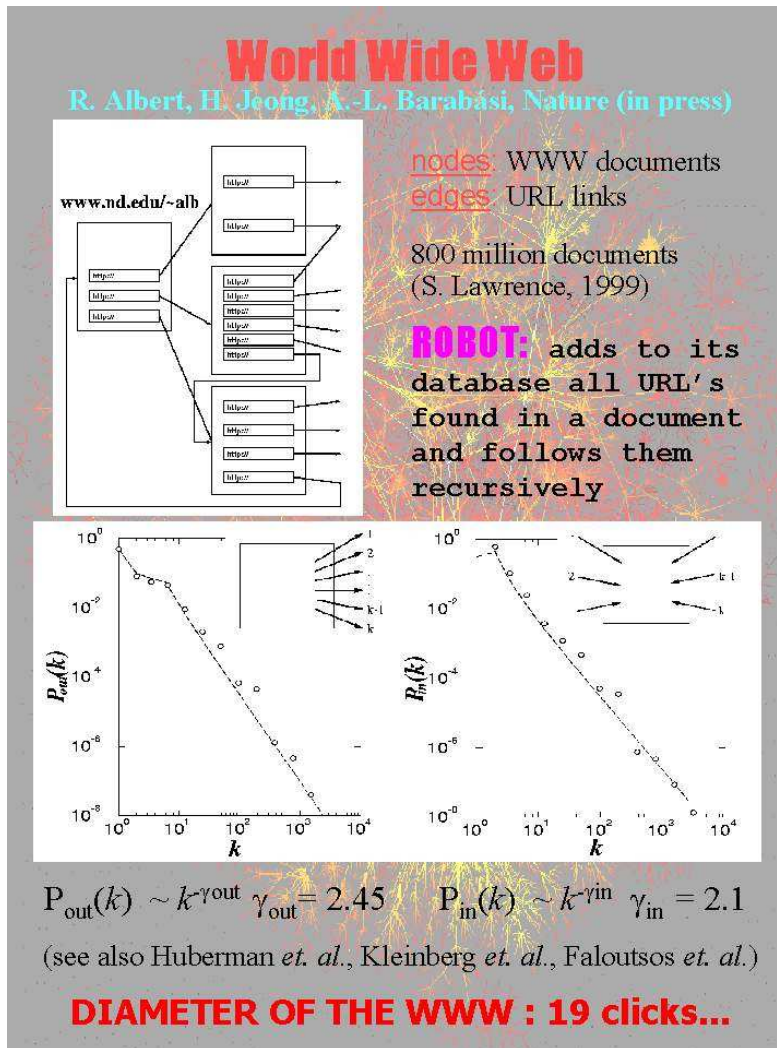
Scale-Free: $P(k) \sim k^{-\gamma}$



In A.L. Barabási, LINKED, Perseus Pub., 2002

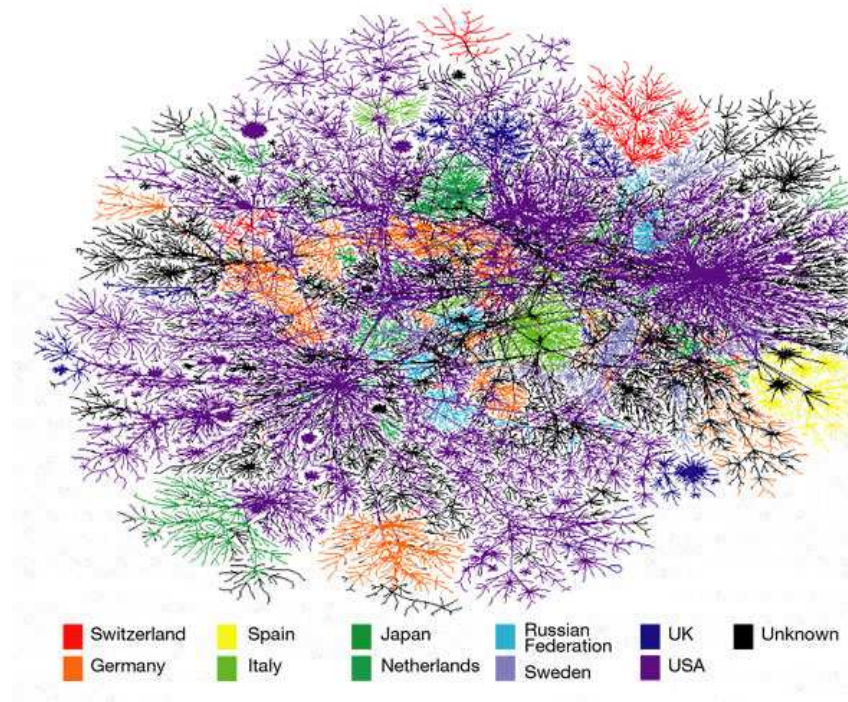
⇒ ランダムグラフ理論では説明不可

Technological Nets (Infra.)

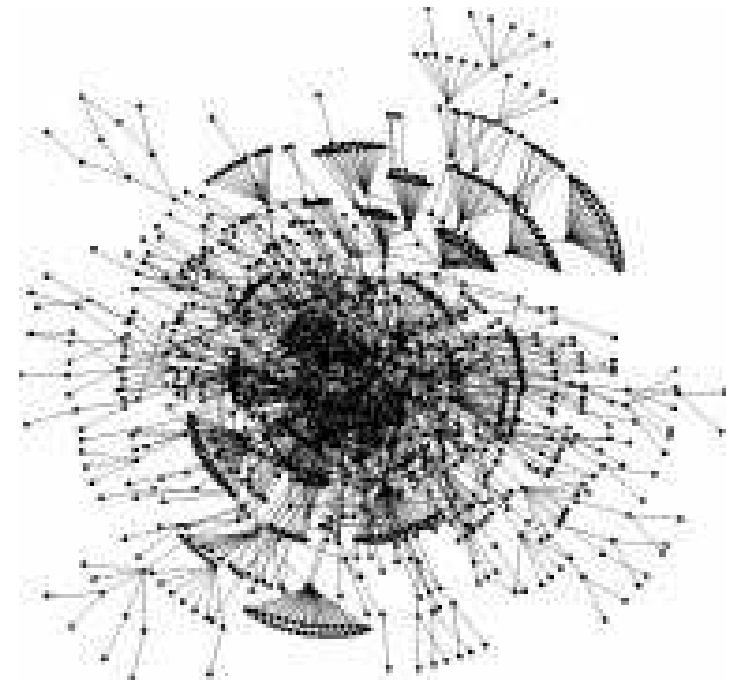


<http://www.nd.edu/~networks/ppt/SanDiego.ppt/>

Heterogeneous Structure

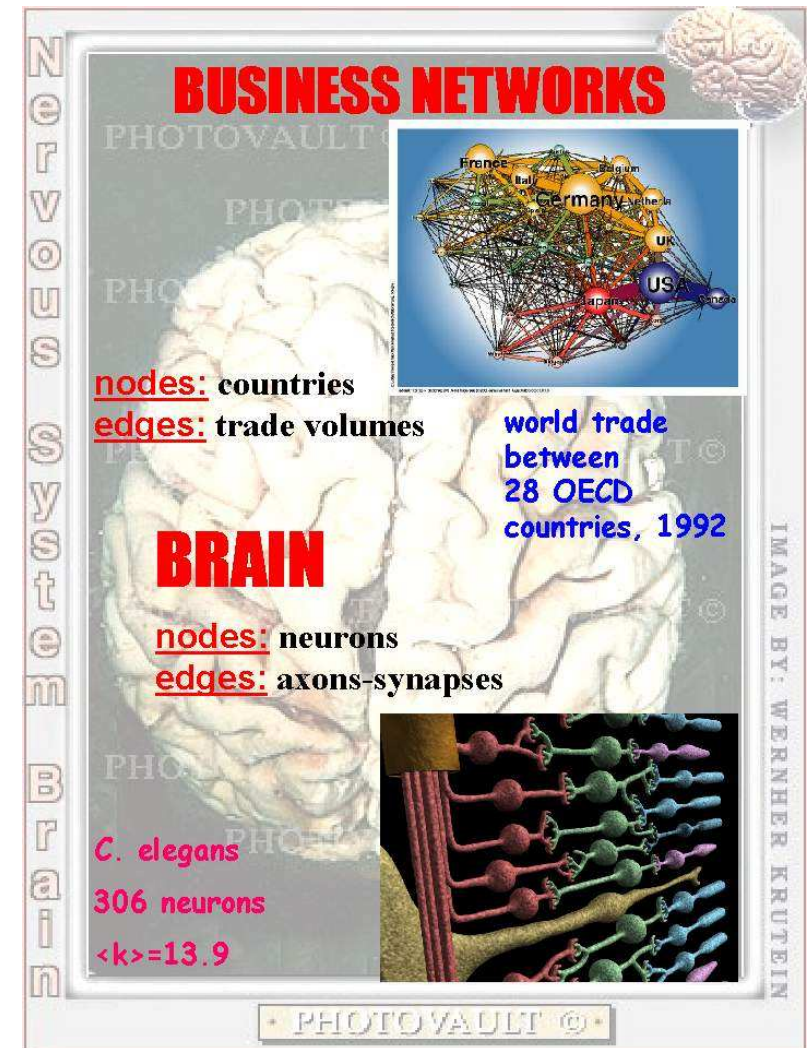
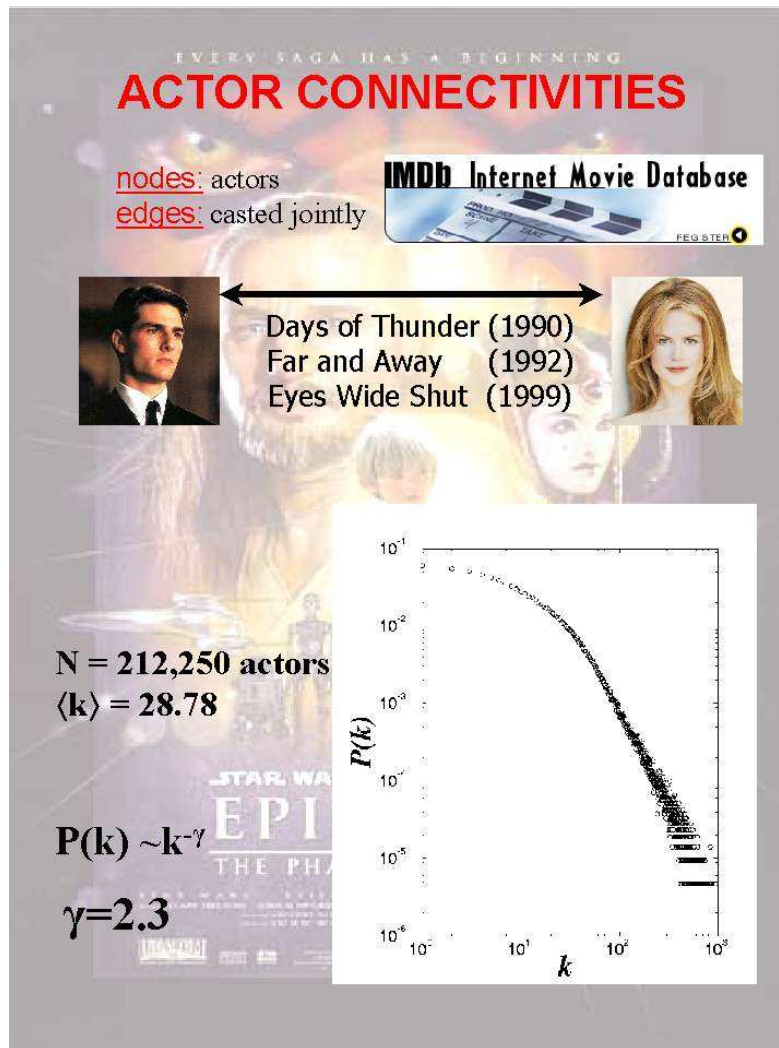


Internet connectivity with
selected backbone ISPs
Nature 406 (CAIDA)
2000



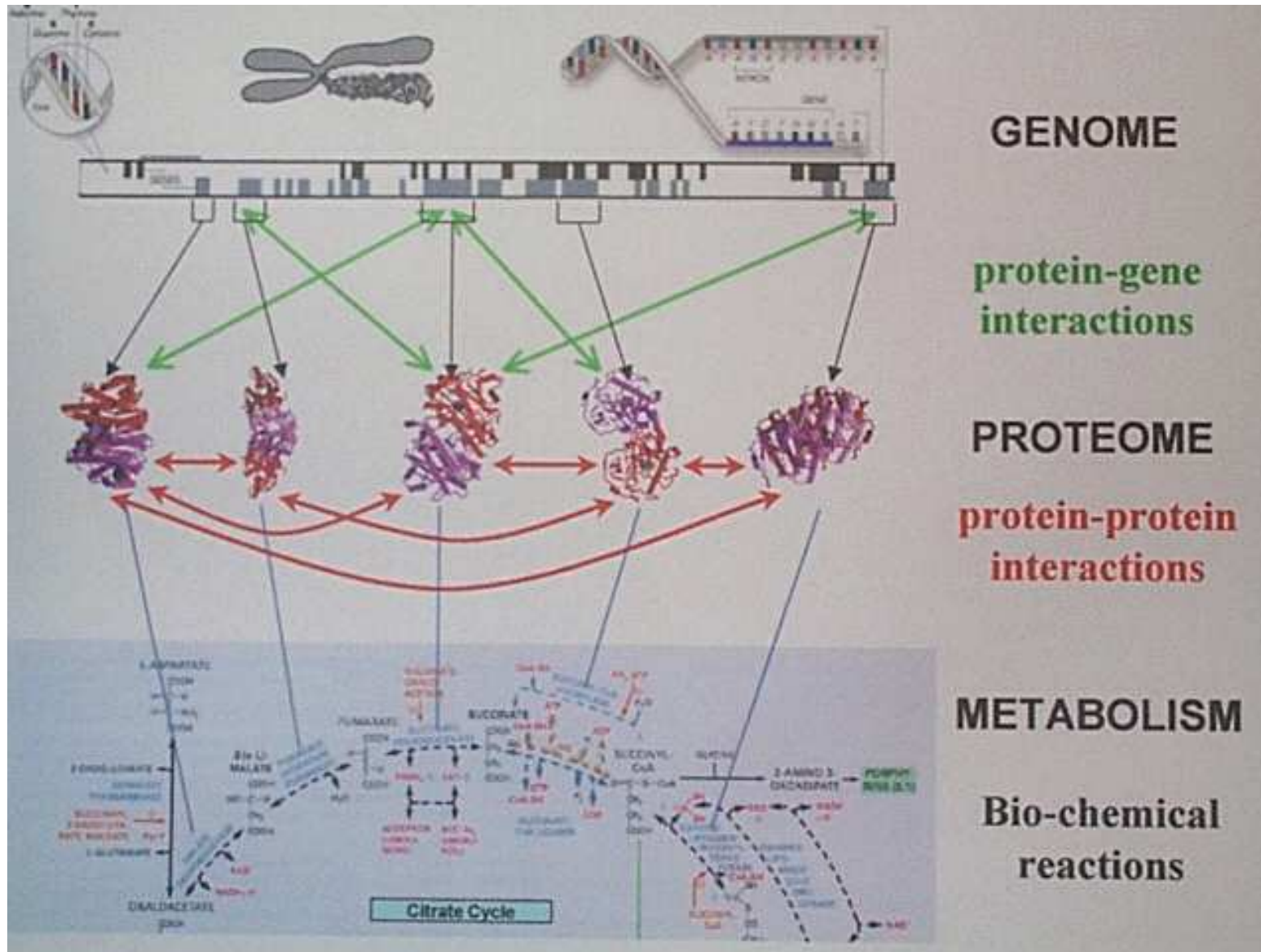
Java Class Components
(JDK1.2)
Europhysics Letters 2002

Social Nets

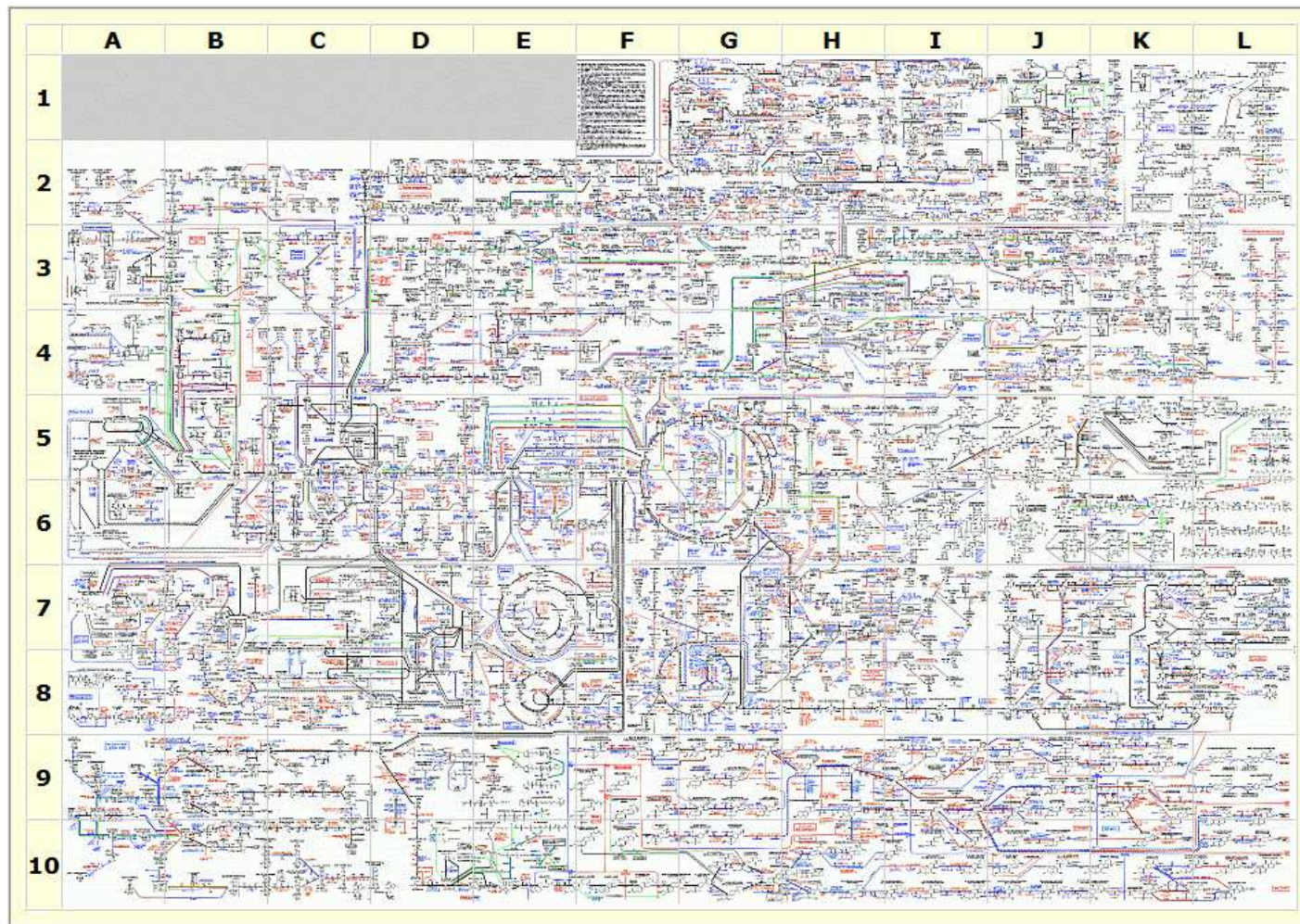


<http://www.nd.edu/~networks/ppt/SanDiego.ppt/>

Bio-Chemical Nets



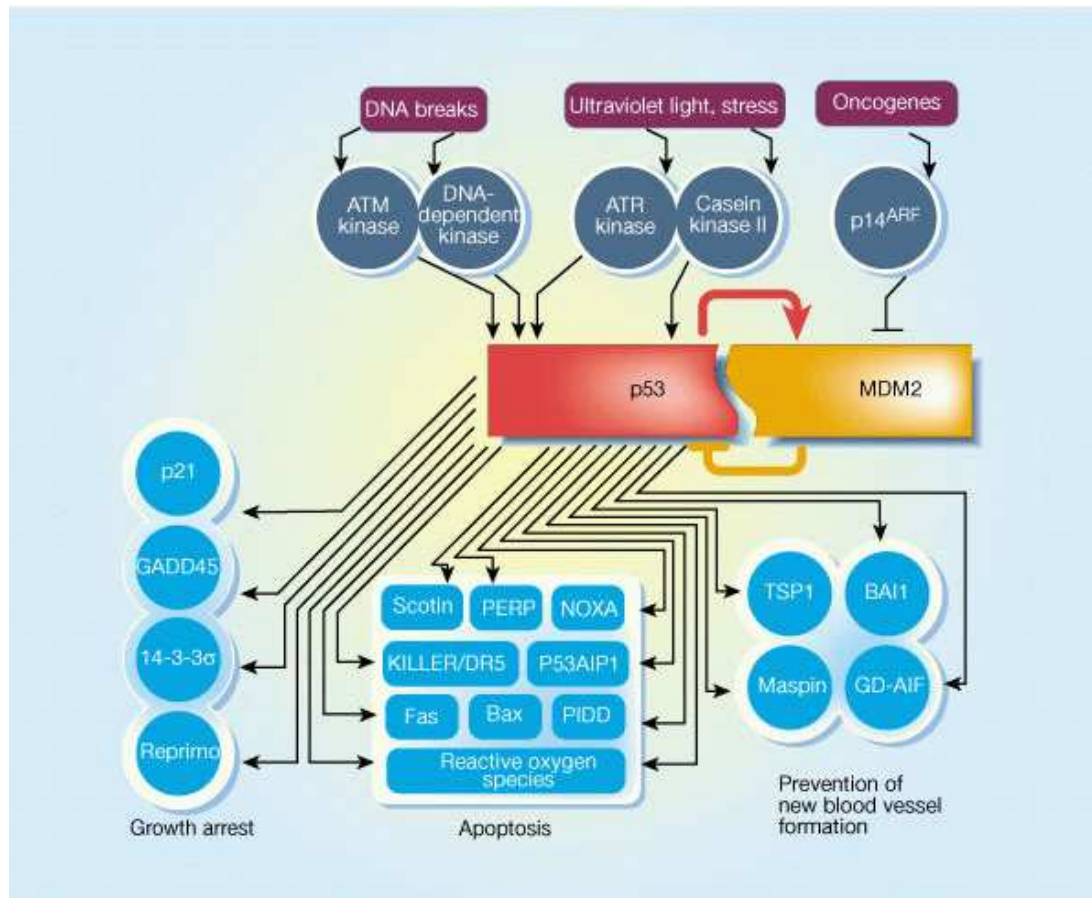
Metabolic Pathways



ATP(アデノシン三リン酸)がエネルギー代謝反応系のハブ

Surfing the p53 Network

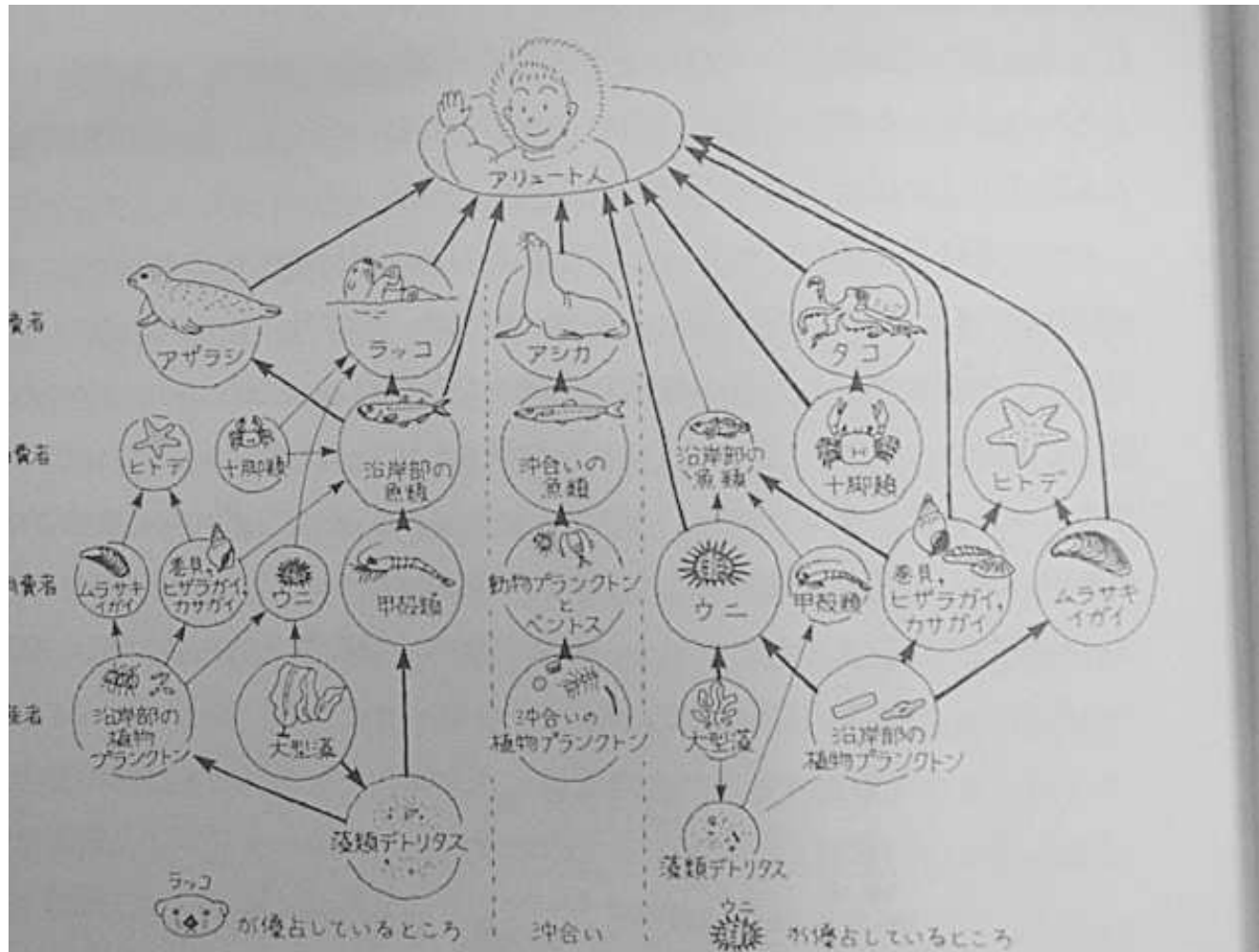
癌発病に深く関与する p53 ハブ遺伝子 ⇒ 新薬の開発



K.W. Kohn, Mol.Bio.Cell 10, 1999 & B. Vogelstein et al., Nature

408, 2000

Food Web



松本著, 生態と環境 (C.A. Simenstand et al., Science 200, 1978.)

3. Universal Mechanisms

現実の複雑なネットワークに共通する SF 構造

インフラ技術: 航空路線, インターネット, WWW, 電力網, 電子回路網

社会関係: 企業間取引, 知人, 映画の共演, 論文引用, 性的接触, 電子メール送受信数, 言語

生物系: 神経回路網, 遺伝子や代謝反応, 食物連鎖

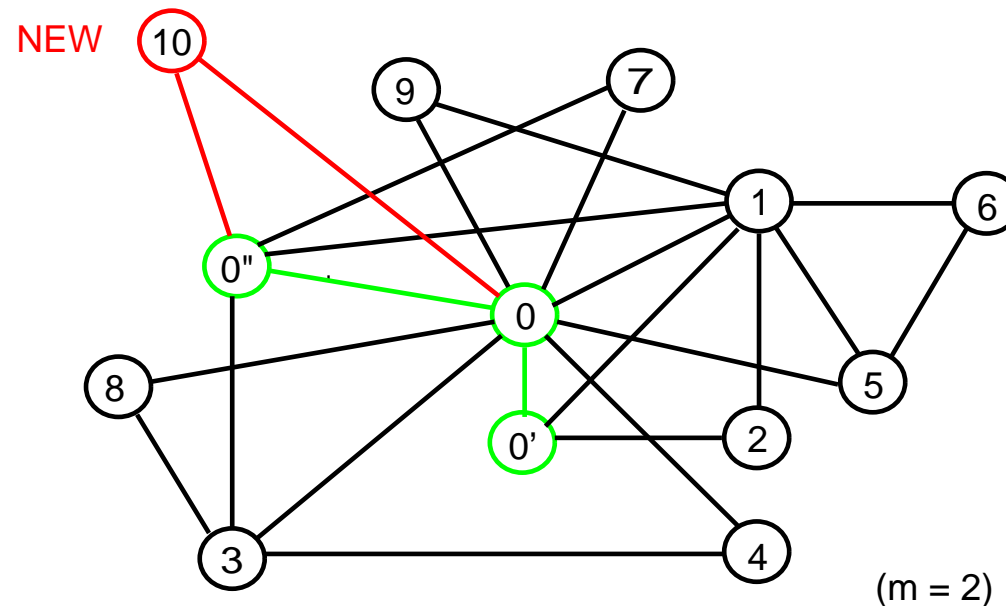
べき乗則 $P(k) \sim k^{-\gamma}$, $2 < \gamma < 3$ が普遍的に存在

→ 短い経路長, 友達の友達, **ハブ攻撃への脆弱性** 等

Rich-get-richer Rule

BA モデル: A.-L. Barabási and R. Albert, Physica A 272, 1999.

- N_0 個のノードが $m_0 < N_0$ 本でリンクされた初期構成から,
- 毎時刻 t に, 新ノードを追加し, 新ノードから既存ノード i に確率 $\Pi_i(t) \sim k_i(t)$ で m 本リンク.



Master Equation

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \times \frac{k_i}{\sum_j k_j} = \frac{k_i}{2t}$$

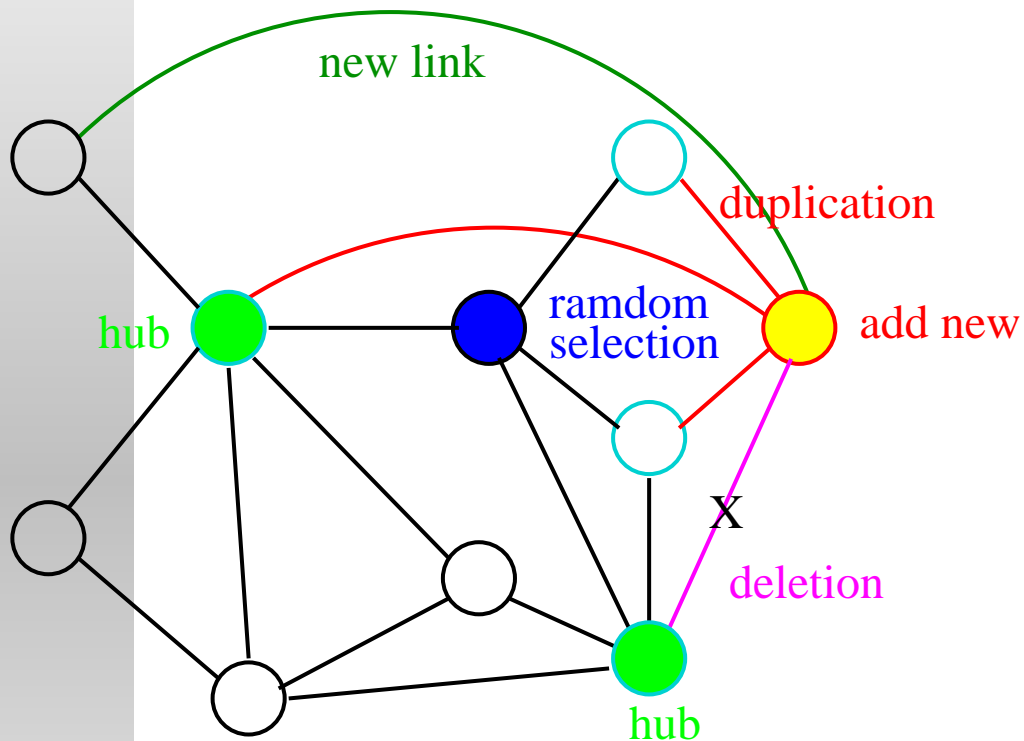
初期条件 $k_i(t_i) = m$ の解は, $k_i(t) = m \times \sqrt{t/t_i}$ となる.

$$P(k_i(t) < k) = P(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}) = 1 - \frac{N_0 + m^2 t / k^2}{m_0 + t}$$

$$P(k) = \frac{\partial P(k_i(t) < k)}{\partial k} = \frac{2m^2 t}{m_0 + t} \frac{1}{k^3} \sim k^{-3}.$$

⇒ age-effect (S.N. Dorogovtsev et al. PRL 85, 2000), rewire(R. Albert, PRL 85, 2000), fitness(G. Bianconi, PRL 86, 2001)

Duplication Model



ランダムに選ばれた頂点に隣接するハブにはリンク複写のチャンス大!

⇒ 生物は、選択不要のより単純な機構で, Pref. Attach. を実現!

R.V. Solé et al., Advances in Complex Systems 5, 2002

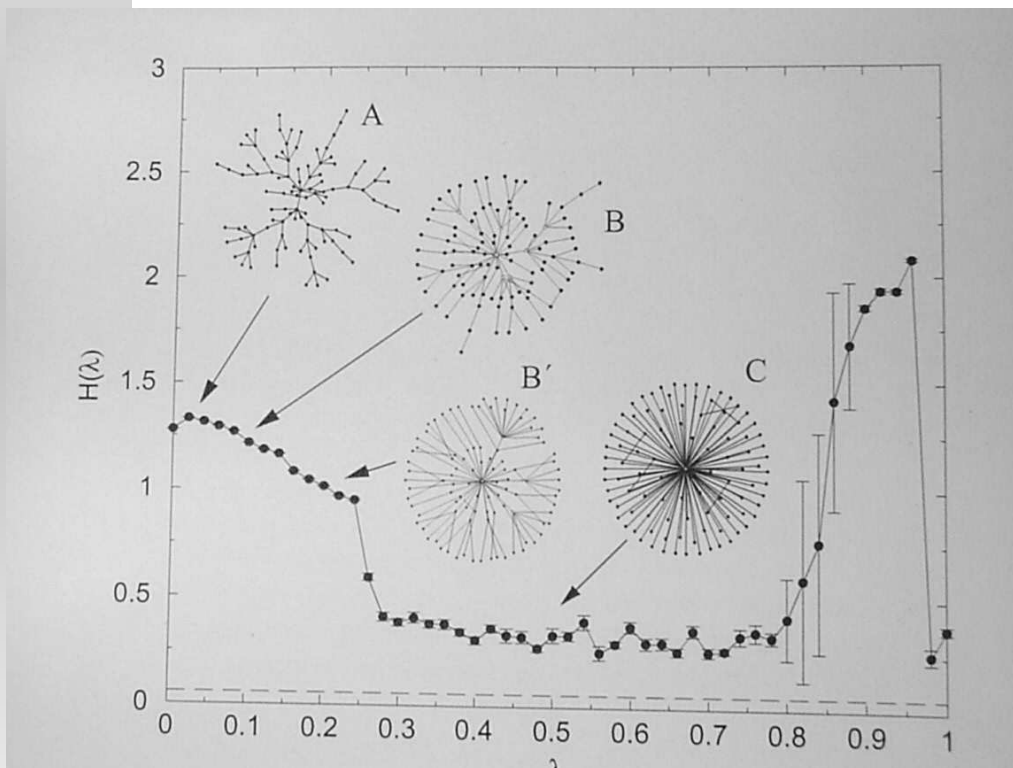
Optimal Topology

経済性：リンク数

$\leftarrow 0 < \lambda < 1 \rightarrow$

通信効率：距離

Random (tree) - Pref. (SF) - Forced (star, clique)



$$\min E(\lambda) = \lambda d + (1 - \lambda)\rho,$$

$$\text{距離 } d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i < j} D_{ij}}{n C_2} / D_{max},$$

$$\text{リンク数 } \rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i < j} a_{ij}}{n C_2},$$

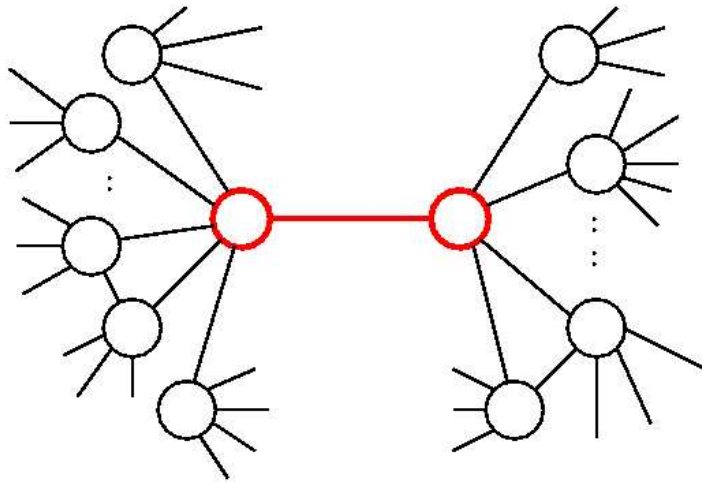
次数 k の頂点頻度 p_k の
エントロピーで評価

$$H \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{k=1}^{n-1} p_k \log p_k$$

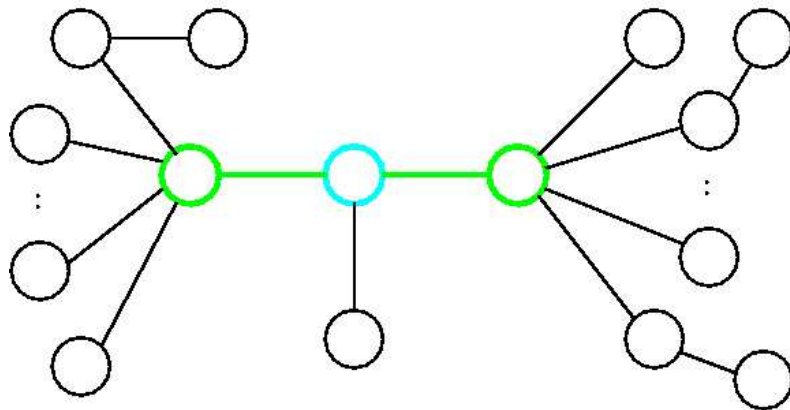
R.F. i Cancho and R.V. Solé, SantaFe Inst. Working Paper 01-11-

068, 2001

Connectivity Correlations



Assortative 結合 ハブ
同士など, 同程度の
次数ノードが結合
しがちな傾向
社会システム



Disassortative 結合 ハ
ブと低次数ノード
など, 次数が異なる
ノードが結合しが
ちな傾向
技術・生物システム

結合傾向に依存した伝搬特性, 長短所は?

M.E.J. Newman, PRL 89, 2002 & PRE 67, 2003

4. Robust, Yet Vulnerable

SF 構造の性質

頑健性： ランダムな
ノード故障には強く
連結性を保持

脆弱性： ハブの集中
攻撃で極度に分断

⇒ 逆に、極度な分断性は、
ウィルス拡散の防止
には好都合!

Z. Dezsö and A.L. Barabási,
PRE 65, 055103, 2002, R. P.-
Satorras and A. Vespignani, PRE
65, 036104, 2002



Cite Percolation

占有率 q の $\forall P(k)$ における実効的な次数分布

$$\bar{P}(\bar{k}) = \sum_{k=\bar{k}}^{\infty} P(k)_k C_{\bar{k}} q^{\bar{k}} (1-q)^{k-\bar{k}}.$$

巨大連結成分が出来る条件式 $\frac{\langle \bar{k}^2 \rangle}{\langle \bar{k} \rangle} = 2$ より, 臨界値:

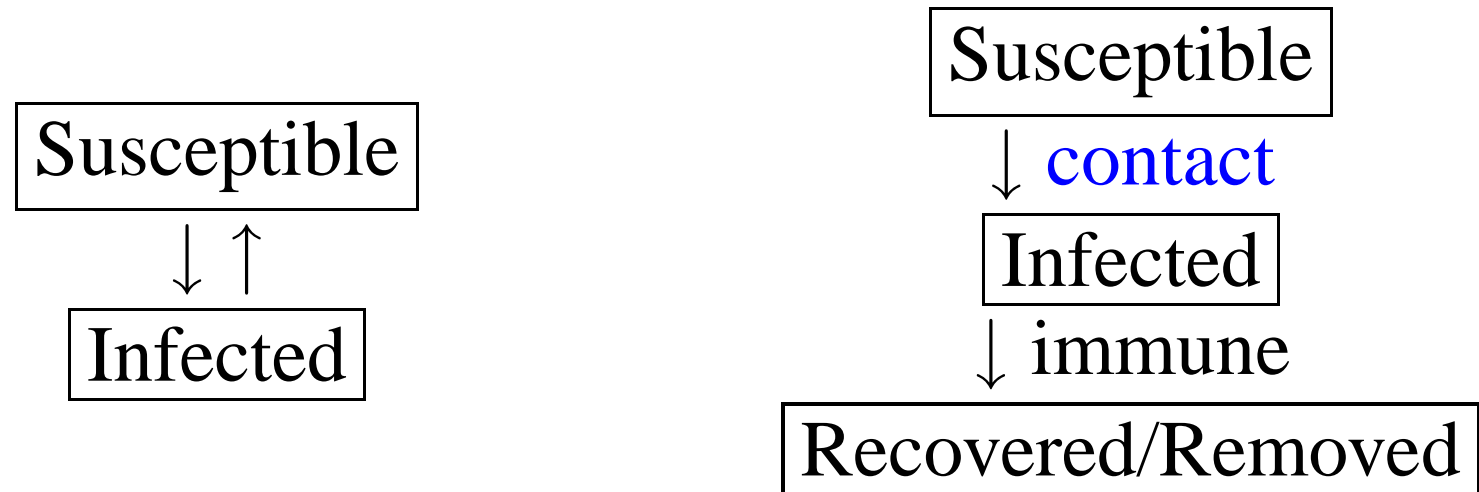
$$q_c = \frac{1}{\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle - 1}.$$

現実の SF ネットでは, べき指数は $2 < \gamma < 3$ なので, $\langle k^2 \rangle = \sum k^2 P(k) \sim \sum k^{2-\gamma} \rightarrow \infty, q_c \rightarrow 0$: 強結合耐性 (不可避なウィルス拡散)

R.Cohen et al., PRL 85, 4626-4628, 2000.

Conventional SIS, SIR

感染流行モデルにおける各ノードの状態遷移



風土病：一定人口 (出生死亡率) や一様な活動の
仮定

⇒ 現代では、長距離の移動手段、局所的に集中する人々、人ごとに偏った接触機会

Absence of the Threshold

SF ネット上の SIS モデルにおける次数 k を持つ
ノードの感染密度

$$\dot{\rho}_k(t) = -\rho_k(t) + \lambda k(1 - \rho_k(t))\Theta(t), \quad s_k(t) + \rho_k(t) = 1.$$

平均場近似 $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \frac{kP(k)\rho_k}{\langle k \rangle}$ に, $\dot{\rho}_k = 0$ の平衡解

$$\rho_k = \frac{\lambda k \Theta}{1 + \lambda k \Theta} \text{ を代入して } \Theta = f(\Theta) \text{ として表す.}$$

条件 $\exists \rho_k \neq 0$ は, $\left. \frac{df(\Theta)}{d\Theta} \right|_{\Theta=0} \geq 1$ と等価.

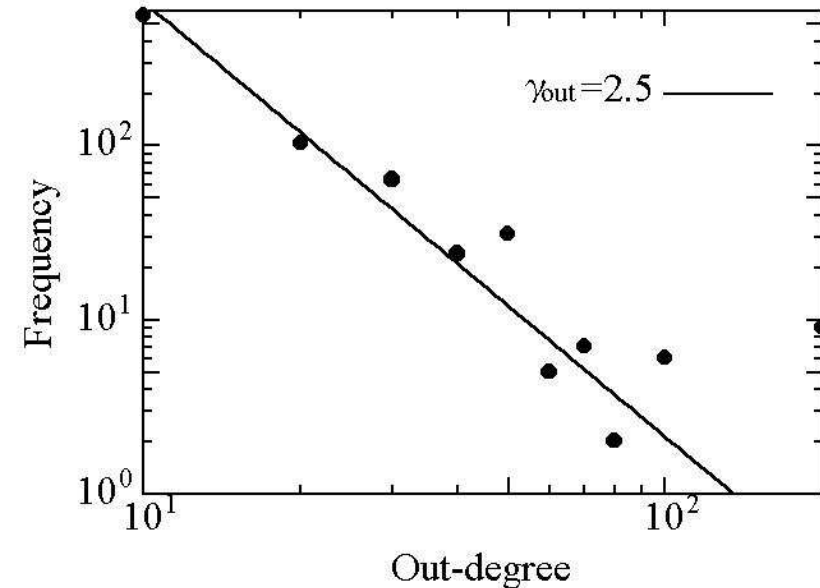
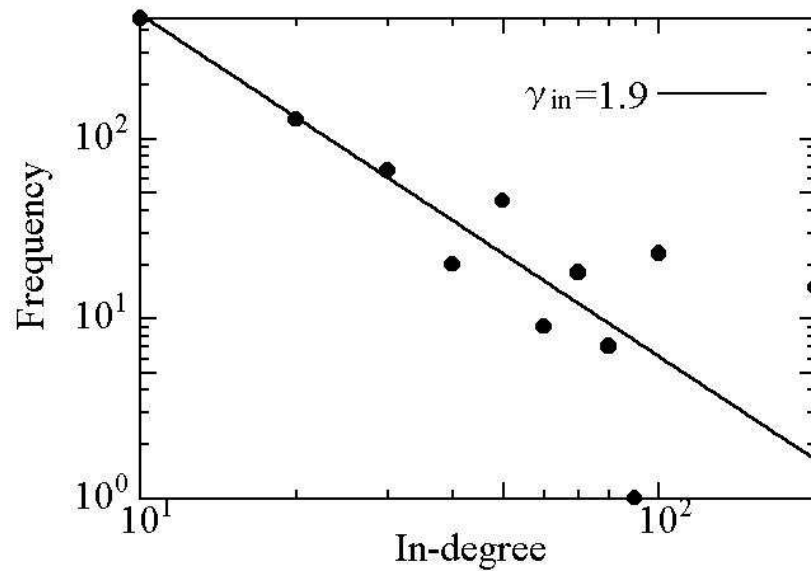
ゆえに, 感染流行のしきい値 λ_c は,

$$\lambda_c \leq \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} \sim \frac{1}{\ln N} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

R. P.-Satorras and A. Vespignani, PRE 63, 066117, 2001

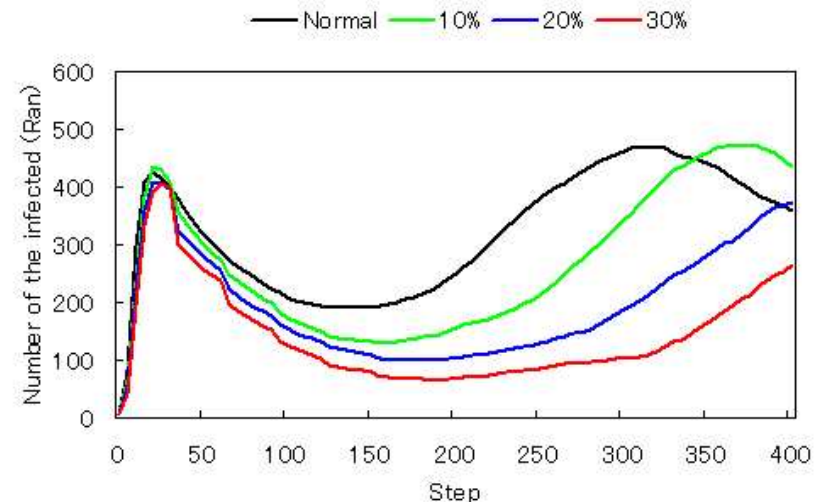
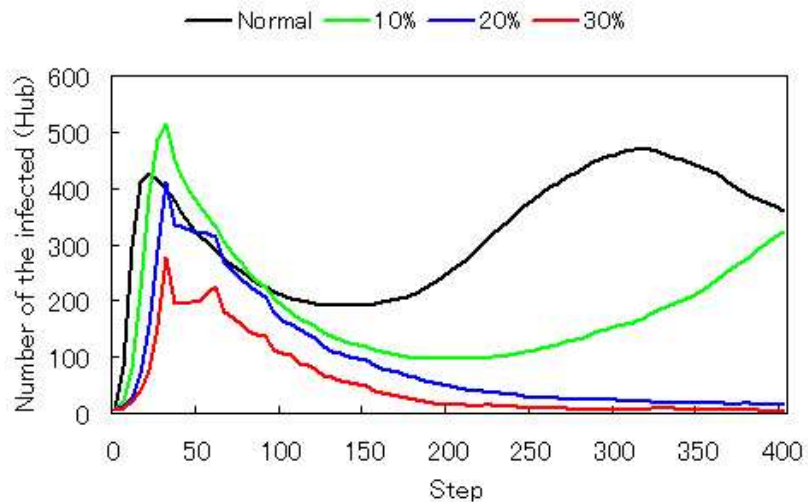
E-mail Data

現実の電子メールの送受信関係は SF ネットワーク
⇒ 従来の格子状あるいは一様ランダムな接触ではない!



World Internet Projects 日本調査より (H12 10-11, 2555 人)

Effect of the Hub Immunization



ハブ免疫化

ランダム免疫化

確率的 SHIR 推移モデルで, 30 ステップ (1ヶ月に相当) ごとに, 成長した規模の 10, 20, 30 % の頂点を免疫化した場合の, 感染数の平均値.

ハブ免疫率 30 % で絶滅!, ランダム免疫で再流行

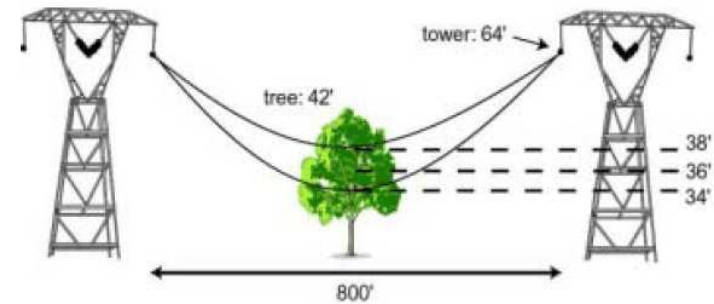
林, 箕浦, 松久保, 情報論 Vol.44, SIG(TOM9), 2003, & Physical Review

E 69, 016112, 2004.

Cascading Failure

許容量を越えた被害伝搬

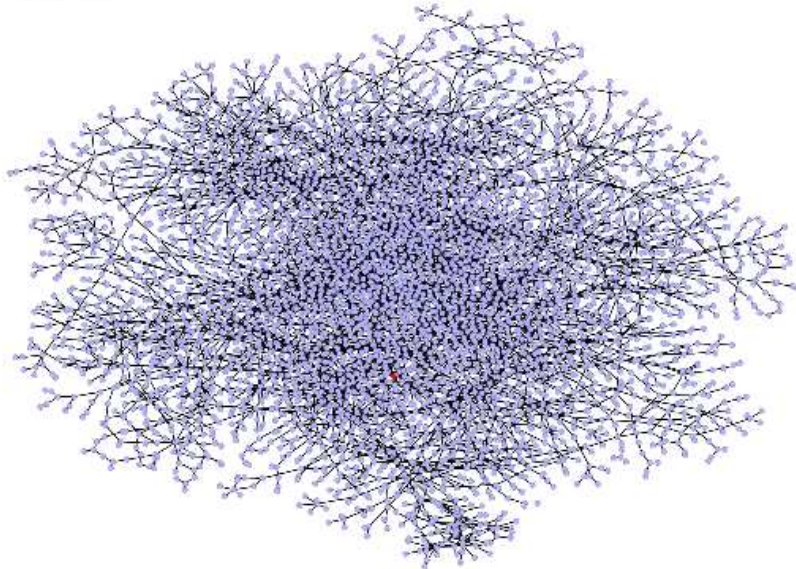
- 電力崩壊: 初期断線からの広域停電
- 道路やパケットの渋滞
- ⋮



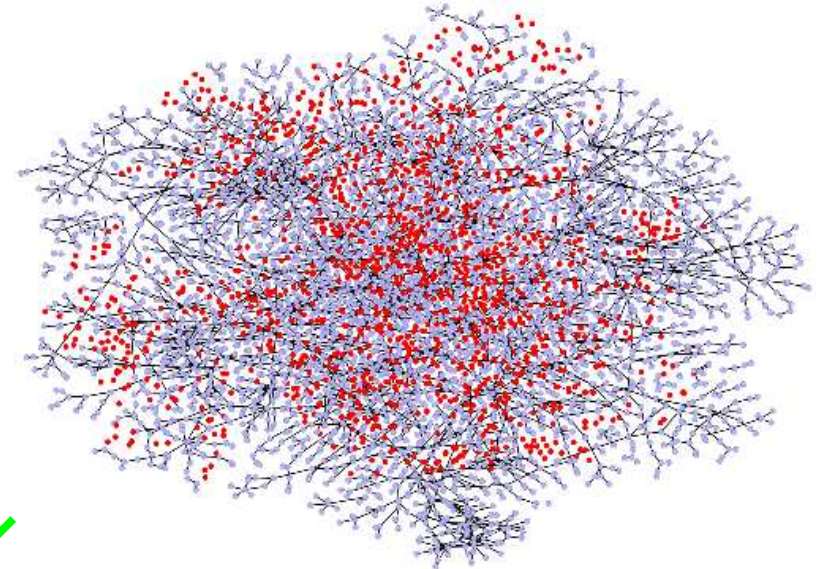
2003年8月14日北米北東部停電事故に関する調査報告書, 2004年3月北米北東部停電調査団 (NERC “August 14 2003 Blackout”), 及び, 北米東部大停電について, IEEJ 2003年8月.

Avalanche Dynamics

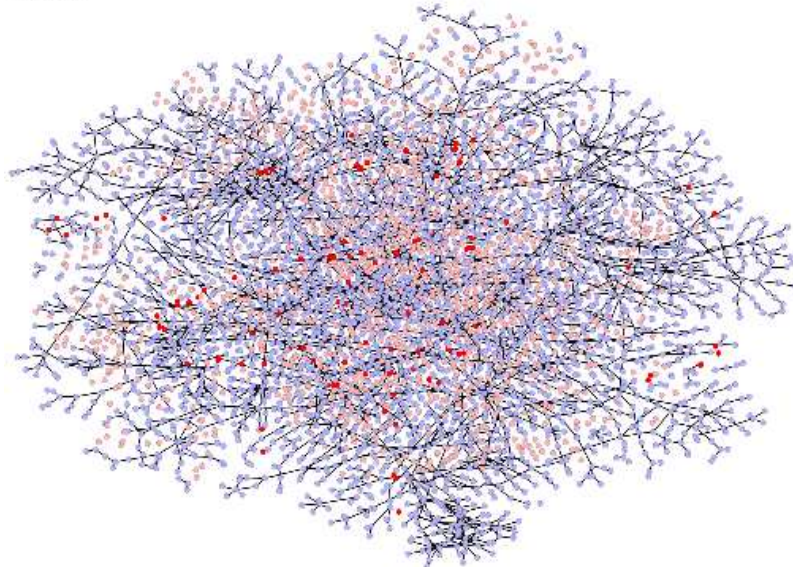
0.5次元 (100個)



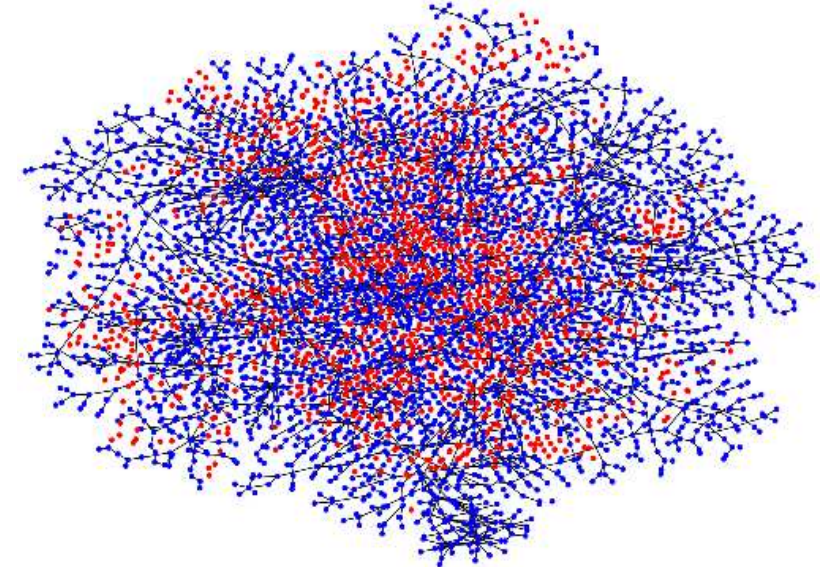
0.5次元 (100個)



0.5次元 (100個)



0.5次元 (100個)



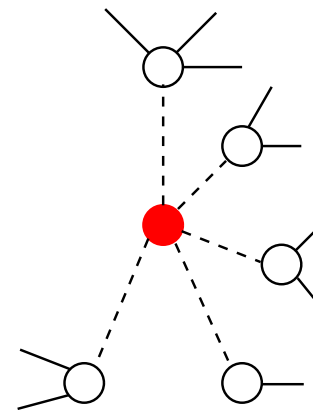
Defense Strategies

従来法: 中継量より発生量の方が多いノード順に割合 f だけ除去

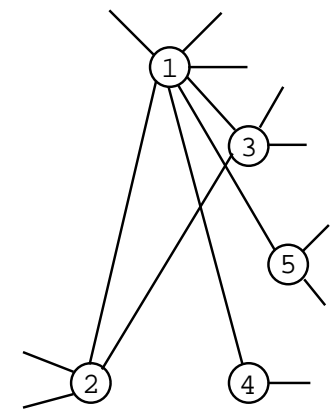
A.E. Motter, PRL 93, 2004

提案法: 初期故障源の周辺ノード間の, 次数 k_i や負荷量 $B_i(t)$ に従った局所的なリンク張替

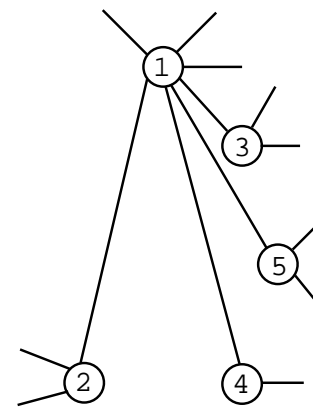
各時刻で任意のノード間で通信要求が発生, 最短経路を通り, 各ノード i の容量は $\alpha \times B_i(0)$



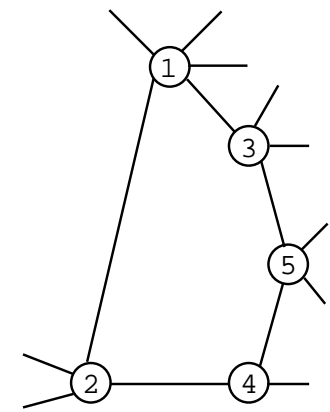
(a) initial



(b) ordering



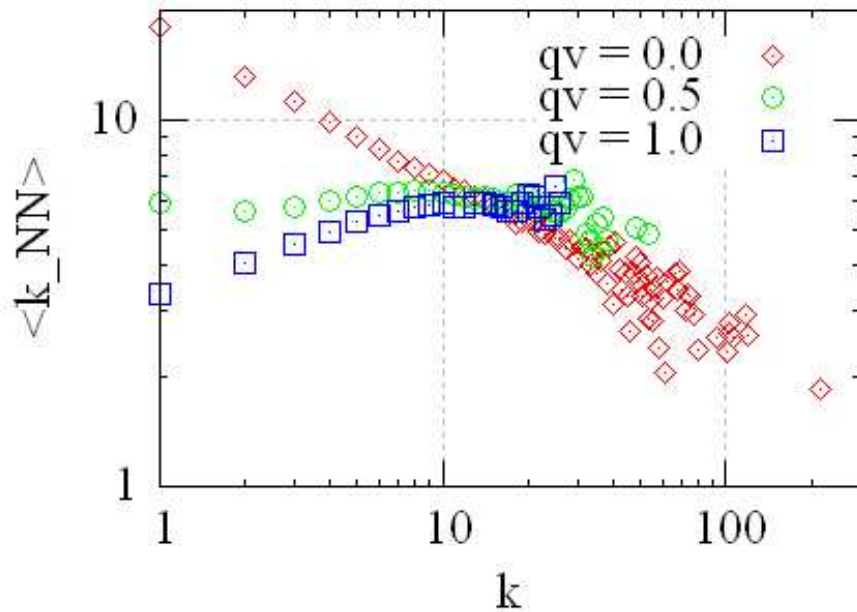
(c) star



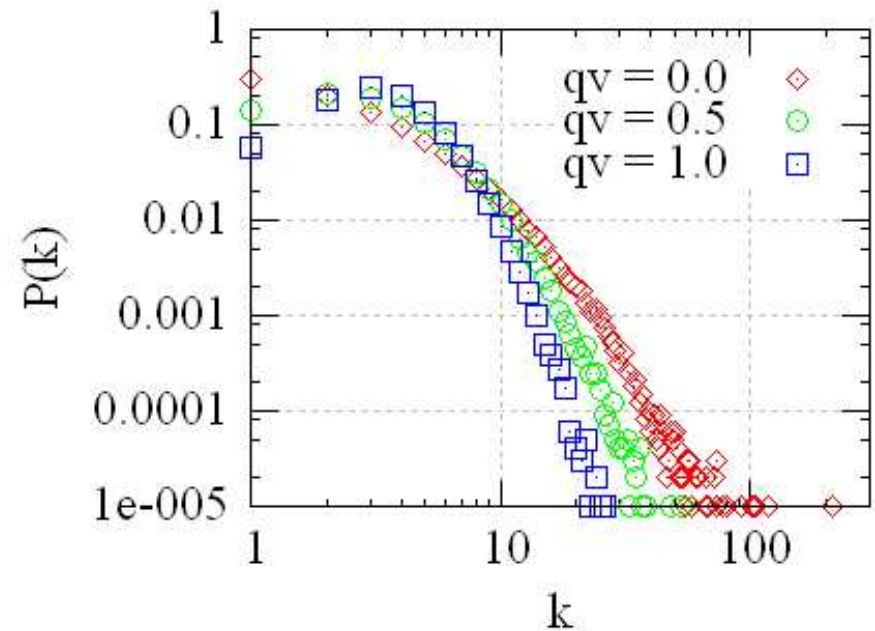
(d) ring

種々の張替方法

$\langle k_{NN} \rangle$ and $P(k)$ in CDD Model



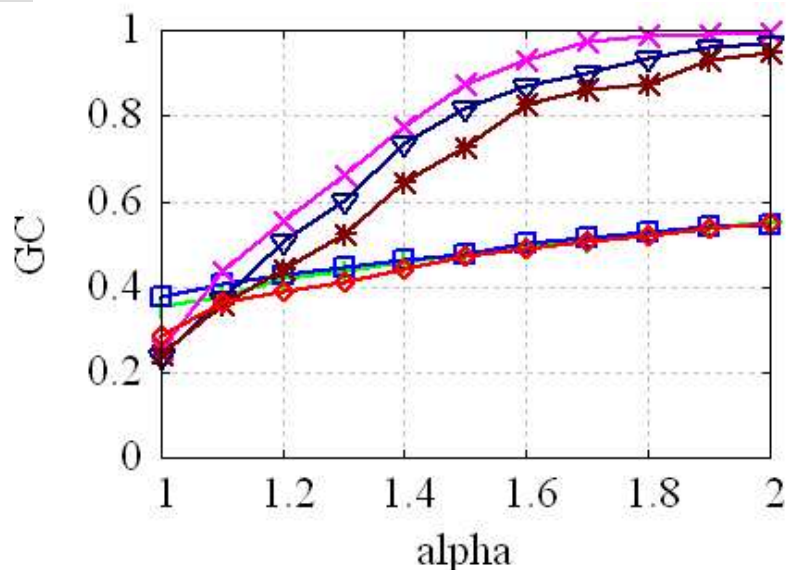
(a) Degree-degree correlation



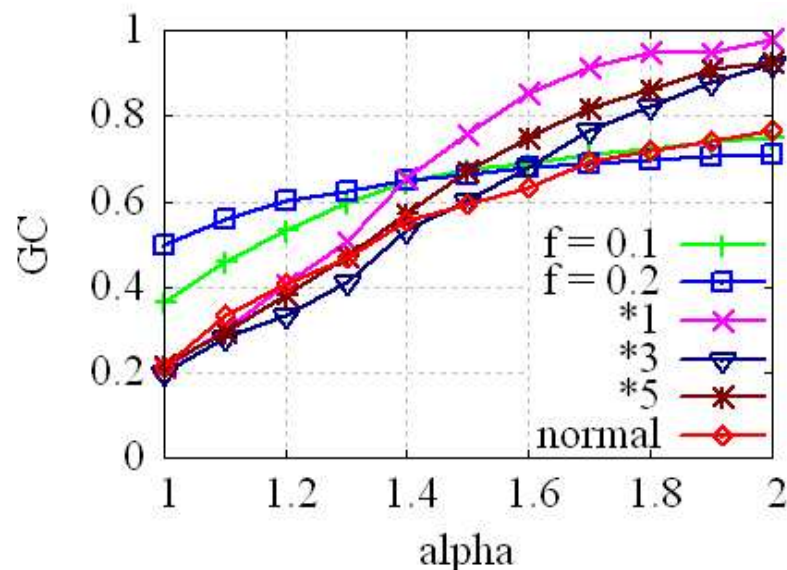
(b) Degree distribution

Simulation Results

CDD モデル ($\langle k \rangle \approx 4$) における GC のサイズ変化



正相関 (Ass)

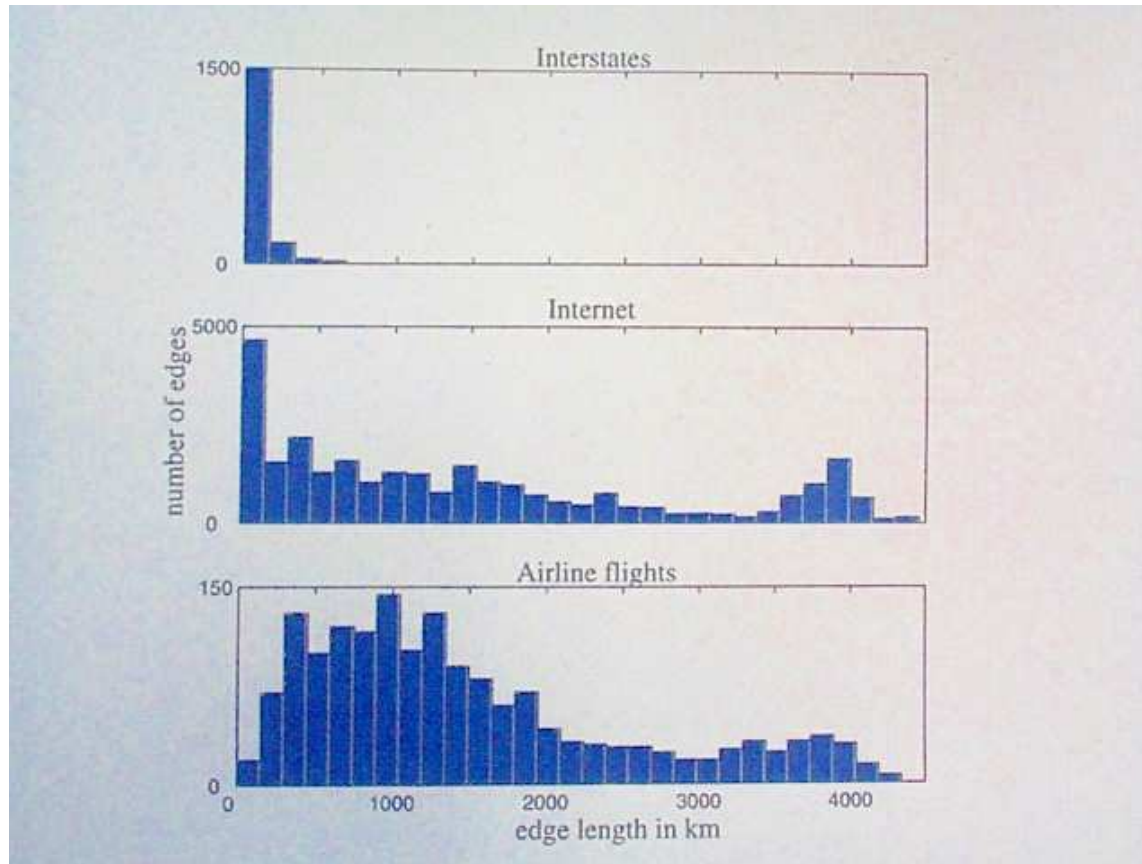


負相関 (Dis)

◇ : 無防御, + : 従来法 $f = 0.1$, □ : 従来法 $f = 0.2$,
 × : 完全結合, ▽ : 和の順, * : リング化

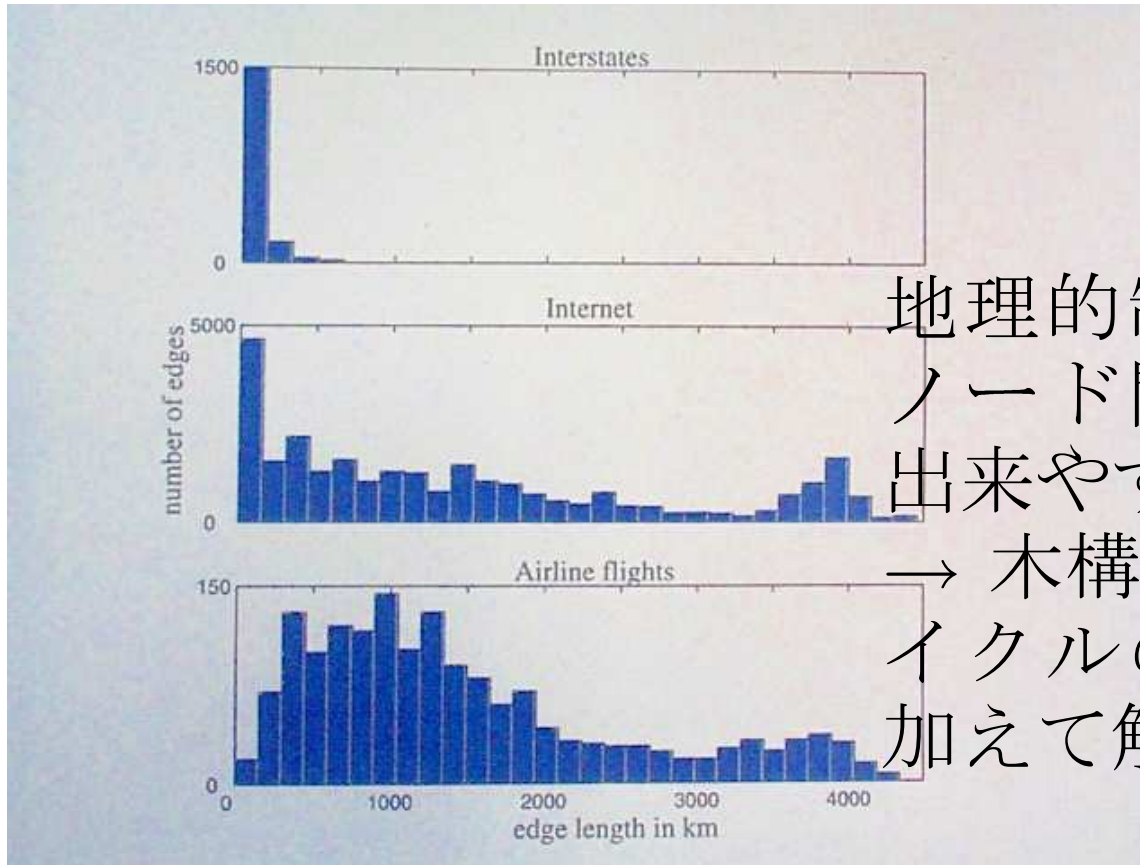
林, 宮崎, 情処論 Vol.47, No.3, 2006.

5. Geographical constraints



M.T.Gastner and M.E.J.Newman,
Euro.Phys. J. B 49(2), 2006.

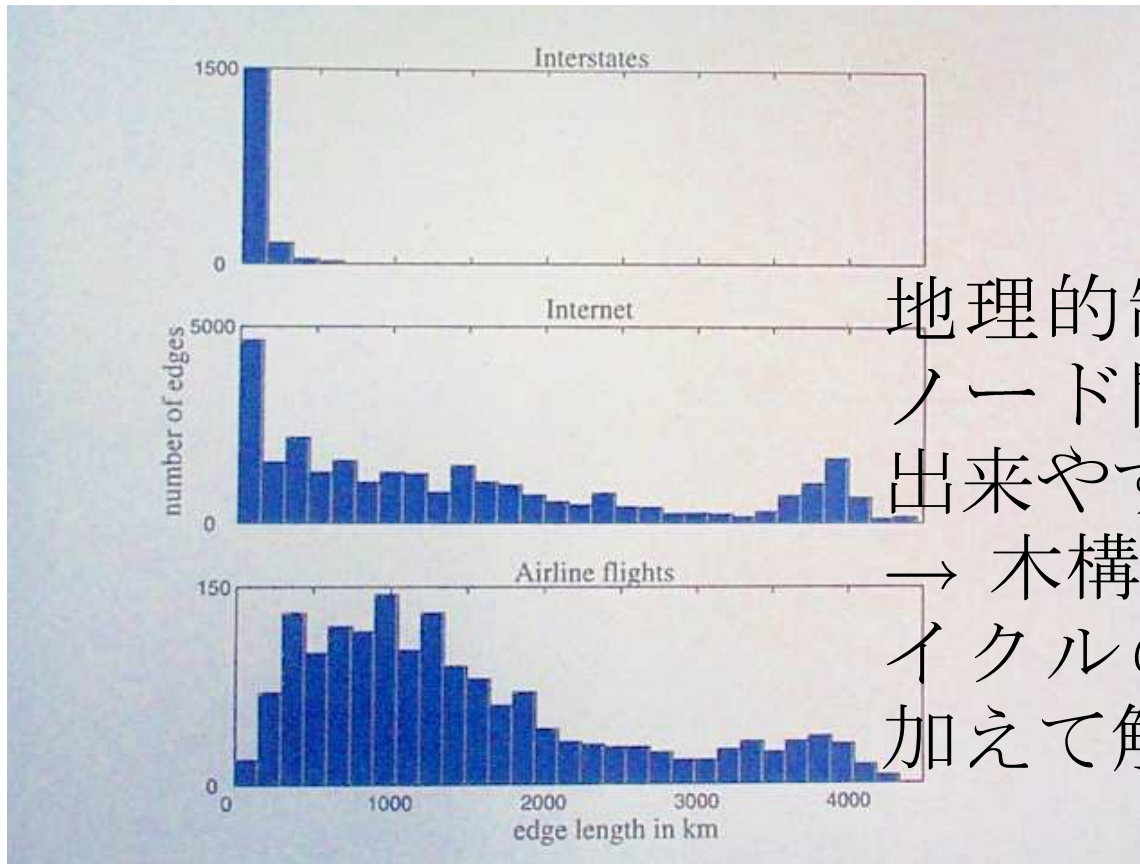
5. Geographical constraints



地理的制約により近接ノード間のサイクルが出来やすい
→ 木構造に長さ L のサイクルの独立な影響を加えて解析を拡張

M.T.Gastner and M.E.J.Newman,
Euro.Phys. J. B 49(2), 2006.

5. Geographical constraints



地理的制約により近接ノード間のサイクルが出来やすい

→ 木構造に長さ L のサイクルの独立な影響を加えて解析を拡張

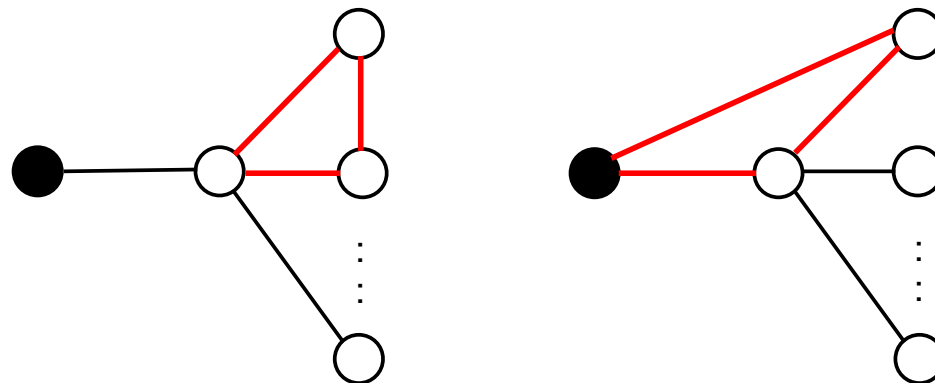
M.T.Gastner and M.E.J.Newman,
Euro.Phys. J. B 49(2), 2006.

$\forall P(k)$ において, 短いサイクルの存在でより脆弱に!

Effect of Triangles

長さ3のサイクル（友達の友達の三角形）の影響

$$q_c^* = \frac{\langle k \rangle}{\langle k(k-1) \rangle - \left(1 - q_c^* \frac{\langle k(k-2) \rangle}{\langle k \rangle}\right) \langle C(k) \frac{(k-1)^2}{2} \rangle}$$

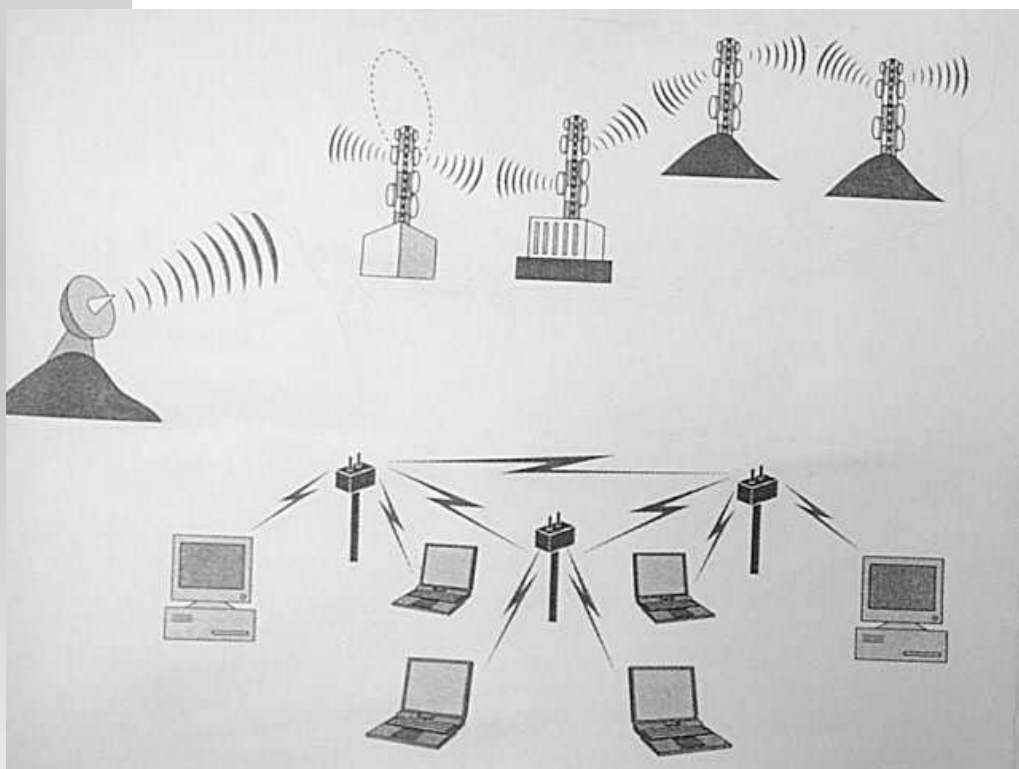


理論予測：分母がより小さくなって $q_c^* > q_c$, 短いサイクルの存在で **ランダム故障により脆弱!**

L.Huang et al., Europhys.Lett. 72(1), 2005.

Wireless Communication

近未来のセンサシステム, P2P, アドホック通信などに適した動的なネットワーク構築



エネルギー消費 出来るだけ維持建設コストを抑え、リンク長を短く

電波干渉 地表を覆い、リンク交差がない

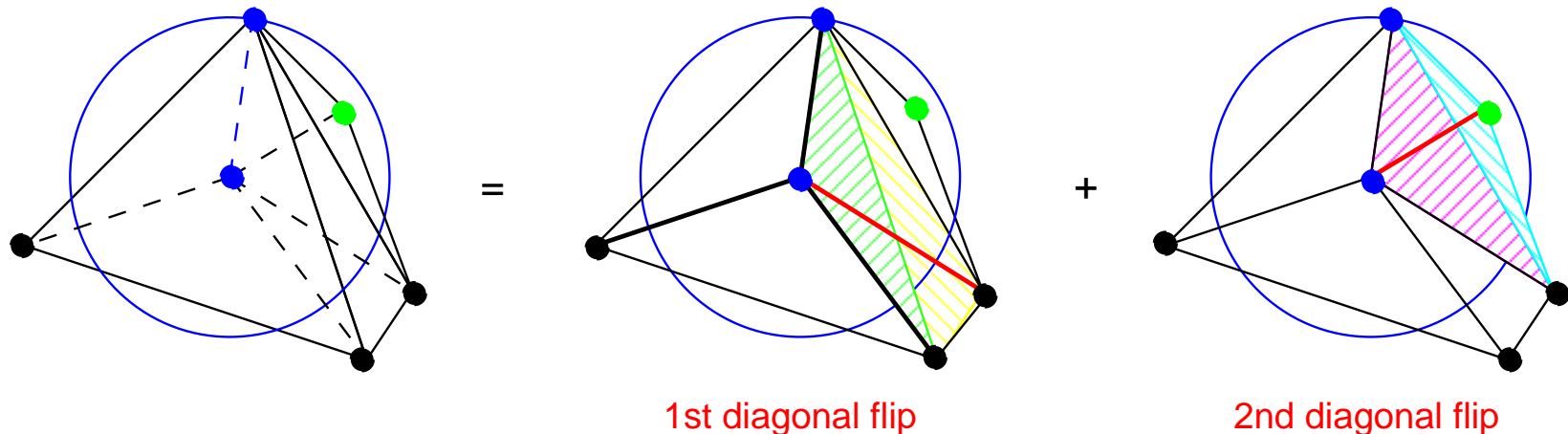
Geographical SF networks

三角分割されたある初期構成から反復的に成長

Random Apollonian: ランダム選択した三角形内に新ノードを挿入し, そこから各頂点に結合 (三角形の再分割)

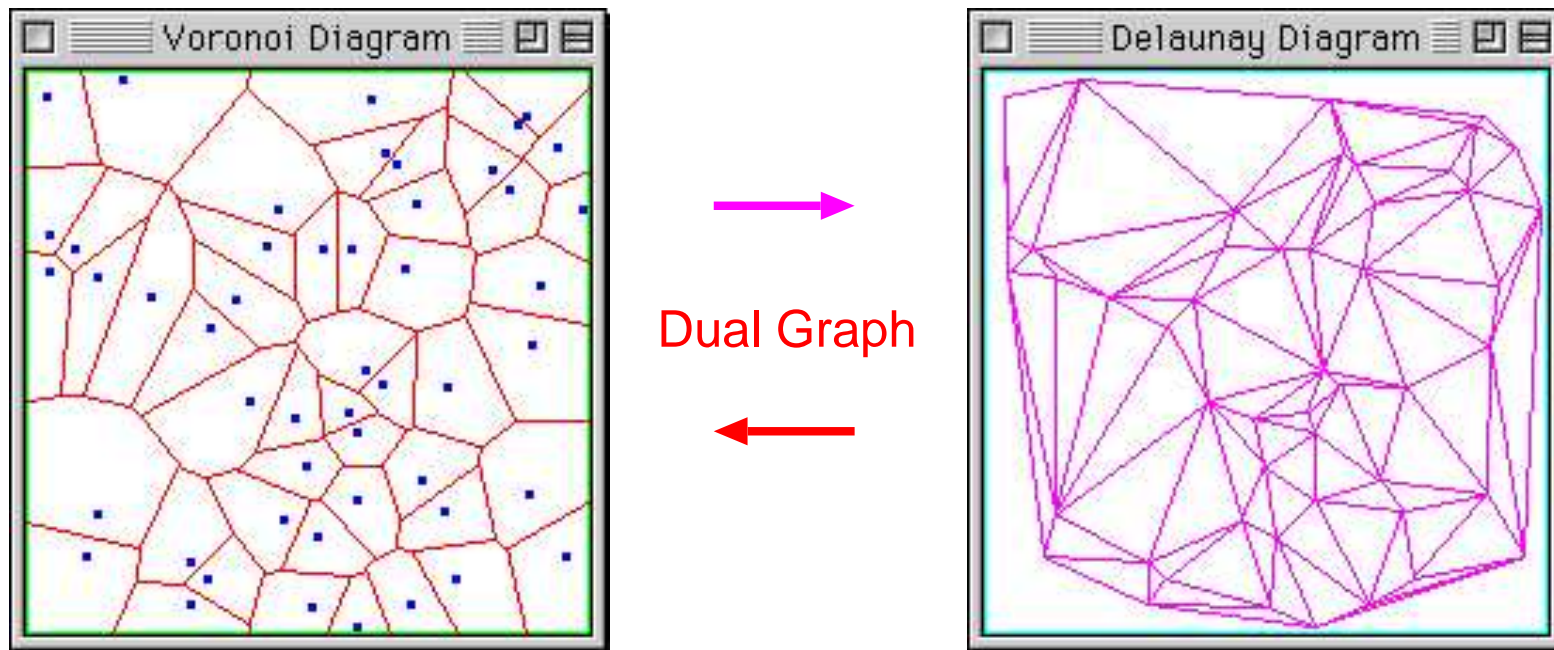
Delaunay-like SF: 新ノードを中心としたある範囲内で対角変形を施す (長距離リンクの抑制)

Delaunay Triangulation: 対角変形操作を全域で



Voronoi and Delaunay

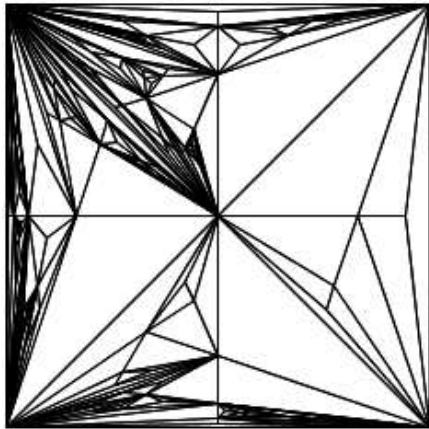
最も近い母点にアクセスするとした管轄領域



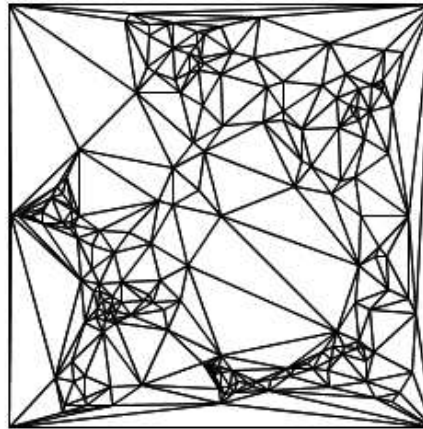
DTには幾何学的な良い性質：

最小角最大, 最小外接円, t-spanner など

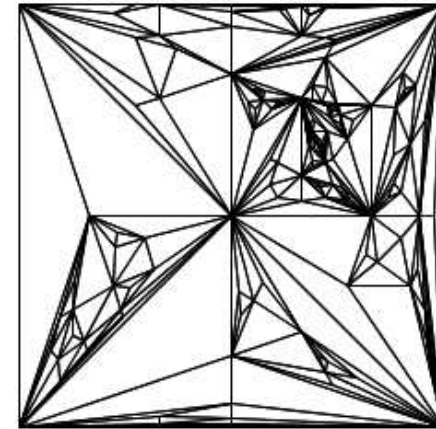
Topological Structure



RA



DT

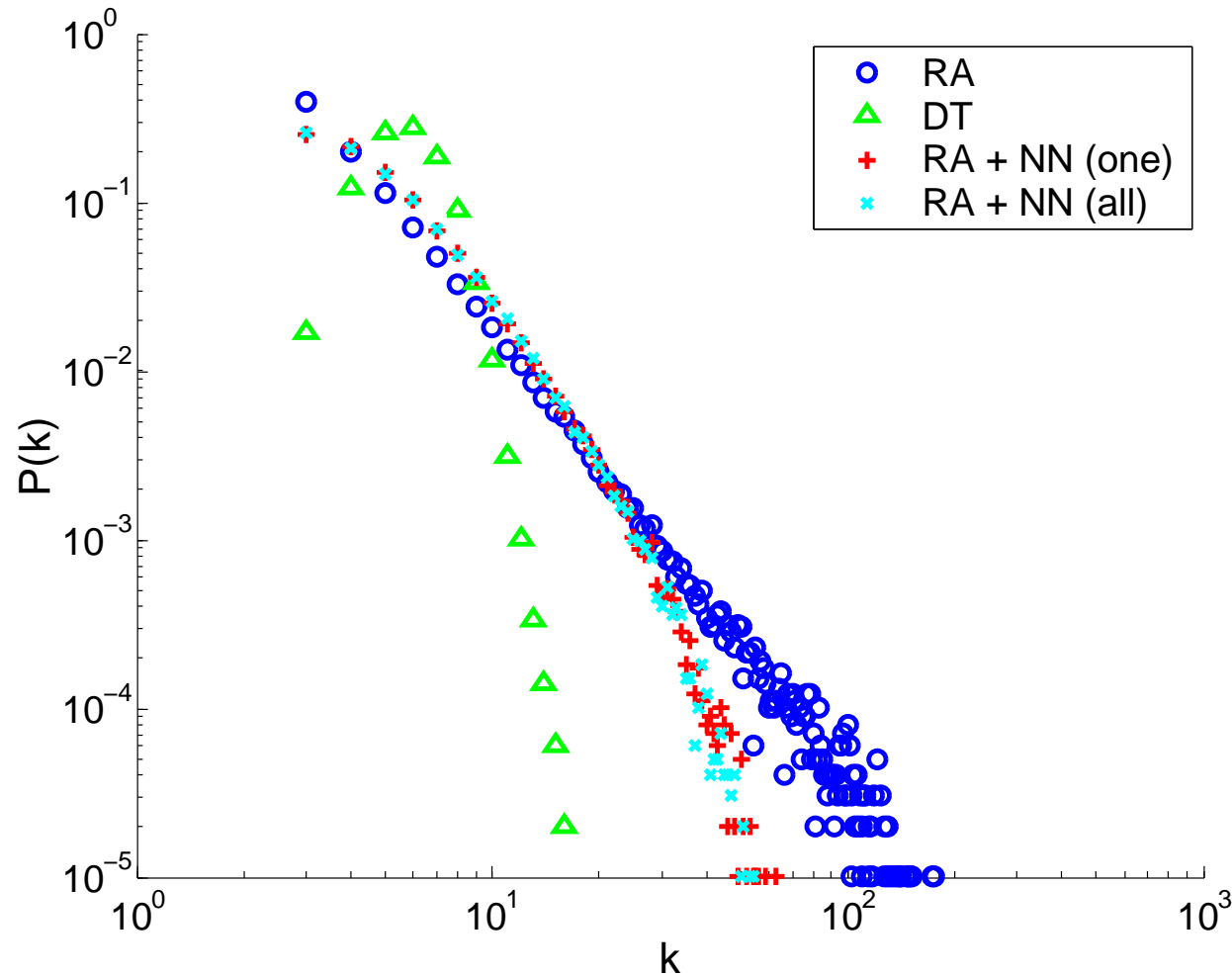


RA+NN(one)

- 4隅と中央におけるハブ的スタブ
- 人口分布のような疎密部分が自然に創出

Y.Hayashi and J.Matsukubo, Physical Review E 73, 066113, 2006.

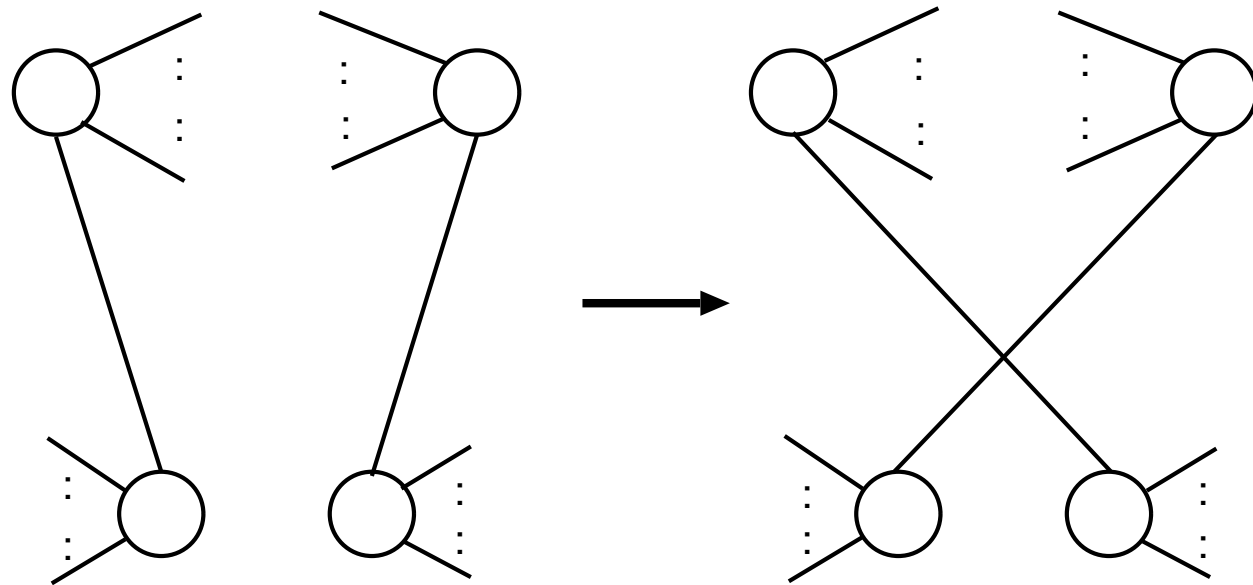
Degree Distribution



RA: power law, DT: lognormal, DLSF(RA+NN):
power law with exponential cutoff

Randomly Rewired Nets

地理的制約を無くしたネットワークとの比較：
総リンク数や次数分布を保持したまま、ランダムに
リンクを張り替える

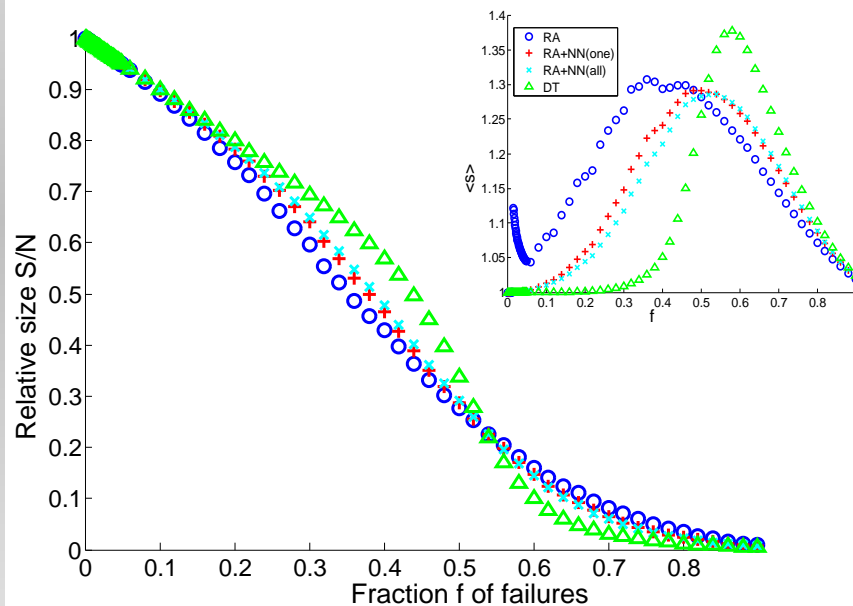


Rewiring a pair of links with the same degree at each node

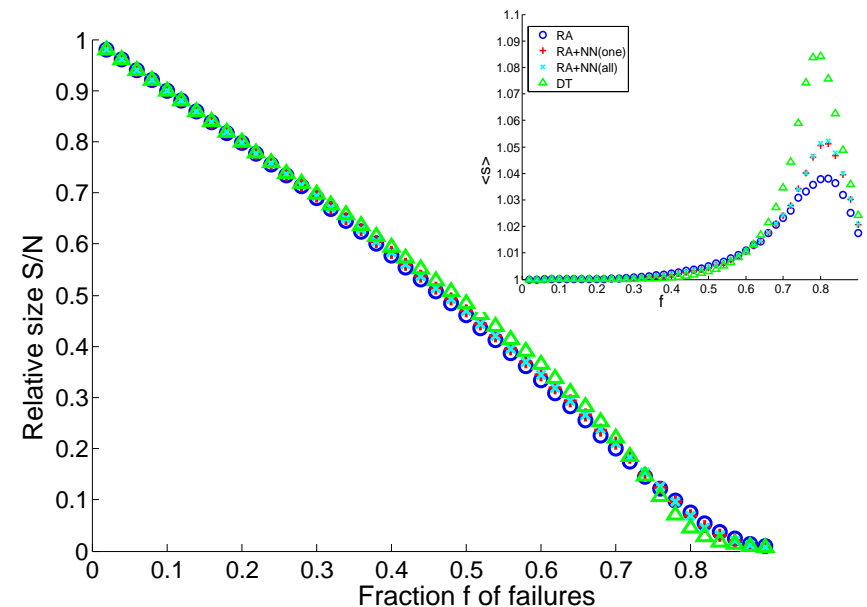
Maslov et al., Physica A 333, 2004

Tolerance to Failures

最大連結成分 GC のサイズ比 S/N
挿入図：平均クラスタサイズ $\langle s \rangle$



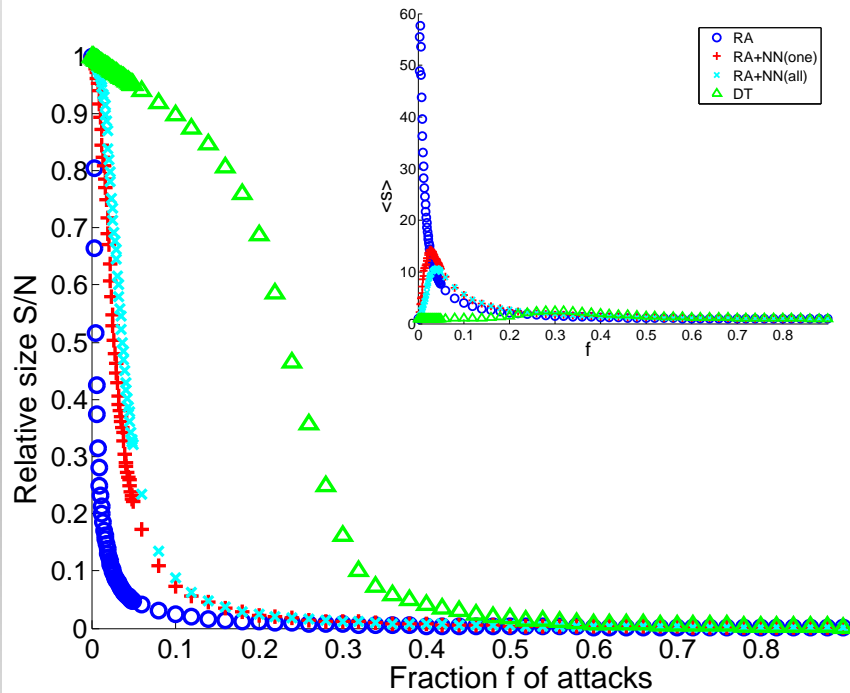
(a) geographical nets



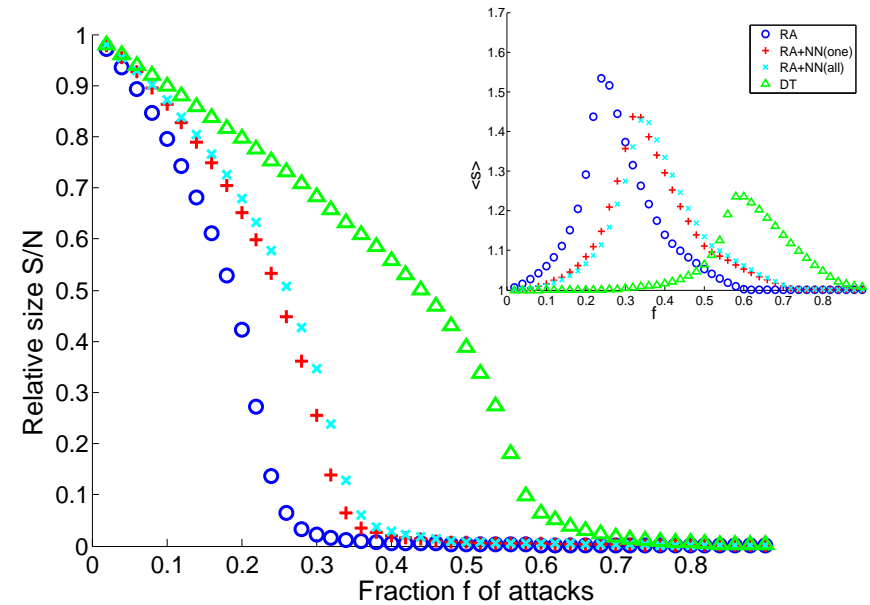
(b) rewired nets

⇒ どれも頑健 (RA: ○, DT: △, DLSF: +)

Tolerance to Attacks



(a) geographical nets



(b) rewired nets

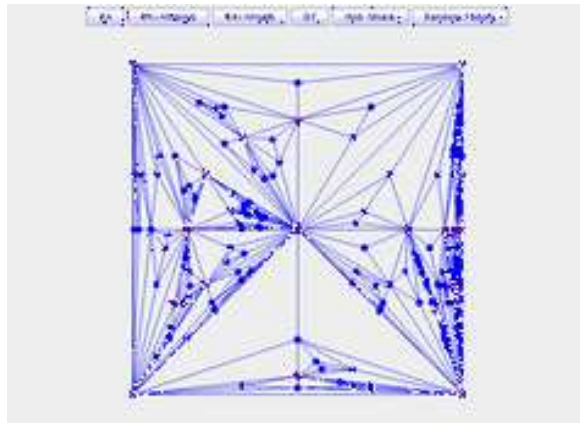
⇒ 地理的制約無は, ハブ攻撃への脆弱性を抑制

Vulnerability

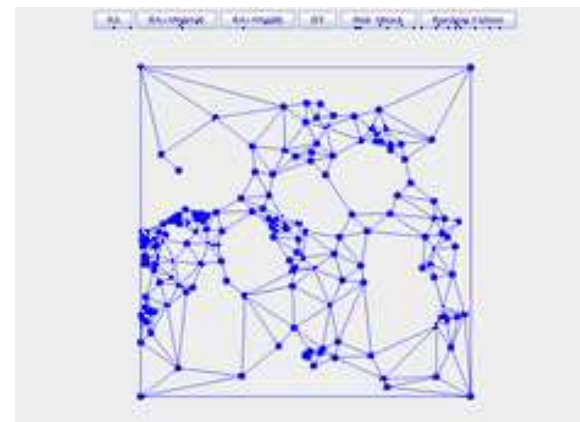
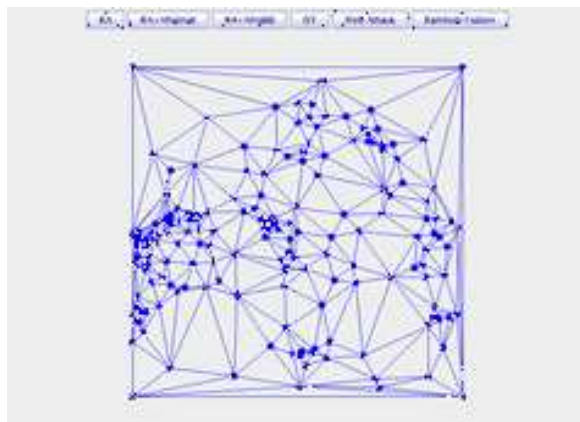
Initial N=200

targeted attacks on
16 hubs

RA

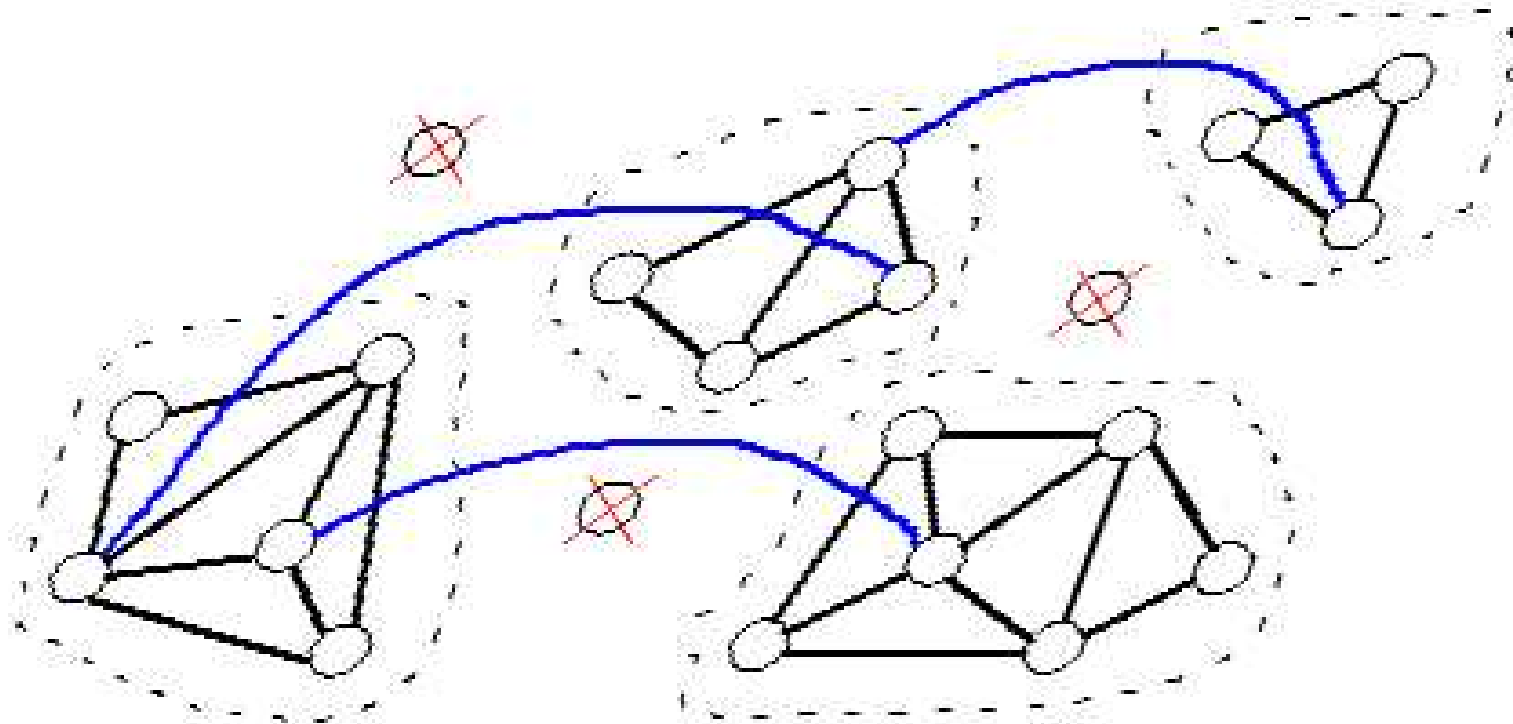


DT



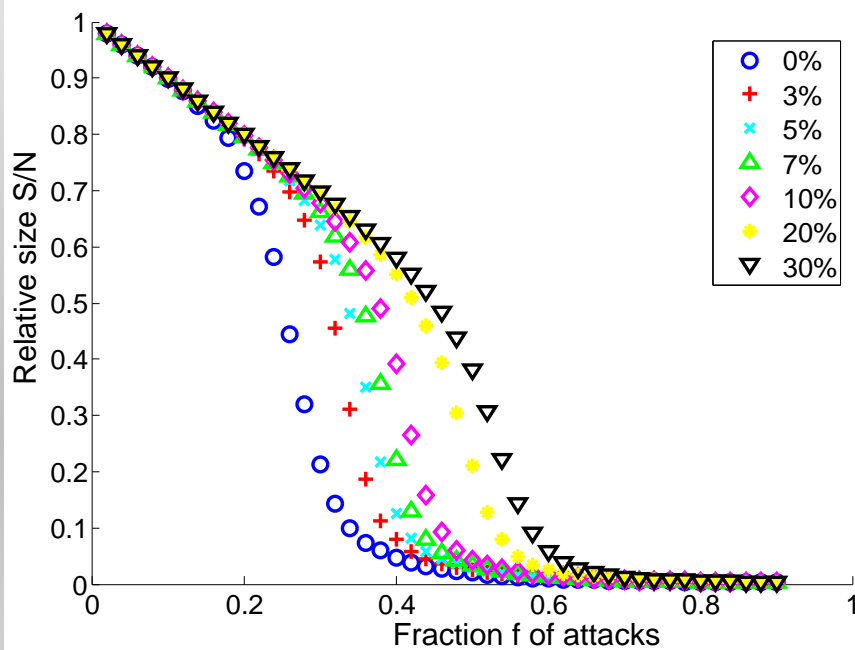
ハブ攻撃による分断化の例：孤立島どうしは不通

6. Backbone of Super-highways

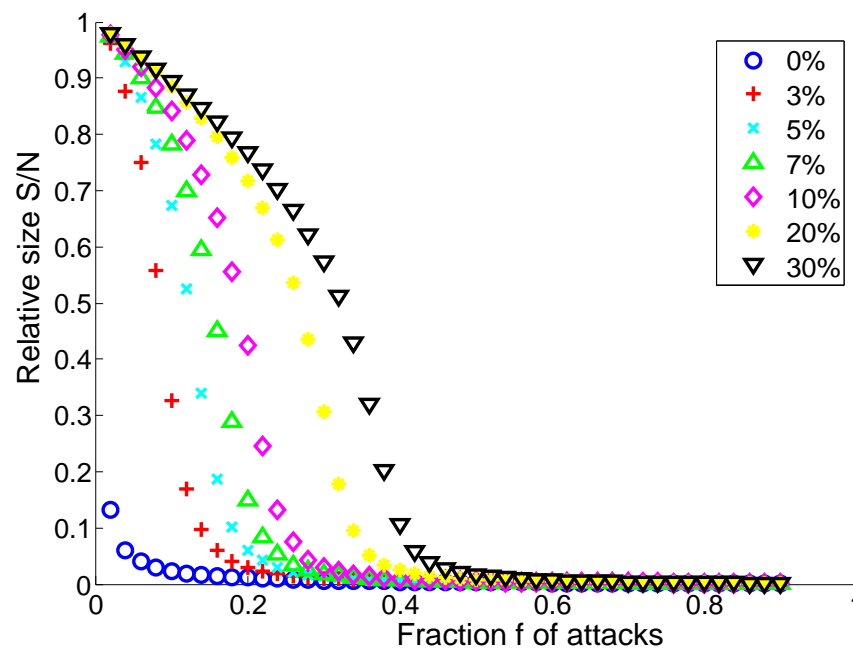


ショートカットとなる高架橋のイメージ

Shortcut Effect



(a) DT



(b) RA

10% 程度の追加で崩壊に至るハブ攻撃の臨界値が,
DT: $0.3 \rightarrow 0.5$, RA or DLSF: $0.03 \rightarrow 0.3$ に上がり,
頑健性が改善!

7. Summary

- 現実の多くのネットワークに共通する特徴：
「小さな世界」と「べき乗分布」

7. Summary

- 現実の多くのネットワークに共通する特徴：
「小さな世界」と「べき乗分布」
- 単純な原理で自律分散的に構築
強さと弱さ：ランダム故障には頑健, but, ハブ
攻撃には脆弱
→ ウィルス等には重点的なハブ免疫が有効!

7. Summary

- 現実の多くのネットワークに共通する特徴：
「小さな世界」と「べき乗分布」
- 単純な原理で自律分散的に構築
強さと弱さ：ランダム故障には頑健, but, ハブ
攻撃には脆弱
→ ウィルス等には重点的なハブ免疫が有効!
- 許容量の超過連鎖によるカスケード故障に対
する局所的なリンク張り替え防御策

7. Summary

- 現実の多くのネットワークに共通する特徴：
「小さな世界」と「べき乗分布」
- 単純な原理で自律分散的に構築
強さと弱さ：ランダム故障には頑健, but, ハブ
攻撃には脆弱
→ ウィルス等には重点的なハブ免疫が有効!
- 許容量の超過連鎖によるカスケード故障に対
する局所的なリンク張り替え防御策
- 地理的制約による結合耐性の弱体化と、ショー
トカットによる改善策

7. Summary

- 現実の多くのネットワークに共通する特徴：
「小さな世界」と「べき乗分布」
- 単純な原理で自律分散的に構築
強さと弱さ：ランダム故障には頑健, but, ハブ
攻撃には脆弱
→ ウィルス等には重点的なハブ免疫が有効!
- 許容量の超過連鎖によるカスケード故障に対
する局所的なリンク張り替え防御策
- 地理的制約による結合耐性の弱体化と、ショー
トカットによる改善策

より良いネットワークの設計原理の解明を目指して!

Thanks

ご清聴ありがとうございました!

今年度出版予定

- 林 著, 「仮) 噂は広がる - ネットワーク科学が解き明かす -」 DOJIN 選書, 化学同人
- 林 編著, 「ネットワーク科学の道具箱」 近代科学社

(社) 情報処理学会 フロンティア研究領域
ネットワーク生態学研究グループ

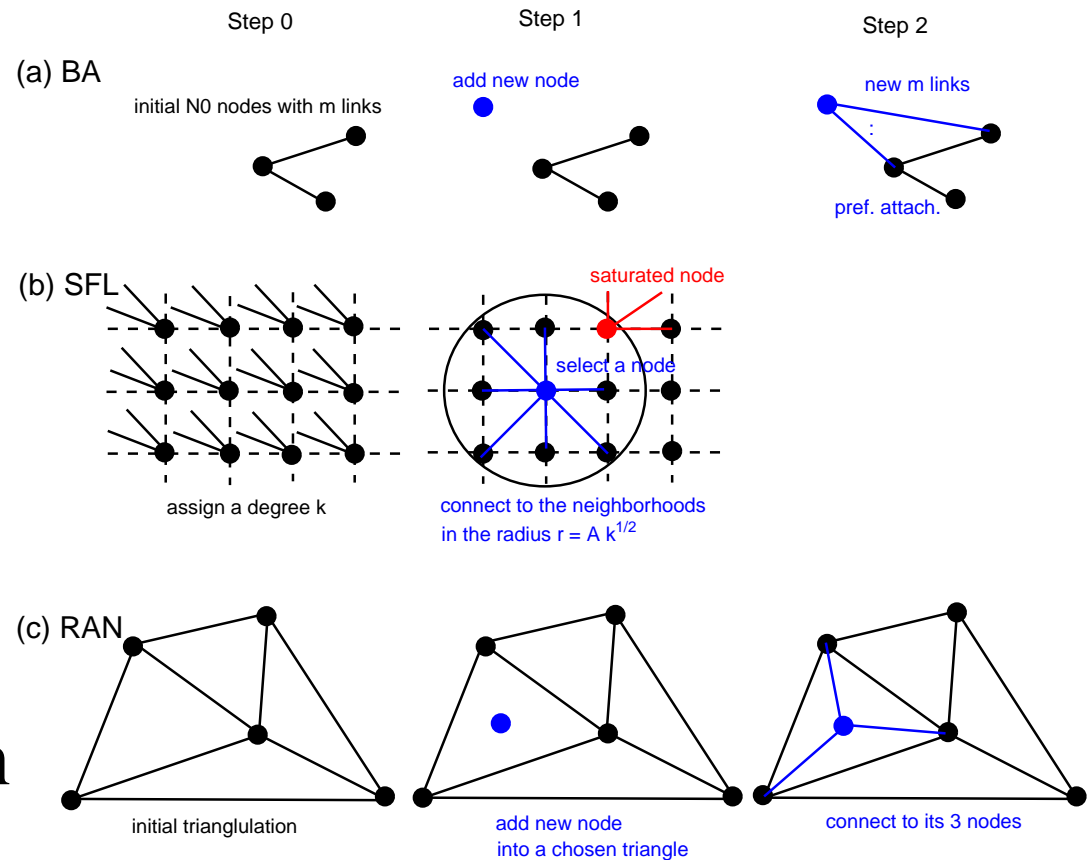
http://www.jaist.ac.jp/~yhayashi/NetEcoG_top.html

A1. Geographical SF Nets

- Modulated BA:

$$\Pi_i \sim k_i \times l^\alpha,$$
 rand. position of node
- SF on lattices:
 connect within

$$r = A \times k_i^{1/d}$$
- Space-filling:
 subdivision of a region (heterogeneous dist. of nodes)



A2. Planarity and Shortness

class	planarity of net	shortness of links
<u>Modulated BA</u> Manna'02, Xulvi-Brunet'02	× ∃ crossing links (not prohibited)	○ with disadvantaged long-range links
<u>SF on lattices</u> ben-Avraham'03, Warren'02	× cross of regular links and shortcuts	△ ∃ long shortcuts from hubs
<u>Space-filling</u> Apollonian nets. Doye'05, Zhou'04	○ by subdivision of a selected region	△ ∃ long-range links in narrow triangles

A3. Efficient Routing

Planar triangulation: reasonable math. abstraction of ad hoc net. (each triangle forms a service region)
Moreover, a **memoryless, no defeat, and competitive** online routing algorithm has been developed for networks on triangulation.

